Mathématiques et sciences humaines

Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 57-58

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__57_0>

PROBLÈMES D'ENSEIGNEMENT

LIBRE OPINION, CORRESPONDANCE :

SIMPLEXES ET ALGÈBRES DE BOOLE

par

C. FLAMENT

Ainsi les étudiants en psychologie et sociologie de la nouvelle vague connaîtront les rudiments des mathématiques modernes. Ils les étudieront notamment dans le remarquable petit livre de Barbut [1]. Une décision terminologique de Barbut m'a cependant inquiété.

Le *simplexe* construit sur un ensemble fini E est l'ensemble P(E) des parties de E *organisé par inclusion* (p. 77). A partir de l'inclusion entre les parties de E, on définit les opérations d'union et d'intersection sur P(E) (p. 108 et suiv.), et l'on est ainsi conduit à considérer *l'algèbre des parties de E* (p. 124).

Simplexe de E et algèbre de P(E) sont étroitement liés ; et le psychologue ou le sociologue, rencontrant dans son travail propre, un ensemble E dont il doit étudier les parties, est normalement amené à passer continuellement de la combinatoire simpliciale à l'algèbre des parties. — D'où, tout une gamme d'expressions, allant de la phrase, fort correcte, de Barbut (p. 111) : « l'intersection et l'union de deux parties se lisent aisément sur le diagramme en treillis du simplexe » — aux abus de langage caractérisés, évoquant : « l'algèbre du simplexe »... Ces abus de langage ne me semblent pas répréhensibles, pour peu que leur auteur connaisse, distingue et relie la structure relationnelle et la structure algébrique du treillis simplicial ; ils correspondent à la nécessité de parler une pratique, et les refuser serait jouer les Le Bidois tentant d'imposer une langue morte...

Pour bien distinguer (et mieux relier) structure relationnelle et structure algébrique sur P(E), Barbut (p. 124) oppose simplexe sur E, et « algèbre des parties de E, *ou* algèbre de Boole construite sur E ». Cette expression me paraît dangereuse : elle s'appuie, certes, sur une propriété mathématique profonde, mais masque les différences essentielles entre deux pratiques importantes pour les utilisateurs (psychologues, sociologues, logiciens, électroniciens, informaticiens...). Nos étudiants risquent fort d'identifier, de façon quasi-définitive, algèbre de Boole et algèbre des parties d'un ensemble. Il y a isomorphisme — mais isomorphisme ne veut pas dire identité.

Sur un ensemble E, on peut construire une algèbre de Boole *qui n'est pas* l'algèbre des parties de E. On se donne trois opérations : $\vee$(supérieure), $\wedge$(inférieure, et $'$(conjugaison), ayant les propriétés de l'union, l'intersection et la complémentation ; des symboles de ponctuation (parenthèses) ; et des règles d'écriture :

— Tout élément de E est une e.b.f. (expression bien formée) ;
— Si a et b sont des e.b.f., alors : $(a \vee b)$, $(a \wedge b)$, (a') sont des e.b.f.

A l'aide des propriétés des opérations, on montre des identités entre e.b.f. ; par exemple :

$$(a \wedge b)' = ((a') \vee (b')) \qquad \text{(loi de Morgan)}$$

L'ensemble des e.b.f. étant ainsi divisé en classes, l'ensemble de ces classes constitue *l'algèbre de Boole libre* ayant pour générateurs les éléments de E. Si, de plus (et moyennant quelque prudence) nous décrétons certaines égalités entre expressions normalement non identiques, nous obtenons une algèbre de Boole liée.

---

1 Barbut M., Mathématiques des Sciences humaines, Paris, P.U.F., 1967.

Certes, pour toute algèbre de Boole finie, définie comme on vient de le faire, il existe un ensemble F tel que cette algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre des parties de F. (Cette proposition facile à établir dans le cas fini, est un cas particulier du célèbre théorème établi par Stone dans le cas général.)

Supposons maintenant un utilisateur, connaissant bien l'algèbre des parties (c'est-à-dire : familiarisé avec les *algorithmes de calcul*, et non seulement avec la théorie générale), connaissant le théorème de Stone, et affronté à une algèbre de Boole comme on l'a définie. Saura-t-il *calculer* dans cette algèbre ? L'expérience répond par la négative ! Même, l'utilisateur semble perdre un peu la tête, risquant de confondre l'algèbre de Boole d'ensemble générateur E et l'algèbre des parties de E. On peut l'aider (un peu) en lui faisant remarquer que l'algèbre de Boole libre d'ensemble générateur E est isomorphe, dans une correspondance naturelle, à l'algèbre des parties de F = P(E). Cela est un peu plus difficile s'il s'agit d'une algèbre liée. Et si, comme cela arrive, par exemple, en analyse algébrique de questionnaires, on doit, travailler simultanément sur l'algèbre de Boole libre d'ensemble générateur E et une algèbre de Boole liée d'ensemble générateur E et l'algèbre des parties de E — alors l'utilisateur en perd son latin (une autre langue morte).

Mais pourquoi l'utilisateur s'obstinerait à utiliser une algèbre de Boole telle qu'on l'a définie ? Parce qu'algèbre de Boole (libre ou liée) d'ensemble générateur E, et algèbre des parties de F, sont deux langages profondément distincts, quoique isomorphes (c'est-à-dire : il s'agit de deux réalisations distinctes d'une même structure mathématique abstraite).

L'algèbre des parties sert principalement à l'utilisateur comme une *algèbre en extension :* les parties se définissent par l'énumération de leurs éléments. L'algèbre de Boole qu'on a définie, ou *l'algèbre des classes*, servira principalement comme *algèbre en compréhension :* l'ensemble générateur E est un système classificatoire ; un générateur a désigné la classe de cas ayant la propriété a ; a' désigne la classe, complémentaire, des cas où a n'est pas vérifié ; (a∧b) est la classe des cas où a et b sont vérifiés à la fois ; etc. On ne s'intéresse pas aux composants des classes, mais à leurs traits définitoires ; dans cette perspective, le passage d'une algèbre libre à une algèbre liée permettra d'exprimer qu'une classe, qui pourrait ne pas être vide, est en fait vide, comme l'affirme l'observation faite par l'utilisateur : cette vacuité de fait se traduira par une liaison entre facteurs classificatoires, ce qui est un type de résultat essentiellement recherché dans nos disciplines.

Il s'agit donc de deux préoccupations distinctes de recherche : en extension et en compréhension — la seconde étant sans doute plus fondamentale. Nos étudiants risquent de privilégier la première, par suite d'un enseignement qui suggère une assimilation trop brutale entre « algèbre du simplexe » et algèbre de Boole.

COMMENTAIRES (M. Barbut).

Les critiques que notre ami C. Flament a bien voulu nous communiquer sur mon cours de première année du premier cycle de Sciences humaines sont les bienvenues et fort pertinentes dans leur ensemble. J'en ajoute une autre qui me semble encore plus fondamentale, compte tenu du public visé : en vue de l'introduction du calcul des probabilités et des tribus, il aurait peut-être été préférable de montrer d'emblée aux étudiants que l'on peut construire des algèbres de Boole à partir d'une partition d'un ensemble E, les classes de cette partition servant d'atomes (c'est alors construire l'algèbre de Boole des parties de l'ensemble quotient de E par la partition).

Ceci dit, le parti que j'ai pris résulte des limites étroites que m'imposaient le programme, le temps dont on dispose pour l'enseigner (2 heures par semaine pendant 23 semaines), et le format du manuel (200 à 250 pages maximum). J'ai choisi, provisoirement, de sacrifier les algèbres de Boole à l'introduction de structures plus fondamentales : algèbre linéaire par exemple. Je n'ai donc pas traité des algèbres de Boole, mais j'ai seulement voulu montrer comment un même objet abstrait (simplexe) était susceptible de plusieurs présentations, chacune adaptée aux problèmes posés : la présentation relationnelle adaptée aux questions de dénombrement, la présentation algébrique à celles de calcul.

Mais cette option est révisable, et sera révisée, ne serait-ce que parce que l'arrivée en faculté d'étudiants mieux formés au lycée nous libérera de l'enseignement de certains rudiments qui prennent beaucoup de temps.

La note de Claude Flament mérite une réponse sur le fond du problème qu'il soulève : comment introduire les algèbres de Boole dans l'enseignement élémentaire des Facultés des Lettres.

Nous y reviendrons dans un numéro ultérieur.