MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Les partitions et la notation simpliciale

Mathématiques et sciences humaines, tome 22 (1968), p. 27-31

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__22__27_0>

M.S.H. (6e année, n° 22, 1968, p. 27-31)

LES PARTITIONS ET LA NOTATION SIMPLICIALE

par

G. Th. GUILBAUD

Un ensemble de $n + 1$ éléments :

$$E = /0, 1, 2, ..., i, ..., n/ ;$$

les partitions de E ; leur catalogue commence ainsi :

1) La partition la plus fine : /0/, /1/, ..., /n/ qu'on nommera Ø ;

2) Celles qui viennent immédiatement après (en finesse) :

/01/, /2/, ... /n/.	/12/, /0/, /3/, ..., /n/.
/02/, /1/, ... /n/.	/13/, /0/, /2/, ..., /n/.
... ...	... ...
/0i/, etc.	/ij/, etc.

Notation proposée (en style simplicial) :

/0i/, etc. sera notée : /i/

/ij/, etc. sera notée : /ij/

On se propose donc d'associer à toute partition une étiquette ou matricule emprunté à l'ensemble des parties de $F = /1, 2, ..., i, ... n/ = E - /0/$

Mais on veut que cette notation fasse apparaître nettement la structure de l'ensemble des partitions de E : d'abord la relation de finesse, qui organise cet ensemble en treillis. On sait en effet que pour deux partitions P et Q du même ensemble E on peut définir :

— $P \wedge Q$ = la moins fine de toutes celles qui sont à la fois plus fine que P et plus fine que Q.

— $P \vee Q$ = la plus fine de celles qui sont moins fines.

On rappelle comment on *calcule* ces opérations :

Dans une partition P, par exemple :

$$/1\ 2\ 3/,\ /4\ 5/,\ /6/,\ /7\ 8\ 9/$$

on dira que 1 et 2 sont *liés*, comme 1 et 3, ou 7 et 8, etc. tandis que 1 et 4 sont *séparés*.

Alors on peut dire que :

— deux éléments sont liés dans $P \wedge Q$ s'ils sont liés dans P *et* liés dans Q ;

— deux éléments sont séparés dans $P \wedge Q$, s'ils sont séparés soit dans P, soit dans Q, soit dans les deux (on dira parfois : séparés dans P *ou* dans Q, en prenant le *ou* non exclusif). Et les énoncés analogues pour $P \vee Q$.

Pour les partitions déjà nommées (c'est-à-dire dont toutes les classes contiennent un seul élément, sauf une qui en contient deux) les opérations sont faciles :

$P = /o\ i/$, etc. $\qquad R = /i\ j/$, etc.
$Q = /o\ j/$, etc. $\qquad S = /j\ k/$, etc.
$\qquad\qquad\qquad\qquad T = /k\ l/$, etc.

$P \wedge Q = Q \wedge R = \emptyset$
$P \vee Q = /o\ i\ j/$, etc. $= P \vee R = Q \vee R$
$P \vee S = /o\ i/, /j\ k/$, etc.
$S \vee T = /j\ k\ l/$, etc.
$R \vee T = /i\ j/, /k\ l/$, etc.

(L'écriture : etc., remplace partout des classes à un élément, singletons comme on dit.)

On voit donc qu'on obtient deux sortes de partitions pour le second degré de finesse :

— les partitions qui ont un brelan (ou triplet) ;
— celles qui ont deux paires.

Il s'agit de choisir une étiquette pour chacune d'elles. En commençant par celles qui ont deux paires on voit que la notation simpliciale (c'est-à-dire une « combinaison » comme on disait autrefois, des chiffres 1, 2, ..., i, j, ...) ne peut suffire.

On verra facilement aussi que l'opération $\vee$ ne peut correspondre à l'union (au sens ensembliste, ou booléen).

On propose alors de tenir compte de la structure vectorielle des combinaisons : une partie quelconque de l'ensemble F, par exemple (1 3 4) peut être représenté par un vecteur dont la composante soit des zéros ou des uns, ici : (1 0 1 1 0 0 0 ...). Dans le corps à deux éléments 0 et 1 (avec $1 + 1 = 0$) on a un vectoriel dont le zéro correspond à la partie vide. La loi d'addition se manipule facilement :

$$(1\ 3\ 4) + (2\ 3\ 5) = (1\ 2\ 4\ 5)$$

il suffit de supprimer tout élément répété deux fois (cf. l'algèbre de Bord, et les anneaux booléens).

Ceci posé voici le catalogue des sous-vectoriels du vectoriel construit à partir de F :

— d'abord le zéro pris tout seul ;

— ensuite un élément quelconque (i) par exemple, engendre le sous-vectoriel constitué par i et par zéro. On le notera $(\emptyset, i)$ ou même simplement (i) — puisqu'on est sûr que tout sous-vectoriel doit comporter le zéro parmi les éléments. On a donc tous les sous-vectoriels de rang 1 : (i), ($i\ j$) etc.

Il y en a $2^n - 1$.

Si l'on voulait utiliser ici le langage projectif, on pourrait, selon la coutume, appeler « points » les sous-vectoriels du premier rang.

Prenons maintenant deux tels sous-vectoriels :

(i) et (j) par exemple.

Leur somme directe est le sous-vectoriel :

$$(i, j, i\ j)$$

on vérifie en effet que la somme de deux éléments de cet ensemble, fait encore partie de l'ensemble :

$$i + j = i\ j \qquad i + i\ j = j \qquad j + i\ j = i$$

De même la somme de (i) et ($j\ k$) s'écrit :

$$(i, j\ k, i\ j\ k)$$

On appelle, selon les conventions usuelles, somme (directe, ajoute-t-on si c'est utile) de deux sous-vectoriels l'ensemble de toutes les sommes d'un vecteur de l'un et d'un vecteur de l'autre.

Observons alors qu'on peut proposer la règle suivante : donner pour étiquette à P ∨ Q l'indication du vectoriel somme des étiquettes de P et de Q.

P = /*o j*/, etc. a pour étiquette (*i*)
Q = /*o j*/, etc. a pour étiquette (*j*)
P ∨ Q = /*o i j*/, etc. aura pour étiquette (*i*, *j*, *i j*)
R = /*i j*/, etc. a pour étiquette (*i j*)
P ∨ R = /*o i j*/, etc. a bien l'étiquette qu'il faut (*i*, *j*, *i j*)
S = /*j k*/, etc. : (*j k*)
P ∨ S = /*o i*/, /*j k*/, etc. aura pour étiquette (*i*, *j k*, *i j k*)

Montrons tout de suite sur le cas des petits nombres, ce que donnent nos conventions.

$\boxed{1)\quad n = 3}$

E = /0, 1, 2, 3/ F = /1, 2, 3/

Les vectoriels : rang 1 : il y en a sept :

(1) (2) (3)
(12) (13) (23)
(123)

(en omettant le zéro comme convenu)

rang 2 : il y en a sept aussi
trois tels que : (1, 2, 12)
trois tels que : (1, 23, 123)
un seul du type : (12, 23, 13)
et enfin le vectoriel du rang 3 qui comprend les huit vecteurs.

Les partitions et leurs étiquettes :

1er degré de finesse :	/01/, etc. : (1)	/12/, etc. : (12)
	/02/, etc. : (2)	/13/, etc. : (13)
	/03/, etc. : (3)	/23/, etc. : (23)

N.B. — Le septième vectoriel du premier rang n'est pas employé comme étiquette.

2e degré de finesse :	/012/, /3/ : (1, 2, 12)	/12/, /03/ : (12, 3, 123)
	/013/, /2/ : (1, 3, 13)	/13/, /02/ : (13, 2, 123)
	/023/, /1/ : (2, 3, 23)	/23/, /01/ : (1, 23, 123)
	/123/, /0/ : (12, 13, 23)	

pour le 3e et dernier degré de finesse :

à savoir la partition : /0 1 2 3/,

l'étiquette sera le vectoriel total :

(1, 2, 3, 12, 13, 23, 123).

Par construction, pour effectuer l'opération P ∨ Q il suffit de faire la somme des étiquettes.

Examinons maintenant l'opération contraire : P ∧ Q.

On vérifiera sans peine qu'on doit faire l'intersection (au sens ensembliste : partie commune) des deux étiquettes, *sauf* dans les cas tels que :

/12/, /03/ ∧ /13/, /02/ = /0/, /1/, /2/, /3/

pour lequel en calculant avec les étiquettes on a :

$$(12, 3, 123) \quad \wedge \quad (13, 2, 123) = (123)$$

mais c'est justement là l'indicatif du vectoriel qui n'a pas été utilisé comme étiquette.

On devra donc, si l'on veut remplacer la manipulation combinatoire des partitions par un *calcul* (additions et intersections) sur les étiquettes, convenir que la partition la plus fine est désignée par la partie vide Ø (ou zéro vectoriel) mais que, lors de l'interprétation du résultat d'un calcul, la partie pleine (123) signifie aussi cette même partition la plus fine.

$\boxed{2) \quad n = 4}$

$$F = /1, 2, 3, 4/$$

Le vectoriel construit sur F comporte seize vecteurs (dont un zéro correspondant à la partie vide).

Il y a quinze sous-vectoriels au premier rang : chacun comprenant le zéro et un vecteur non nul.

Il y a trente-cinq sous-vectoriels au deuxième rang (chacun comprend quatre vecteurs dont le zéro).

et quinze au troisième rang (avec huit vecteurs chacun).

Dans l'étiquetage on n'utilise pas tous ces vectoriels.

1er degré de finesse :	/01/, etc. : (1)	/12/, etc. : (12)	/23/, etc. : (23)
	/02/, etc. : (2)	/13/, etc. :	/24/, etc. : (24)
	/03/, etc. : (3)	/14/, etc. :	/34/, etc. : (34)
	/04/, etc. : (4)		

dix vectoriels sur quinze servent d'étiquette.

2e degré de finesse : il y en a dix avec brelan

/0 1 2/, etc. : (1, 2, 12)

...

/1 2 3/, etc. : (12, 13, 23)

...

et quinze avec deux paires :

/01/, /23/, /4/ : (1, 23, 123)

/12, /34, /04/ : (12, 34, 1234)

vingt-cinq vectoriels sur tentre-cinq sont utilisés.

3e degré de finesse : /0 1 2 3/, /4/ : (1, 2, 3, 12, 13, 23, 123)

/1 2 3 4/, /0/ : (12, 13, 14, 23, 24, 34, 1234)

(cinq cas)

/012/, /34/ : (1, 2, 12, 34, 134, 234, 1234)

/123/, /04/ : (4, 12, 13, 23)

(dix cas).

Pour ce qui est de l'opération P V Q la traduction est fidèle, par construction. Reste à interpréter ce qui se passe quand on pratique sur les étiquettes l'opération d'intersection.

Deux résultats sont possibles :

1) l'intersection des deux étiquettes donne une étiquette,
2) l'intersection donne un vectoriel qui n'a pas été employé comme étiquette.

Exemples :

$$(12, 13, 23) \quad \wedge \quad (1, 2, 12) = (12)$$

traduit correctement :

$$/1\ 2\ 3/, \text{etc.} \wedge . /0\ 1\ 2/, \text{etc.} = /0/, /12/, /3/, \text{etc.}$$

Par contre :

$$(1, 23, 123) \quad \wedge \quad (2, 13, 123) = (123)$$

alors que :

$$/01/, /23/, /4/ . \wedge . /02/, /13/, /4/ = /0/, /1/, /2/, /3/, /4/.$$

Il faut donc être attentif aux vectoriels qui ne sont pas étiquettes.

Les vectoriels qui ne sont pas utilisés comme étiquette :

Rang 1 : il y en a cinq

(123) (124) (134) (234) et (1234)

Rang 2 : il y en a dix.

quatre du genre : (1, 234, 1234)
et six du genre : (12, 234, 134).

Bien entendu, si l'on combine ces vectoriels par addition et intersection, de toutes les façons possibles, on obtient un treillis lequel contiendra, outre les précédents, les deux extrêmes, à savoir le zéro (au rang 0) et le vectoriel total (au rang 4).