

M. BARBUT

**Partitions d'un ensemble fini : leur treillis (cosimplexe) et leur représentation géométrique**

*Mathématiques et sciences humaines*, tome 22 (1968), p. 5-22

[http://www.numdam.org/item?id=MSH\\_1968\\_\\_22\\_\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__22__5_0)

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**PARTITIONS D'UN ENSEMBLE FINI :  
LEUR TREILLIS (COSIMPLEXE)  
ET LEUR REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE \***

par  
M. BARBUT

*Au moment où certains programmes des facultés des Lettres (sociologie générale, par exemple) invitent à initier les étudiants au « problème logique de la classification », il n'est pas sans intérêt de rassembler, en quelques articles, les matériaux mathématiques qui peuvent aider l'enseignant à comprendre cette logique. Ces matériaux sont en effet, dans la littérature mathématique, dispersés entre des livres traitant de domaines parfois éloignés : combinatoire, treillis, géométries.*

*Ce premier article consacré au thème de la classification s'attache principalement à des aspects peu connus, quoique simples, du concept de partition (par lequel se formalise généralement celui de classification) : méthode de construction du treillis de toutes les partitions d'un ensemble fini donné (§ 3), représentations géométriques de ce treillis (§ 5 et 6).*

*La note de B. Monjardet (« Note sur les treillis géométriques et l'axiomatique du treillis des partitions ») qui suit cet article le complète très utilement sur ces points.*

*D'autres aspects plus classiques sont traités de façon rapide car ou bien on y reviendra ultérieurement (§ 1) ou bien des articles déjà parus dans le bulletin M.S.H. en traitaient (§ 2 et 4) et l'on n'a présenté ici que des compléments à ces articles, cités dans le présent texte.*

*De même, des propriétés combinatoires des partitions telles que celle qu'énonce le célèbre théorème de Ramsey, ou le lien entre partitions et arbres (cf. sur les arbres, M.S.H. n° 22), ne seront abordées que plus tard.*

1. — INTRODUCTION : LES PARTITIONS ET LEUR TREILLIS.

a) *Partitions.*

On appelle *partition* d'un ensemble  $E$  toute famille de parties de  $E$  telle que chaque élément de  $E$  appartienne à une et à une seule de ces parties. Autrement dit, une partition d'un ensemble  $E$  est une *division* de celui-ci en *classes* (deux à deux disjointes), de sorte que chaque élément de  $E$  soit dans une classe et une seule. C'est une *classification* des éléments de  $E$ .

La donnée d'une partition d'un ensemble est équivalente à la donnée sur celui-ci d'une *relation d'équivalence*, c'est-à-dire d'une relation binaire, transitive, symétrique et réflexive. L'ensemble dont les éléments sont les classes d'une partition  $\Pi$  de  $E$  est appelé *ensemble quotient* de  $E$  par  $\Pi$ , et noté  $E/\Pi$ .

---

\* Je remercie M. J. Dougnon, dont les notes qu'il a rédigées à l'un de mes cours de l'E.P.H.E. m'ont été très utiles pour la mise au point de cet article.

Exemple :  $E = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

Une partition  $\Pi$  : celle dont les classes sont

$\{ 1,4,6, \}$ ,  $\{ 2,5 \}$ ,  $\{ 3 \}$

L'ensemble quotient :  $E/\Pi = \{ \{ 1,4,6 \}, \{ 2,5 \}, \{ 3 \} \}$

La relation d'équivalence associée (figurée par un diagramme en réseau) :

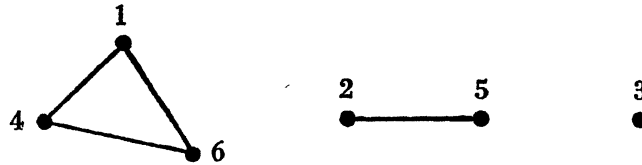


Fig. 0

Notations. On notera dans la suite les partitions sous la forme :

146/25/3 (pour  $\{ 1,4,6 \}, \{ 2,5 \}, \{ 3 \}$ )

b) *Finesse.*

Une partition  $\Pi$  de  $E$  est dite plus *fine* qu'une autre partition  $\Pi'$  du même ensemble  $E$  si toute classe de  $\Pi'$  est union de classes de  $\Pi$ , ou, de façon équivalente, si les classes de  $\Pi$  sont obtenues par *subdivision* de celles de  $\Pi'$ .

On dit encore que  $\Pi$  est une *sous-partition* de  $\Pi'$  ( $\Pi'$  est une *sur-partition* de  $\Pi$ ), et l'on peut noter :

$$\Pi \leq \Pi'$$

Dans le langage des relations d'équivalence,  $\Pi$  est sous-partition de  $\Pi'$  si et seulement si la relation d'équivalence  $R$  associée à  $\Pi$  est *compatible* avec celle,  $R'$ , qui est associée à  $\Pi'$ .

$$\forall x, \forall y \in E, xRy \implies xR'y$$

La relation de *finesse* ainsi définie entre partitions d'un même ensemble est évidemment une relation d'*ordre* (partiel) : transitive, antisymétrique, réflexive. En particulier, la *plus fine* de toutes les partitions de  $E$  est celle dont chaque classe se réduit à un seul élément (singletons), associée à la relation d'*égalité*, et la *moins fine* est celle dans laquelle tous les éléments de  $E$  constituent une seule classe (son quotient est  $\{ E \}$ ).

c) *Treillis.*

Deux partitions  $\Pi$  et  $\Pi'$  d'un même ensemble étant données, on peut les *croiser*, c'est-à-dire définir une nouvelle partition notée  $\Pi \wedge \Pi'$  dont les classes sont obtenues en prenant l'intersection de *chaque* classe de l'une par *toutes* les classes de l'autre.

Exemple :  $\Pi : 146/25/3$   $\Pi' : 143/256$

On obtient facilement  $\Pi \wedge \Pi'$  par la classique disposition en tableau croisé.

$\Pi' \backslash \Pi$	146	25	3
143	14		3
256	6	25	

$\Pi \wedge \Pi' : 14/25/3/6$

$\Pi \wedge \Pi'$  est la moins fine de toutes les partitions plus fines que  $\Pi$  et  $\Pi'$  ; c'est l'*infimum* de  $\Pi$  et  $\Pi'$  ; on dit également, pour rappeler le procédé qui permet de l'obtenir, que c'est le *croisement* de  $\Pi$  et  $\Pi'$ .

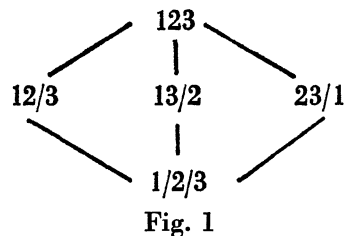
On peut également associer à tout couple de partitions  $\Pi$  et  $\Pi'$  la *plus fine* de toutes les partitions moins fines que  $\Pi$  et  $\Pi'$ . Elle s'obtient par fermeture transitive (itération répétée) de l'opération qui consiste à faire correspondre à chaque élément de  $E$  tous ceux qui sont dans la même classe que lui soit dans  $\Pi$ , soit dans  $\Pi'$ . On la note  $\Pi \vee \Pi'$ , c'est le *supremum* de  $\Pi$  et  $\Pi'$ .

*Exemples :*  $\Pi : 146/25/3$        $\Pi' : 14/2/53/6$   
 $\Pi \vee \Pi' : 146/235$   
 $\Pi : 146/25/3$        $\Pi' : 143/256$   
 $\Pi \vee \Pi' : 123456$

d) *Orthogonalité* (Complémentation).

L'ensemble de toutes les partitions de  $E$ , ordonné par la relation de finesse, constitue ainsi un *treillis*.

Voici par exemple le treillis des 5 partitions de  $E = \{ 1,2,3 \}$  figuré par un diagramme de finesse :



Ce treillis est *complémenté* : à chaque partition  $\Pi$  de  $E$  on peut faire correspondre au moins une (en général plusieurs) partition  $\Pi'$  *complémentaire* de (ou orthogonale à)  $\Pi$  en ce sens que  $\Pi \wedge \Pi'$  est la plus fine de toutes les partitions de  $E$ , et  $\Pi \vee \Pi'$  la moins fine.

Pour les partitions de  $E = \{ 1,2,3 \}$  chacune des partitions 12/3, 13/2, 23/1 est orthogonale aux deux autres.

Lorsque  $E$  est fini, toutes les partitions complémentaires d'une partition  $\Pi$  donnée s'obtiennent facilement par le procédé suivant : on choisit un élément dans chaque classe de  $\Pi$  ; le « système de représentants » de ces classes ainsi constitué est la première classe de  $\Pi'$  ; puis on choisit un élément parmi les éléments restant dans chaque classe de  $\Pi$  ; on a ainsi une seconde classe de  $\Pi'$  ; etc.

*Exemple :*  $\Pi : 146/25/3$   
 $\Pi' : 123/45/6$

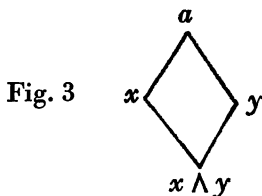
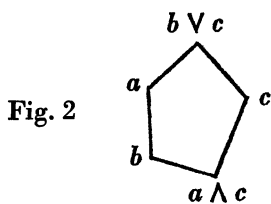
Une partition orthogonale à  $\Pi$  :

première classe 1 2 3 (reste 46/5)  
 seconde classe 4 5 (reste 6)  
 troisième classe 6

Mais d'autres partitions orthogonales à  $\Pi$  sont : 435/65/1, 623/15/4, etc.

e) *Mesurabilité*.

On sait qu'un treillis  $T$  est dit *mesurable* (on dit souvent *modulaire*) s'il est possible de définir une application monotone  $m$  de  $T$  dans un groupe abélien totalement ordonné (en général,  $(\mathbb{R}, +, \geq)$  ou  $(\mathbb{Q}, +, \geq)$ ) satisfaisant à la relation :



$$1) \quad \forall x, y \in T, \quad m(x \vee y) + m(x \wedge y) = m(x) + m(y)$$

La mesurabilité d'un treillis équivaut à la propriété combinatoire que la configuration « en pentagone » (fig. ci-contre) y est exclue, ou à la propriété locale (fig. 3) que :

2) si deux éléments  $x$  et  $y$  sont *couverts* par un même troisième  $a$ ,  $x$  et  $y$  couvrent  $x \wedge y$ .

et dualement :

3) si deux éléments  $x$  et  $y$  couvrent un même troisième  $a$ ,  $x \vee y$  couvre  $x$  et  $y$ .

Ainsi, tous les treillis distributifs (a fortiori, booléens) sont mesurables. Mais certains treillis non distributifs le sont : par exemple, le treillis des partitions d'un ensemble de cardinal 3, figuré plus haut.

En fait, les treillis de partition ne sont pas mesurables (pour  $n \geq 4$ ) ; la configuration « en pentagone » interdite apparaît dès  $n = 4$  (voir fig. p. 14). Ces treillis sont *semi-mesurables* (semi-modulaires) en ce sens que dans 1)  $=$  est remplacé par  $\leq$  ; ou, de façon équivalente, que de 2) et 3), seule 3) reste valable.

Néanmoins, toutes les chaînes maximales entre deux éléments comparables (partitions en relation de finesse) ont même longueur (condition de Jordan-Hölder) ce qui permet de définir de façon naturelle des *niveaux* (nombre de classes d'une partition) et des *distances* entre partitions ; on y reviendra dans un article ultérieur consacré aux métriques des classifications.

Comme la mesurabilité d'un treillis est équivalente à la condition *algébrique* que quel que soit  $t \in T$ , les applications  $\mathcal{C}_t : x \rightarrow t \vee x$  sont des isomorphismes pour les intervalles (l'intervalle  $[u \wedge t, u]$ , a pour image dans  $\mathcal{C}_t$  l'intervalle  $[t, u \vee t]$ ), la non-mesurabilité des treillis de partitions laisse prévoir que leur maniement algébrique est moins aisé que celui des treillis mesurables (pour lesquels des automorphismes sont définis par les opérations elles-mêmes du treillis).

En fait, contrairement à ce qui se passe en particulier pour les treillis de parties d'un ensemble fini (treillis booléens finis, simplexes) les systèmes d'axiomes (portant sur les opérations  $\vee$  et  $\wedge$ ) caractérisant les treillis de partitions sont très peu limpides (voir référence 9 de la note de B. Monjardet citée *supra*).

## 2. — LA DUALITÉ ENTRE TREILLIS DES PARTIES ET TREILLIS DES PARTITIONS.

Je note  $C_n$  (C : classification, cosimplexe) le treillis des partitions d'un ensemble de  $n$  éléments, ordonnées par la relation de finesse.

Cette notation est justifiée par la *dualité* entre parties et partitions d'un ensemble : si l'on appelle simplexe  $S_n$  le treillis des parties d'un ensemble fini de cardinal  $n$  ordonnées par inclusion, on pourrait appeler *cosimplexe* le treillis des partitions. G. Kreweras a développé certains aspects de cette dualité dans un article publié naguère dans *M.S.H.* (G. Kreweras, « Une dualité souvent utile dans les problèmes combinatoires », *Mathématiques et Sciences Humaines* n° 3, avril 1963, p. 31-42.)

Rappelons les faits principaux.

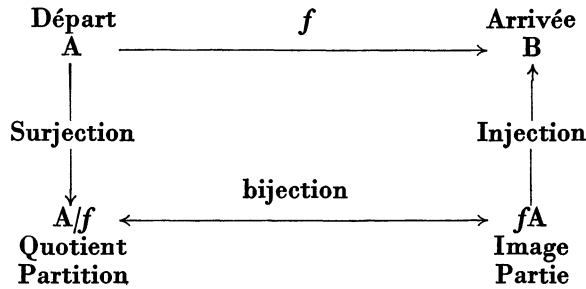
a) *Dualité : partie-partition.*

Toute *application* (fonction)  $f : A \rightarrow B$  définit :

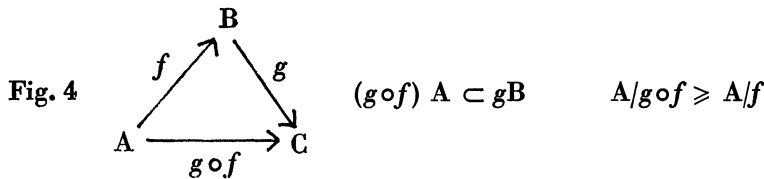
— une *partie* dans son ensemble d'arrivée B, partie qui est son *image*  $fA$  ;  $f$  est *injective* si et seulement si l'image  $fA$  est une réplique (est en correspondance bijective avec) du (le) départ A de  $f$  ;

— une *partition* dans son ensemble de départ A (deux éléments de A sont dans une même classe si et seulement si ils ont même image), partition dont le quotient est noté  $A/f$  ;  $f$  est *surjective* si et seulement si son quotient est une réplique de son arrivée.

Ceci est résumé dans la *factorisation* classique de  $f$ , rappelée par le diagramme ci-dessous.

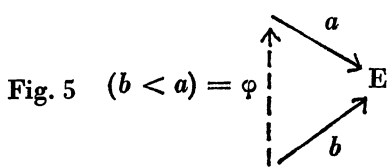


Si l'on compose deux applications  $f$  et  $g$ , l'image de  $g \circ f$  est incluse dans celle de  $g$ ; dualement la partition induite dans  $A$  par  $g \circ f$  est une surpartition de celle qui est induite par  $f$ :



b) *Simplexes en flèches.*

$a \rightarrow E$  Etant donné un ensemble (fini)  $E$ , à toute *injection*  $a$  d'arrivée  $E$  correspond une *partie* (non vide)  $A$  de  $E$ , l'image de  $a$ .



Si  $b$  est une seconde injection d'arrivée  $E$  et d'image  $B$ , on a :

$$B \subset A \iff \exists \varphi : b = a \circ \varphi$$

$\varphi$  est alors *unique*, et *injective*. On peut poser, par définition de  $<$  :

$$\varphi = (b < a)$$

On vérifie immédiatement que :

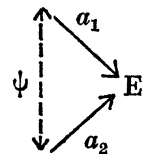
$$(a < b) \circ (b < c) = (a < c)$$

Et que :  $(a < a) = I_{D_a}$

Dans cette égalité, la notation  $I_X$  désigne l'application identique d'un ensemble  $X$  et  $D_a$  le départ (domaine de  $a$ ).

Mais à une même partie (non vide)  $A$  de  $E$  correspondent *plusieurs* injections d'arrivée  $E$  et ayant  $A$  pour image. On vérifiera immédiatement que deux injections  $a_1$  et  $a_2$  d'arrivée  $E$  ont la même image  $A$  si et seulement si il existe une *bijection* (unique, si elle existe)  $\psi$  telle que :

$$a_1 = a_2 \circ \psi$$



C'est-à-dire encore si :

$$a_1 < a_2 \quad \& \quad a_2 < a_1 \quad \text{sont définis.}$$

Posons dans ce cas :  $a_1 \simeq a_2$ ; la relation  $\simeq$  est évidemment une *équivalence*.

Modulo cette équivalence l'opération  $<$  devient une opération  $\subset$  entre classes, et il y a correspondance bi-univoque entre injections d'arrivée  $E$  et parties non vides de  $E$ . On a toujours :

$$(a \subset b) \circ (b \subset c) = (a \subset c)$$

Exercice : Soit  $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

Il y a 7 injections d'arrivée E :  $a, b, c, ab, bc, ca, abc$  (notations évidentes). Figurons chacune par un point (représentatif de son départ)

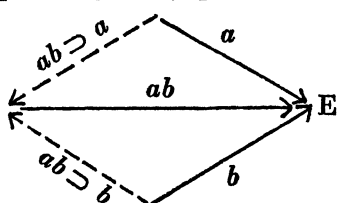


Fig. 8

est figurée par

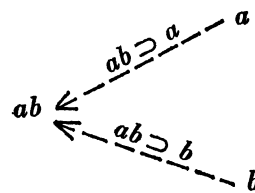


Fig. 9

Alors les flèches de composition :  $(ab \supset a), (abc \supset bc),$  etc., reconstituent le classique diagramme en treillis du simplexe  $S_3$ .

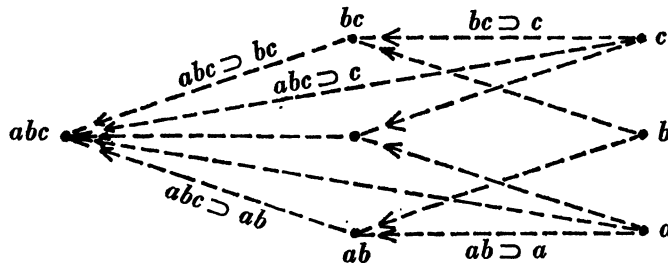


Fig. 10

On voit ainsi qu'on peut abandonner le point de vue «naïf» pris jusqu'ici, et ne se donner que les flèches, avec les axiomes usuels de leur composition dans la catégorie exacte des ensembles *finis*. En particulier, monomorphismes et épimorphismes seront définis par leurs propriétés caractéristiques :

$$x \text{ est un mono} \iff ((x \circ y = x \circ z) \implies (y = z))$$

$$x \text{ est un épi} \iff ((y \circ x = z \circ x) \implies (y = z))$$

Enumérer les parties d'un ensemble E revient à énumérer les monomorphismes d'arrivée (codomaine) E, modulo  $\simeq$ . Organiser ces parties selon la relation d'inclusion revient à composer les monomorphismes. Dans cette voie, les opérations unions, intersection entre parties sont définies par les diagrammes en «pullback» (produit fibré).

Intersection :

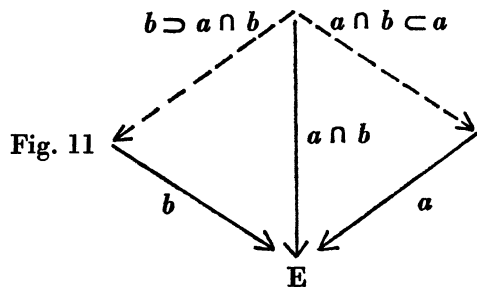


Fig. 11

et pour tout mono  $x$  tel que  $(a \supset x)$  et  $(b \supset x)$  soient définis,  $(x \supset (a \cap b))$  est défini.

N.B. —  $(a \supset x), (b \supset x),$  etc. sont des monomorphismes.

Union : (inverser le sens des flèches pointillées de composition).

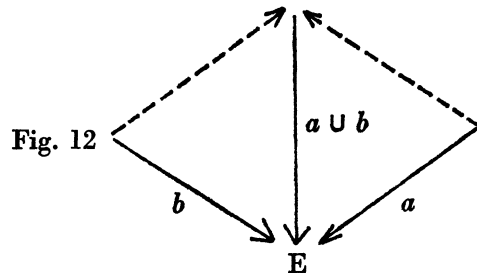


Fig. 12

Pour tout  $y$  tel que  $(y \supset a)$  et  $(y \supset b)$  soient définis,  $(y \supset (a \cup b))$  est défini.

Le lecteur intéressé par cette façon d'introduire le treillis des parties d'un ensemble pourra lire avec profit le chapitre I de B. Mitchell, *Theory of Categories* (Academic Press). Dans le cas fini qui nous intéresse on retrouvera explicitement tous les simplexes à partir de  $S_0$  par la règle de récurrence (dédoulement des simplexes) obtenue en ajoutant un élément à  $E$  (l'ensemble de cardinal 1 n'a qu'une flèche incidente).

c) *Dualité : simplexes-cosimplexes.*

On obtient les notions *duales* des précédentes en renversant le sens de toutes les flèches, et en remplaçant partout les mots employés jusqu'ici selon la table :

Départ (Domaine) surjection (épimorphisme) partition quotient finesse pushout : somme amalgamée cosimplexe $\vee$ $\wedge$	Arrivée (Codomaine) injection (monomorphisme) partie image inclusion pullback : produit fibré simplexe $\cap$ $\cup$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

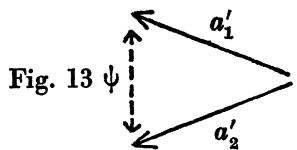


Fig. 13

Plus précisément, on considère maintenant toutes les *surjections* ayant pour *départ* l'ensemble  $E$  ; la relation d'équivalence  $\simeq$ , qui signifie maintenant « avoir le même quotient », se définit par :

$$a'_1 \simeq a'_2 \iff \exists \psi \text{ bijective} : a'_1 = \psi \circ a'_2$$

Puis la finesse (modulo  $\simeq$ ) est définie comme *opération* entre surjections de départ  $E$  par la convention :

$$(a' \geq b') = \varphi \iff a' = \varphi \circ b'$$

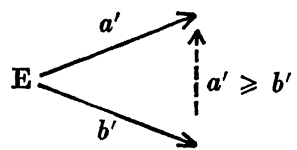


Fig. 14

L'équation  $a' = \varphi \circ b'$  a en effet une solution unique (si elle existe), et celle-ci est une surjection.

En construisant, pour  $E$  donné, toutes les flèches (pointillées) de composition selon l'opération  $\geq$ , on obtient le diagramme en treillis des partitions de  $E$ , le diagramme du cosimplexe de  $E$ .

Les opérations  $\wedge$  (infimum, croisement) et  $\vee$  (supremum) entre partitions (surjections modulo  $\simeq$ ) sont obtenues par des diagrammes commutatifs en « pushout » (sommages amalgamés) duaux des diagrammes en « pullback » qui ont servi respectivement pour l'union et l'intersection :

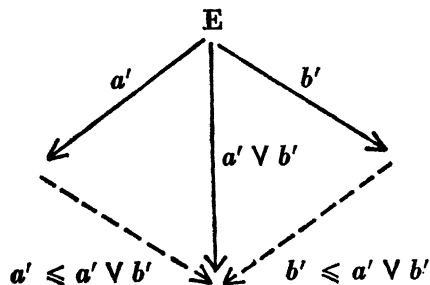


Fig. 15

Supremum de deux partitions : diagramme dual de celui de l'intersection de deux parties.



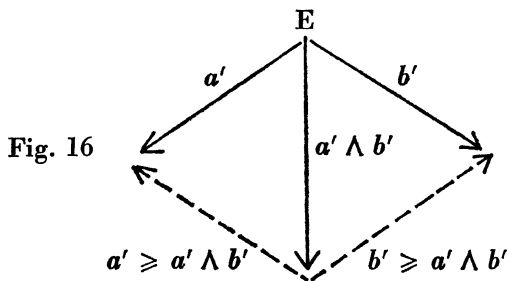


Fig. 16

Infimum de deux partitions : diagramme dual de celui de l'union de deux parties.

Pour ces deux diagrammes, on a bien entendu les propriétés :

- si  $x'$  est tel que  $(a' \leq x')$  et  $(b' \leq x')$  sont définis, alors  $(a' \vee b' \leq x')$  est défini ;
- si  $y'$  est tel que  $(y' \leq a')$  et  $(y' \leq b')$  sont définis, alors  $(y' \leq a' \wedge b')$  est défini.

Comme dans le cas des parties et des simplexes, on peut si on le désire abandonner le point de vue « naïf », c'est-à-dire prendre comme point de départ les axiomes des flèches, considérer les épimorphismes de même domaine fini  $E$ , et définir les partitions de  $E$  comme classe modulo  $\simeq$  d'épimorphismes. Mais dans ce cas, la récurrence ne s'amorce pas comme dans celui des simplexes.

Exercices :

- 1) Construire le diagramme en treillis du cosimplexe  $C_3$  de  $E = \{A, B, C\}$ .
- 2) Montrer que si  $a$  et  $b$  données sont injectives d'arrivée  $E$ , et telles que  $b \supset a$ , il est toujours possible de définir  $a'$  et  $b'$  surjectives de départ  $E$  et telles que le diagramme suivant soit commutatif ( $\alpha$  et  $\beta$  bijectives).

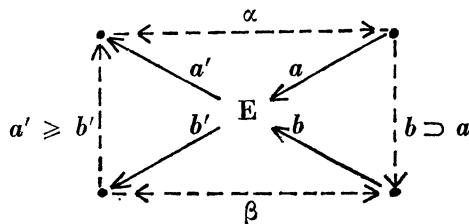


Fig. 17

3) Cosimplexes engendrés par les simplexes.

a) Une base du cosimplexe.

A chaque partie  $X$  de  $E$ , associons la partition  $P_X$  dans laquelle  $X$  constitue une classe, et chaque élément de  $X' = E - X$  est un singleton (est seul dans sa classe).

Exemple :  $E = \{a, b, c, d\}$   $P_{ab} = ab/c/d$

Si l'on désigne par  $P_0$  la partition la plus fine ( $P_0 = a/b/c/d$ ) on a pour chacune des  $n$  parties  $X$  à un seul élément ( $|E| = n$ ) :

$$P_X = P_0$$

On peut poser par convention :

$$P_\emptyset = P_0$$

Par contre, pour les parties  $X$  ayant au moins deux éléments la correspondance  $X \rightarrow P_X$  est biunivoque.

L'ensemble des partitions  $P_X$  ainsi sélectionnées constitue une base pour le treillis des partitions de  $E$ . Toute partition  $\Pi$  de  $E$  fini est en effet déterminée par l'ensemble des classes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  non réduites à des singletons qui la constituent ; et l'on a :

$$\Pi = P_{X_1} \vee P_{X_2} \vee \dots \vee P_{X_k}$$

Cette décomposition est par définition unique.

Exemple :  $E = \{ a, b, c, d, e, f \}$   
 $\Pi = ab/cd/ef$   
 $\Pi = P_{ab} \vee P_{cd}$

b) La base est un simplexe «tronqué».

Soit  $S'_n$  l'ensemble des partitions  $P_X$  ( $X \subset E$ ) muni de la relation de finesse. On a manifestement :  
 $X \subset Y \implies P_X \leq P_Y$

et

$$P_X \cap P_Y = P_X \wedge P_Y$$

En particulier, si  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $P_X \cap P_Y = P_\emptyset = P_X \wedge P_Y$

La correspondance  $X \rightarrow P_X$  est donc un homomorphisme du simplexe  $S_n$  des parties de  $E$  sur  $S'_n$ . Exemple :

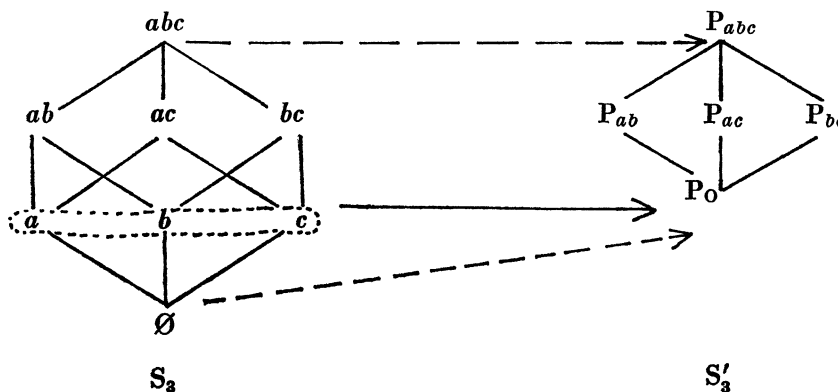


Fig. 18

Comme cette correspondance est bijective pour les parties de cardinal  $\geq 2$ , et que toutes les parties de cardinal 1 et 0 vont sur  $P_0$ , le diagramme en treillis de  $S'_n$  se déduit de  $S_n$  en rassemblant en un seul point (figurant  $P_0$ ) tous les sommets de «niveaux» 0 et 1 de  $S_n$  :  $S'_n$  est un «simplexe tronqué» et son cardinal est :

$$|S'_n| = 2^n - n$$

Pour l'union on a d'ailleurs :

— Si  $X \cap Y \neq \emptyset$ ,  $P_X \cup P_Y = P_X \vee P_Y$ , et  $P_X \vee P_Y$  appartient à  $S'_n$ .

— Si  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $P_X \cup P_Y = X/Y$  /singletons.

C'est une partition n'appartenant pas à  $S'_n$ .

Le cosimplexe  $C_n$  est donc obtenu en complétant  $S'_n$  par l'opération  $\vee$  pour toute famille de parties de  $E$  disjointes deux à deux ; une telle famille de  $k$  parties engendre d'ailleurs par  $\vee$  un cosimplexe  $C_k$ , qui est un sous-treillis de  $C_n$  ; ce cosimplexe contient un simplexe  $S_k$  isomorphe à la tribu booléenne de ces  $k$  parties.

En particulier, chacune des partitions « atomiques » du type  $ab/c/d/e/...$  est telle que toutes les partitions moins fines qu'elle, constituent un cosimplexe  $C_{n-1}$ .

Les  $\frac{n(n-1)}{2}$  partitions atomiques constituent d'ailleurs un ensemble générateur de  $C_n$ .

Exemple : construire le diagramme en treillis de  $C_4$ .

1) Tronquer  $S_4$  pour obtenir  $S'_4$  (traits pleins) ; 12 partitions ( $2^4 - 4$ ).

2) Compléter :  $ab/cd$ ,  $ad/bc$ ,  $ac/bd$  (traits pointillés) ; trois simplexes  $S_2$  du type de celui qui est figuré ici :

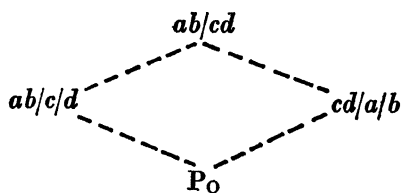


Fig. 19

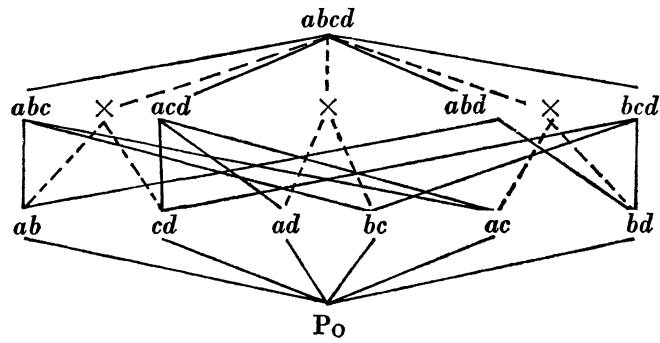


Fig. 20

1  
4 + 3  
6  
1  

---

12 + 3 = 15

On a ainsi un procédé régulier pour engendrer tous les cosimplexes à partir de simplexes. Mais ceci ne doit pas faire illusion sur la simplicité des cosimplexes. Par exemple, le sous-treillis des partitions plus fines qu'une partition  $\Pi = X_1/X_2/\dots/X_k$  donnée est un produit direct de cosimplexes  $C_{X_1} \times C_{X_2} \times \dots \times C_{X_k}$ ; le sous-treillis des partitions moins fines que  $\Pi$  est le cosimplexe  $C_k$  construit sur  $X_1, X_2, \dots, X_k$ .

4) Partitions et partages.

a) Dénombrements classiques.

Pour les cosimplexes, des dénombrements analogues à ceux que l'on fait classiquement sur les simplexes sont possibles. Les « formules » les plus courantes sont établies en exploitant la dualité mise en évidence au § 2 (cf. par exemple, article de G. Kreweras, *M.S.H.* n° 3, cité *supra*), et sont :

	cosimplexe	simplexe
Nombre de partitions en $k$ classes (sommets de niveau $k$ )	$P_{n,k}$	$\binom{n}{k}$
Récurrence (passage de $C_{n-1}$ à $C_n$ )	$P_{n,k} = P_{n-1,k-1} k P_{n-1,k}$	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Nombre total des partitions	$P_n = \sum_k P_{n,k}$	$2^n = \sum_k \binom{n}{k}$
Récurrence	$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} P_i$	$2^n = 2 \times 2^{n-1}$
Nombre de chaînes d'un pôle à l'autre	$\frac{n! (n-1)!}{2^{n-1}}$	$n!$

Le dénombrement des chaînes du treillis des partitions, qui ne semble pas classiquement connu, s'obtient facilement grâce à la remarque faite à la fin du § 3 b). Si  $F_n$  désigne le nombre des chaînes, on a :

$$F_n = \frac{n(n-1)}{2} F_{n-1}$$

D'une façon générale, le nombre de chaînes allant d'une partition en  $k$  classes à la partition la moins fine est :

$$k!(k-1)! \frac{1}{2^{k-1}}$$

Une autre expression non classiquement connue concernant les partitions, et que nous a signalé P. Gordon, est la suivante (sa démonstration est très simple... lorsqu'on la connaît) :

$$P_{n,k} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \frac{i^n}{i!(k-i)!}$$

b) *Types de partitions : partages.*

Le tableau ci-dessus permet de bien voir que dans le cosimplexe les dénombrements ne sont pas si simples que dans le simplexe. En particulier, si dans le diagramme en treillis de  $S_n$ , tous les sommets de niveau  $k$  sont équivalents, il n'en va pas de même, sauf pour le niveau  $(n-1)$  des partitions atomiques, dans  $C_n$  : les partitions de niveau  $k$  (i.e. en  $k$  classes) se classent en *types*, chaque type correspondant à un et un seul *partage* de  $n$ . Par exemple :

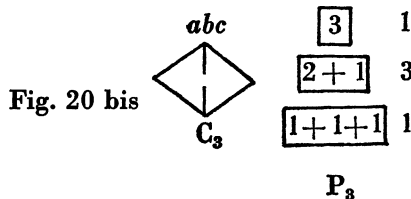
$\Pi = abc/def$  est une partition correspondant au partage  $5 = 3 + 2 + 1$  du nombre 5. Son type est  $(1,2,3)$ .

Les partages d'un entier ont été présentés dans *M.S.H.* n° 17 (G. Th. Guilbaud, «Pour le deux centième anniversaire de la mort de G. W. Leibniz : les partages d'un nombre entier : un problème leibnizien»).

Faire correspondre à chaque élément de  $C_n$  son type, définit une application de l'ensemble des partitions d'un ensemble ayant  $n$  éléments dans l'ensemble des partages de  $n$  ; cette application est un homomorphisme pour la relation de finesse (un partage est plus fin qu'un autre s'il en est déduit par subdivision des parts). On obtient, pour l'ensemble  $p_n$  des partages de  $n$ , une structure ordonnée, quotient de  $C_n$  par la relation d'équivalence «avoir même type que» ; on peut ainsi considérer l'ensemble ordonné des partages de  $n$  comme un «cosimplexe réduit». Le passage de  $C_n$  à  $p_n$  est statistiquement résumé par le dénombrement des partitions d'un type donné ; on sait que pour le partage :

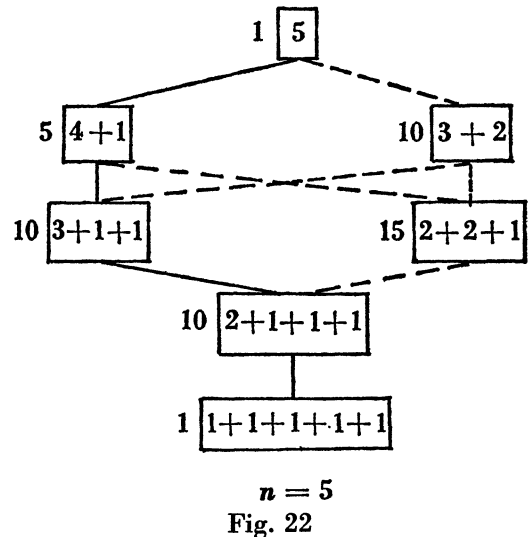
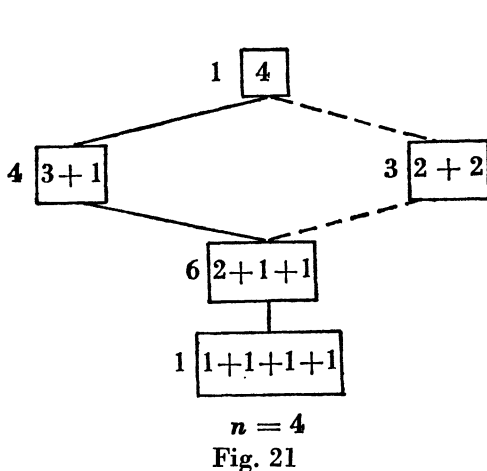
$$n = \sum_{i=1}^n i n_i$$

où  $n_i$  est le nombre des parts ayant  $i$  éléments, ce nombre est :



$$\frac{n!}{\prod (i!)^{n_i} n_i!} = \frac{(\sum i n_i)!}{\prod (i!)^{n_i} n_i!}$$

Les cosimplexes «réduits» sont ainsi, pour les plus petites valeurs de  $n$  :



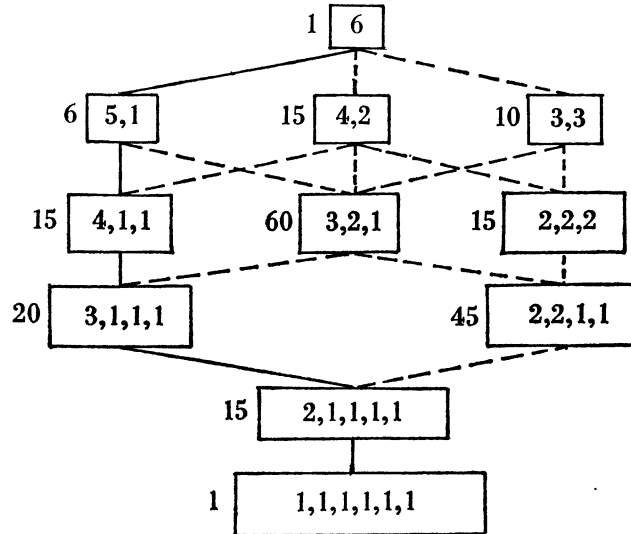


Fig. 23

Les traits pleins figurent la chaîne de  $p_n$  image de  $S'_n$ .

Les traits pointillés figurent les chaînes de  $p_n$  images de celles qui sont obtenues dans  $C_n$  par complétion à partir de  $S'_n$ .

Sur ces diagrammes on peut également indiquer les nombres de partitions voisines d'une partition donnée : combien de sous-partitions obtenues par une seule sub-division, et combien de partitions obtenues en unissant deux classes seulement. Par exemple, pour  $p_6$ , on a le diagramme ci-dessous.

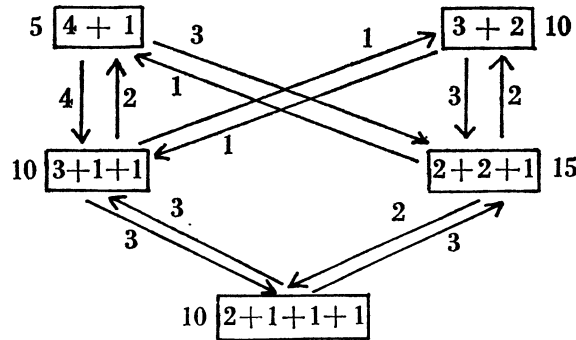


Fig. 24

On remarquera les « équilibres » :

— 5 partitions du type  $(4 + 1)$  contiennent chacune 4 partitions du type  $(3 + 1 + 1)$  ;

— 10 partitions du type  $(3 + 1 + 1)$  sont contenues chacune dans 2 partitions du type  $(4 + 1)$

et l'on a :

$$5 \times 4 = 10 \times 2$$

De même :

$$10 \times 3 = 15 \times 2 \text{ etc.}$$

$$(3 + 2) \quad (2 + 1 + 1)$$

### 5) Représentation géométrique des treillis de partitions.

#### a) Représentation des simplexes.

On connaît la représentation classique des simplexes  $S_n$  dans l'espace affine de dimension  $(n - 1)$ .

C'est ainsi que l'on a pour les premiers simplexes les représentations :

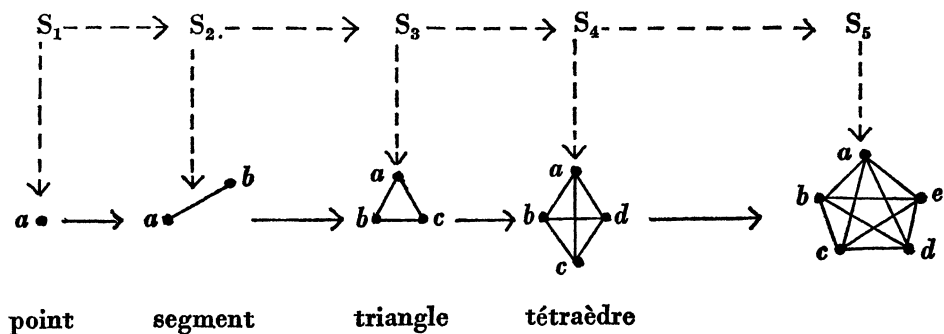


Fig. 25

Dans cette représentation, l'inclusion (entre parties d'un ensemble) a pour image l'incidence (ou relation de bord), les éléments de l'ensemble  $E$  ont pour image les points :  $n$  points qui, pris  $p$  à  $p$ , ne sont pas dans un même hyperplan de dimension  $(p - 2)$ , quel que soit  $p$  ( $2 \leq p \leq n$ ). Chaque partie de  $E$  a pour image la fermeture convexe de l'ensemble des points images des éléments qui la constituent.

b) On passe du simplexe  $S_n$  au cosimplexe  $C_n$  par la suite de transformations :

$$S_n \xrightarrow{\text{«tronquer»}} S'_n \xrightarrow[\text{par V}]{\text{Engendrer}} C_n$$

Pour les représentations géométriques, ceci se traduira par :

1). *tronquer* :  $\emptyset$  et les éléments de  $E$  ( $|E| = n$ )

soient rassemblés en un seul élément de  $S'_n$ . Donc les points, dans la représentation géométrique, deviennent la partie vide du plan ; en ce qui concerne les autres parties de  $E$  dans les diagrammes en treillis, toute partie du niveau  $p$  de  $S_n$  se trouve au niveau  $(p - 1)$  dans  $S'_n$  ; dans la représentation géométrique, les droites deviennent des points, les plans des droites etc.

En bref : on coupe la représentation géométrique de  $S_n$  (espace de dimension  $n - 1$ ) par un hyperplan (dimension  $n - 2$ ) ne passant par aucun des sommets.

Exemple :

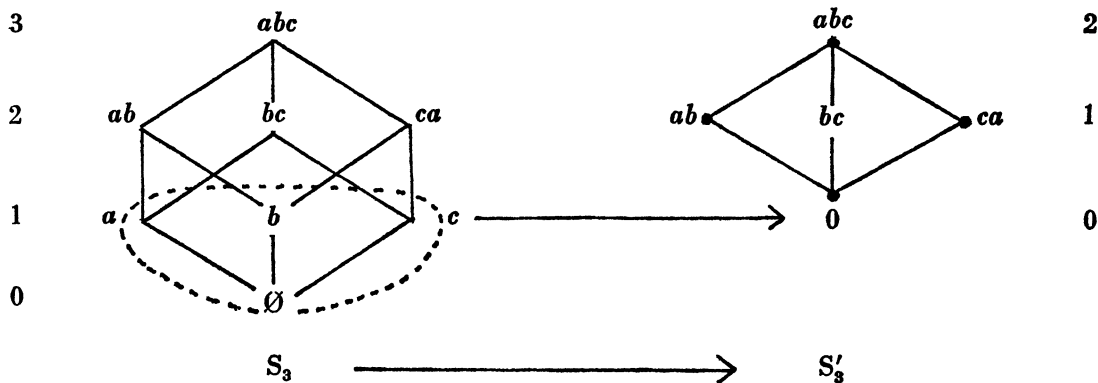


Fig. 26

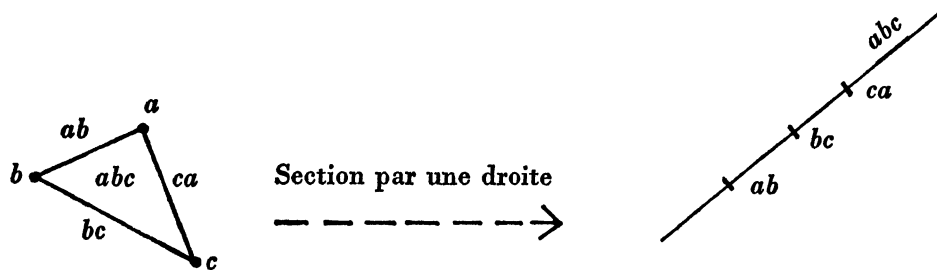


Fig. 27

De même pour le passage de  $S_4$  à  $S'_4$  :

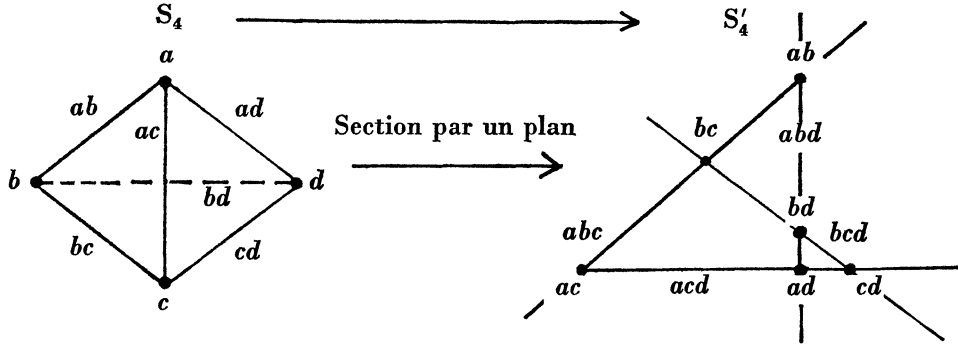


Fig. 28

On obtient un quadrilatère complet : 4 droites (les 4 faces du tétraèdre), 6 points (les 6 arêtes du tétraèdre). Le point «  $ab$  » figure la partition  $\Pi_{ab} = (ab/c/d)$  ; il est la trace de la droite  $ab$  du simplexe par le plan sécant. De même, la droite  $abc$  est la trace du plan  $abc$  du simplexe, et figure la partition  $\Pi_{abc} = abc/d$ . Etc.

2) Compléter par  $\vee$ .

Dans les représentations géométriques des treillis qui admettent une telle représentation, l'opération  $\wedge$  (infimum) a pour image l'intersection ensembliste (le vérifier sur  $S_4$  et  $S'_4$ ) ; l'opération  $\vee$  (supremum) a pour image l'hyperplan engendré par les objets représentant les éléments du treillis dont on prend le supremum : un point et une droite non incidents ont pour supremum le plan qu'ils engendrent ; deux points ont pour  $\vee$  la droite qu'ils engendrent, etc.

Par conséquent, on obtient la représentation géométrique complète du cosimplexe  $C_n$  en « diagonalisant » celle de  $S'_n$ , i.e., en construisant tous les hyperplans engendrés par les éléments de  $S'_n$ . Ainsi, pour  $C_4$  :

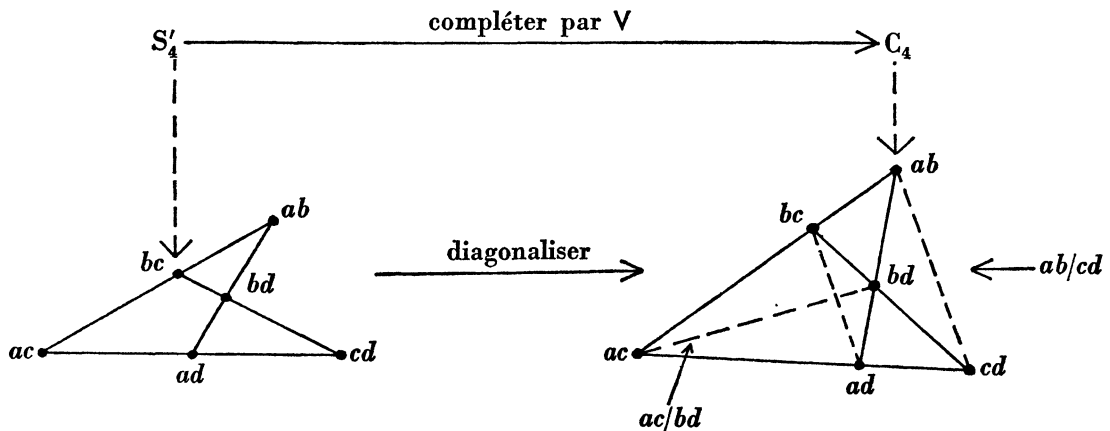
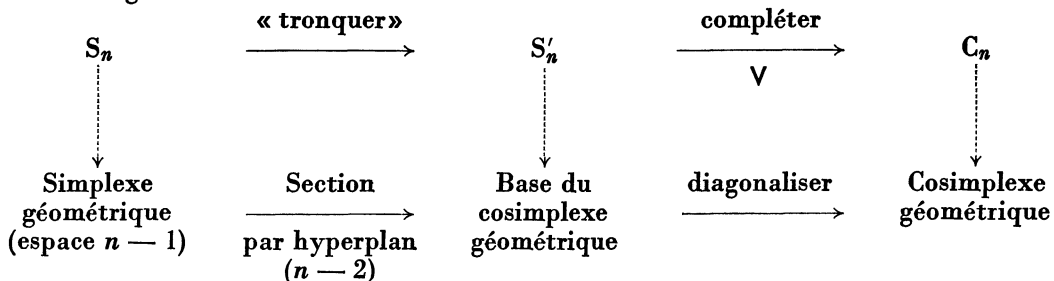


Fig. 29

Les 3 diagonales du quadrilatère représentent les 3 partitions du type  $(2 + 2)$  :

$$ab/cd = \Pi_{ab} \vee \Pi_{cd} \quad (\Pi_{ab} = ab/c/d)$$

Le schéma général est ainsi :



c) Représentation géométrique de  $C_5$ .

Appliquons la méthode pour le cosimplexe des partitions d'un ensemble à 5 éléments ;  $S_5$  a pour représentation le « tétraèdre généralisé » de l'espace de dimension 4 (en projection, un pentagramme).

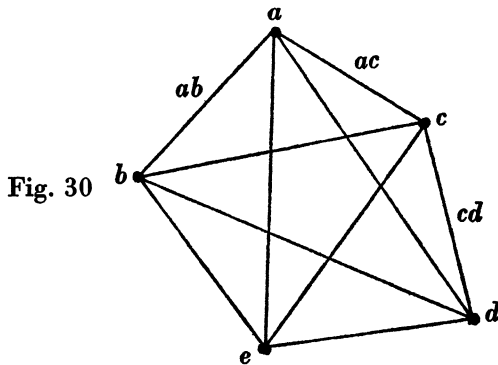


Fig. 30

Sa section par un hyperplan (espace de dimension 3) va donner :

- 10 points (les 10 arêtes) ;
- 10 droites (les 10 faces) ;
- 5 plans (les 5 tétraèdres).

Avec les équilibres voulus :

Dans chaque plan, 4 droites et 6 points (un quadrilatère représentant  $S'_4$ ). Sur chaque droite, 3 points, 2 plans. Par chaque point, 3 droites, 3 plans.

La figure obtenue est bien entendu celle de Desargues : 5 plans de l'espace de dimension 3, avec les 10 sommets et les 10 arêtes qu'ils déterminent.

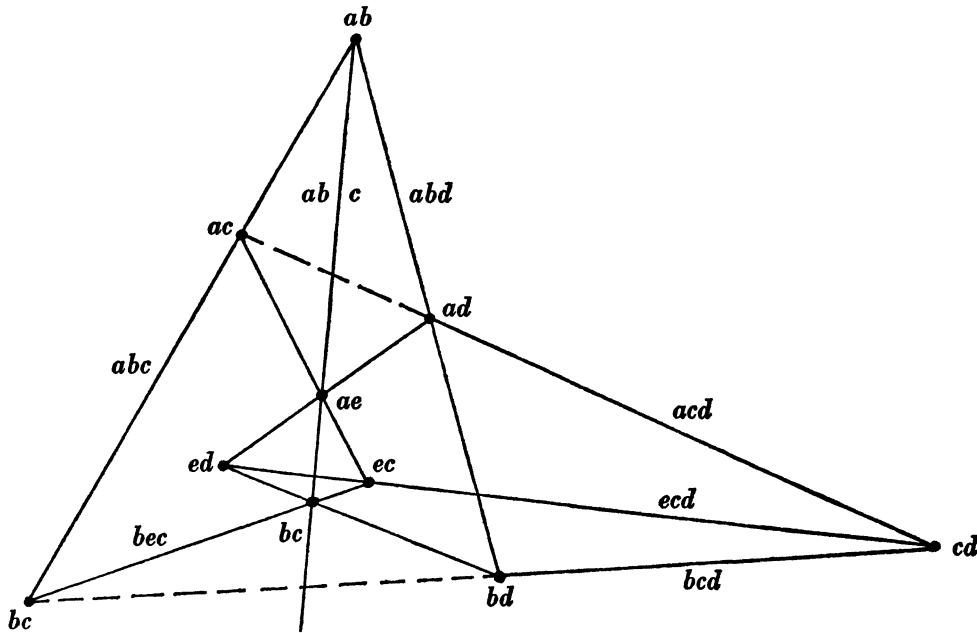


Fig. 31

Lorsqu'on « diagonalise », on obtient en outre :

— les 15 droites joignant les sommets de  $S'_5$  deux à deux, la droite  $ab-cd$  figurant par exemple la partition :

$$\Pi_{ab} \vee \Pi_{cd} = ab/cd/e \quad \text{de type } (2,2,1)$$

— les 10 plans déterminés par chaque sommet et « l'axe d'homologie » associé. Le plan  $ab-ecd$  figurant par exemple la partition :

$$\Pi_{ab} \vee \Pi_{ecd} = ab/ecd \quad \text{de type } (3,2)$$



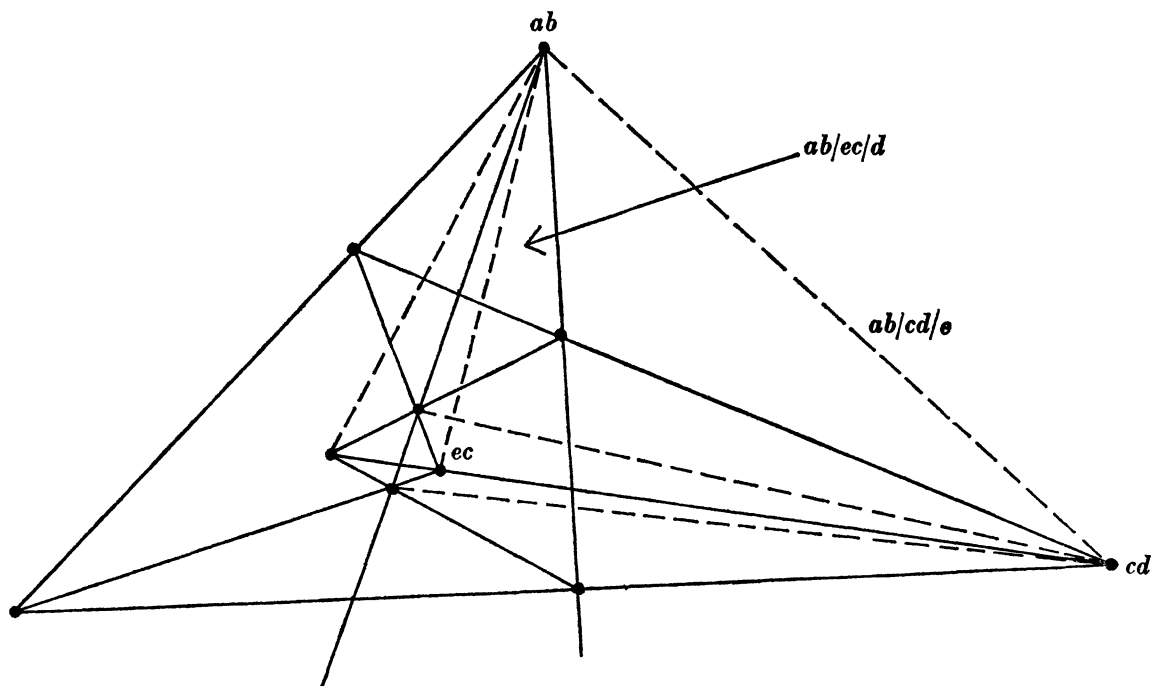


Fig. 32

N.B. — Cette figure (Desargues) se trouve aussi sur la couverture de la revue ; à son sujet, cf. *M.S.H.* n° 8, p. 38; n° 9, p. 39; n° 10, p. 72 et n° 11, p. 23).

6) Deuxième construction de la base de  $C_n$ , et de sa représentation géométrique.

La base  $S'_n$  du cosimplexe  $C_n$  a été obtenue, dans sa représentation géométrique, en coupant  $S_n$  par un hyperplan ; comme le simplexe  $S_{n-1}$  est situé, comme  $C_n$ , dans un espace de dimension  $(n - 2)$ , il est en principe possible de passer directement de  $S_{n-1}$  à  $S'_n$  sans changer d'espace, de façon à rendre commutatif le diagramme :

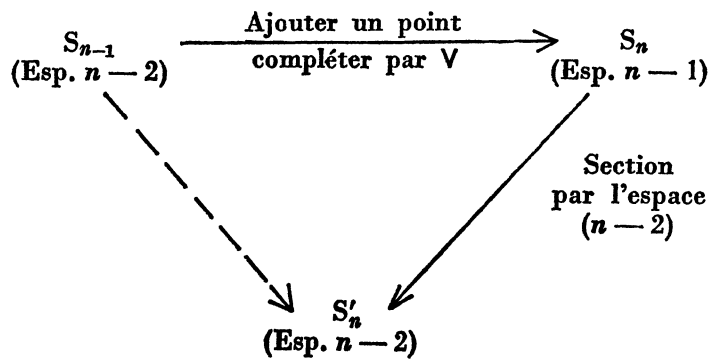


Fig. 32 bis

Or ce passage direct de  $S_{n-1}$  à  $S'_n$  se fait très simplement ; cette fois-ci on ne « tronque » plus, mais on procède par adjonction. Le procédé est indiqué brièvement ; et ce qui est dit ici ne fait que traduire en langage géométrique ce que G. Th. Guilbaud développe par ailleurs en langage algébrique (« Les partitions et la notation simpliciale », *M.S.H.* n° 22, p. 27).

Les partitions  $P_X$  ( $P_X = X/1/1/1 \dots$ ), appartenant à la base, de  $E = \{ 1, 2, \dots, n \}$  peuvent se diviser en deux classes selon que  $n \in P_X$ , ou  $n \notin P_X$ .

Si  $P_X$  et  $P_Y$  sont de la première classe, il en est de même de  $P_X \cap P_Y = P_X \wedge P_Y$ , et de  $P_X \cup P_Y = P_X \vee P_Y$  ( $X \cap Y$  est sûrement non vide). La première classe est donc isomorphe à  $S_{n-1}$ , treillis des parties de  $E - \{ n \}$ .

Quant aux partitions de la seconde classe elles s'obtiennent toutes par intersection de l'ensemble  $E - \{ n \}$  avec chacune de celles de la première classe.

D'où le procédé de passage  $S_{n-1} \rightarrow S'_n$  : ajouter un hyperplan représentant  $E - \{n\}$ , prendre ses  $\Lambda$  avec tous les éléments de  $S_{n-1}$ .

Détaillons pour le passage de  $S_3$  à  $C_4$  :

1) Sur les diagrammes en treillis :  $E = \{a, b, c, d\}$

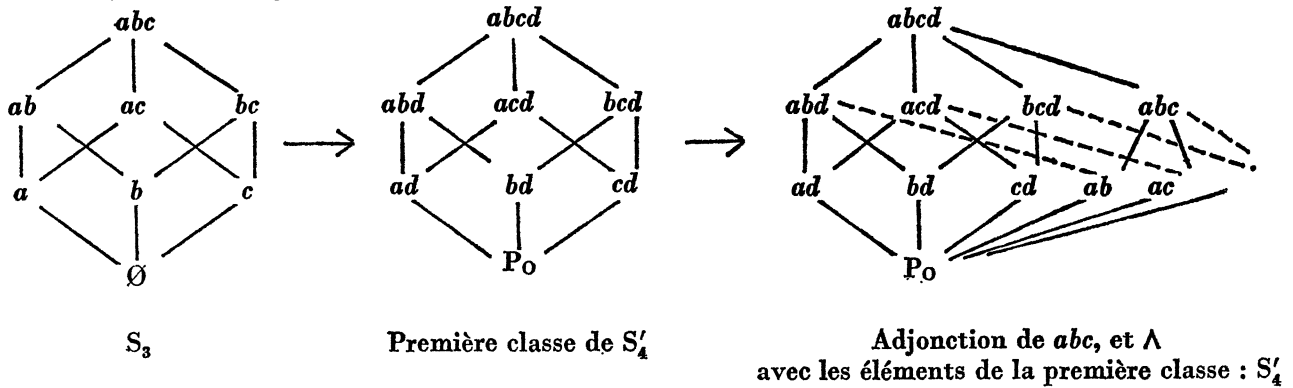


Fig. 33

2) Représentation géométrique :

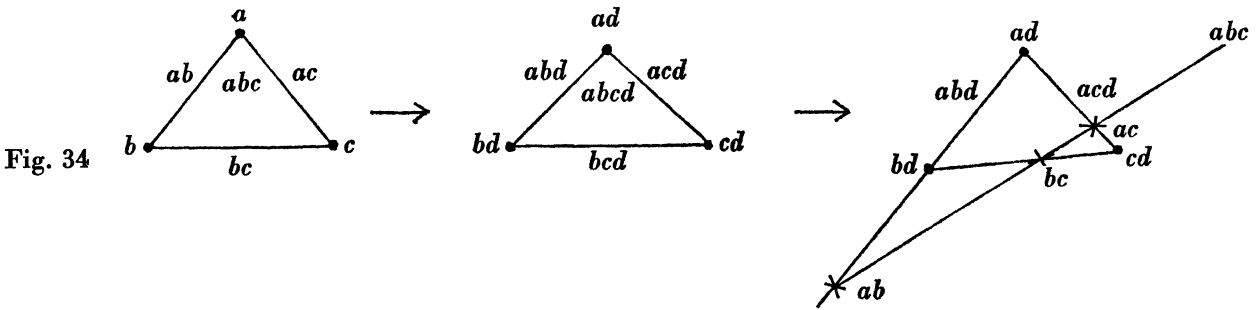


Fig. 34

De même, on passe du tétraèdre  $S_4$  à  $S'_5$  en ajoutant un cinquième plan et en prenant toutes ses intersections avec les 4 faces et les 6 arêtes du tétraèdre. On a ainsi la configuration de Desargues, base  $S'_5$  de  $C_5$ .

7) *Dualité des cosimplexes et les cosimplexes comme géométries affines.*

B. Monjardet expose par ailleurs dans ce numéro les axiomes des géométries vectorielles, projectives et affines finies, et les rapports qu'elles soutiennent entre elles. Tout simplexe est trivialement une géométrie projective finie. Les premiers cosimplexes peuvent être considérés comme des géométries affines. Ainsi  $C_4$  est une géométrie *plane* ayant 6 points et 7 droites, dont un faisceau de trois parallèles (les 3 diagonales du quadrilatère) ; on peut d'ailleurs aussi bien la représenter par dualité selon la géométrie ayant non plus des droites parallèles mais des «points parallèles» : couples de points ne déterminant pas de droite. Cette représentation duale (ne pas confondre cette dualité géométrique avec celle du § 2) fournit la figure ci-après.

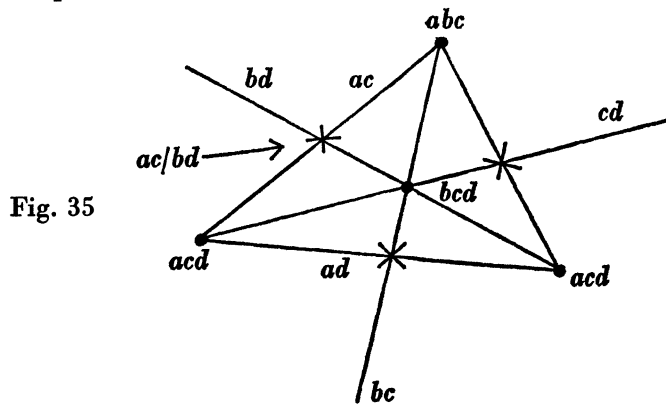


Fig. 35

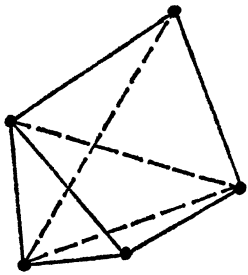


Fig. 36

De même  $C_5$  est une géométrie affine de dimension 3 : il y a des plans parallèles (sans points communs) et des droites parallèles (coplanaires et sans points communs), et le parallélisme y est bien une relation d'équivalence entre plans (ou droites) ; mais deux points déterminent toujours une droite ; 3 points non alignés, toujours un plan, etc. La géométrie duale fournit ici, pour la base  $S'_5$ , la configuration duale de celle de Desargues : 5 points, 10 droites, 10 plans ; par chaque point passent 4 droites et 6 plans, etc. Mais à partir de  $n = 6$ ,  $C_n$  n'est plus une géométrie affine, ni même partielle : le « parallélisme » n'y est en effet plus une relation d'équivalence.

La note de B. Monjardet qui suit cet article donne un système d'axiomes pour cette « géométrie ».

*Exercice* : Soit  $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ . Construire 3 partitions  $\alpha = A/E-A$ ,  $\beta = B/E-B$ ,  $\gamma = C/E-C$  de  $E$  (dont toutes les classes aient au moins 2 éléments) telles que  $\alpha \wedge \beta$  ne soit pas une sous-partition de  $(\alpha \wedge \beta) \vee (\beta \wedge \gamma)$ .

Sur les représentations duales, le passage (vu au § 6) de  $S_{n-1}$  à  $S'_n$  est immédiat : on ajoute un point à  $S_{n-1}$  (qui est ipso-duale), on prend le  $\vee$  de ce point avec tous les éléments de  $S_{n-1}$ . On a ainsi  $S'_n$  ; on passe ensuite à  $C_n$  en prenant les  $\wedge$  des éléments ainsi obtenus avec  $S_{n-1}$ .

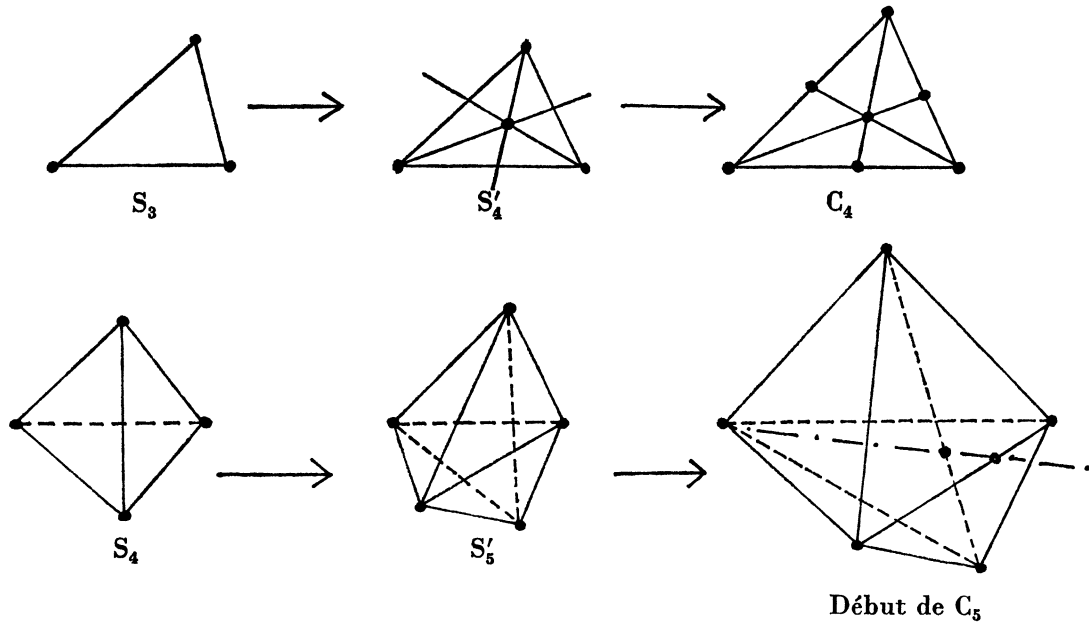


Fig. 37

Les représentations géométriques des cosimplices ne semblent pas pouvoir être obtenues, à partir de la géométrie projective non triviale de même rang sur le corps 2, par un procédé standard, tel que par exemple celui qui sert à passer de la géométrie projective à une géométrie affine : ôter de la G.P. un hyperplan et tous les éléments inclus dans cet hyperplan (son bord) ; ou, dualement, un point et son co-bord. Nous avons vu comment les obtenir à partir des géométries simpliciales  $S_n$ . On sait passer de façon immédiate de  $S_n$  à la G.P. non triviale de même rang sur le corps 2 et inversement. Resterait à savoir passer directement de  $GP_n$  à  $C_n$ .

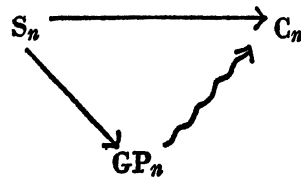


Fig. 38

(A suivre : métriques de la classification.)