MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. MONJARDET

III. Géométries planes finies. Combinatoire et structures algébriques

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 39-51

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__39_0>

III GÉOMÉTRIES PLANES FINIES

COMBINATOIRE ET STRUCTURES ALGÈBRIQUES

par

B. MONJARDET

INTRODUCTION.

La géométrie est l'une des plus anciennes « disciplines» mathématiques. Elaborée initialement à partir de l'intuition sensible de phénomènes spatiaux, elle a été une première fois systématisée par les mathématiciens grecs ; plus tard la géométrie analytique est une première tentative d'algébrisation ; mais le conflit qui s'élève entre « géométrie pure» et géométrie analytique n'est pas toujours à l'avantage de cette dernière. En fait, il faut attendre les développements modernes des mathématiques pour que la géométrie soit complètement axiomatisée et algébrisée. C'est Hilbert qui présente une axiomatique de la géométrie traditionnelle basée sur vingt-et-un axiomes, répartis en classes : axiomes d'incidence, de congruence, d'ordre, de continuité. Si l'on ne retient que les axiomes d'incidence, on obtient d'autres structures également appelées géométries ; l'étude de ces structures d'incidence en particulier dans le cas fini a été développée depuis une cinquantaine d'années, le problème fondamental étant alors de les rattacher à une structure algébrique. Pour la géométrie traditionnelle cette structure est celle du corps ordonné des nombres réels. Pour les géométries planes finies, l'algébrisation va conduire à une structure dite d' « anneau ternaire» dont les structures de corps fini, de quasi-corps ou de presque-corps peuvent être considérées comme des cas particuliers ; on verra que la caractérisation des géométries construites à partir d'un corps fait apparaître le rôle fondamental du théorème de Desargues.

1. — DÉFINITIONS — GÉOMÉTRIES PLANES PROJECTIVES ET AFFINES.

1.1. — *Géométrie plane projective.*

Soit G = (P, D, I) un triplet composé de deux ensembles P, D et d'une relation I entre P et D ; G est une géométrie plane projective si certains axiomes sont vérifiés : les éléments de P (respectivement D) s'appellent alors les points (respectivement droites) de la géométrie ; la relation I est la relation d'incidence entre points et droites.

Les axiomes sont les suivants :

A_1 — Deux points sont incidents à une et une seule droite.

A_2 — Deux droites distinctes sont incidentes à un et un seul point.

A_3 — Il existe au moins quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas incidents à une même droite.

Remarques :

1. Seuls les deux premiers axiomes sont fondamentaux. Le troisième a pour but d'éliminer les géométries « triviales» telles que :

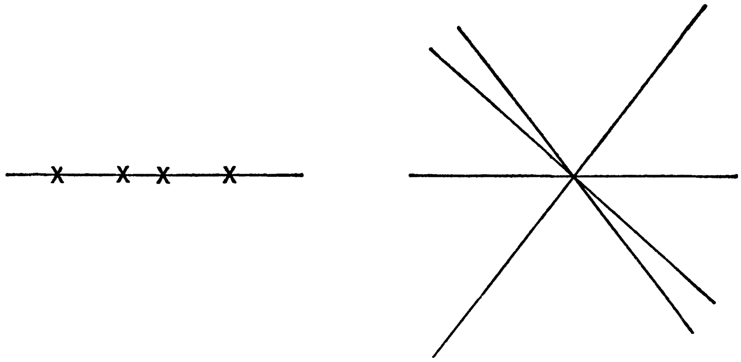


Fig. 1

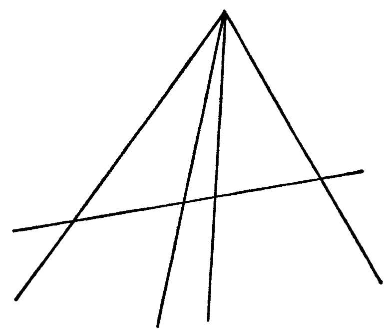


Fig. 1 bis

2. L'axiomatique ci-dessus n'est pas minimale. Par exemple, on peut remplacer A_1 par A'_1: deux points distincts sont incidents à une droite au moins. D'autre part, il existe d'autres axiomatiques équivalentes à celle-ci.

3. Soit 2^P l'ensemble des parties de P ; à toute droite d de D faisons correspondre l'ensemble des points p incidents à d : on définit ainsi une application de D dans 2^P

$$d \rightarrow \{ p \in P : p \; I \; d \}$$

application qui est injective. En conséquence, on identifie souvent les droites de G avec ces parties de P ; D est alors une famille de parties de P, et la relation d'incidence devient la relation d'appartenance. On dira donc indifféremment un point est incident ou appartient à une droite ; une droite est incidente ou contient un point.

Deux (ou plusieurs) points incidents à une même droite sont dits collinéaires ; deux (ou plusieurs) droites incidentes à un même point sont dites concourantes.

Au lieu de géométrie projective plane, on dira souvent plan projectif.

Les Axiomes A_1, A_2, A_3 ont des conséquences faciles à démontrer :

Exercice 10 :

Montrer que toute droite d'une géométrie projective (finie) G contient un nombre constant k de points, avec $k \geqslant 3$. En déduire que tout point est incident à k droites et que G admet $k^2 - k + 1$ points et le même nombre de droites.

On a l'habitude de poser $k = n + 1$; n est *l'ordre* du plan. Dans un plan projectif on a donc les « équilibres » suivants :

- card P = card D = $n^2 + n + 1$ ($n \geqslant 2$)
- par tout point passent $n + 1$ droites et toute droite contient $n + 1$ points.

Exemple :

La géométrie d'ordre 2 à 7 points et 7 droites se construit facilement ; on obtient la figure ci-dessous où un cercle est censé représenter la septième « droite ».

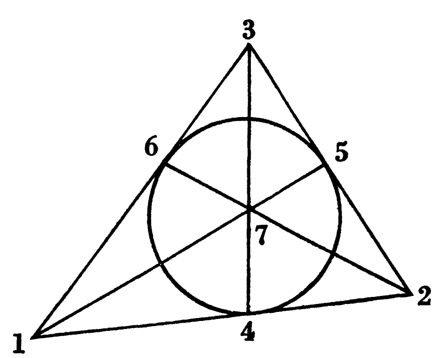


Fig. 2

TABLEAU D'INCIDENCE

		Droites						
		I	II	III	IV	V	VI	VII
Points	1	×		×	×			
	2	×	×			×		
	3		×	×			×	
	4	×					×	×
	5		×		×			×
	6			×		×		×
	7				×	×	×	

Il sera instructif pour le lecteur de s'essayer à construire la géométrie d'ordre 3.

1.2 — *Géométrie plane affine.*

Soit G = (P, D, I) un triplet ; les éléments de P(D) étant appelés points (droites), I étant la relation d'incidence, on dira que deux droites sont *parallèles* s'il n'existe aucun point incident simultanément à ces deux droites. Une géométrie affine G est un triplet (P, D, I) vérifiant les axiomes suivants :

B1 : Deux points distincts sont incidents à une droite et à une seule.

B2 : Soient p un point, d une droite ne contenant pas p ; il passe par p une parallèle et une seule à d.

B3 : Il existe au moins trois points non collinéaires.

Les mêmes remarques que pour une géométrie projective sont valables ; au lieu de géométrie plane affine on dit aussi plan affine.

Il est clair que le parallélisme est une relation d'équivalence dans l'ensemble des droites ; chaque classe d'équivalence est un faisceau de droites parallèles définissant une « direction ».

Exercice 11 :

Montrer que dans un plan affine G (fini), toute droite contient n points. En déduire que tout point est incident à $(n + 1)$ droites, que card $P = n^2$, card $D = n^2 + n$, et qu'il y a $(n + 1)$ faisceaux de n droites parallèles, une droite de chaque faisceau passant par tout point du plan.

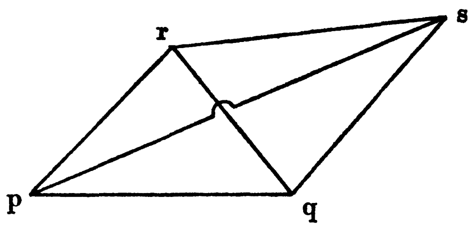


Fig. 3

On obtient une géométrie affine G* à partir d'une géométrie projective G ; soit une droite quelconque de G ; on pose $G^* = (P^*, D^*, I^*)$ avec $P^* = P$, $d^* = D - \{d\}$. I^* = restriction de I à $P^* \times D^*$; le lecteur vérifiera que G* est bien une géométrie affine et remarquera que deux droites parallèles dans G* sont deux droites concourantes avec d dans G. Par exemple, la géométrie projective d'ordre 2 ci-dessus conduit à la géométrie affine ci-contre :

N.B. : ps et rq sont des droites parallèles dans cette géométrie.

Inversement d'une géométrie affine, on peut obtenir une géométrie projective par adjonction d'une « droite à l'infini ». (La construction est classique dans le plan réel) ; les parallèles sont alors concourantes sur la droite de l'infini.

2. — GÉOMÉTRIE SUR UN CORPS.

Comment construire des géométries ? Le procédé est bien connu pour la géométrie usuelle : c'est le principe de la géométrie analytique due à Descartes et à Fermat. Les points de la géométrie plane affine sont définis comme les couples de nombres réels (x, y) ; de même les droites sont les couples de nombre réels (a, b), ou les nombres réels (c). On définit ensuite une relation d'incidence I entre points et droites en posant :

$$(x, y) \text{ I } (a, b) \rightleftarrows y = ax + b$$

$$(x, y) \text{ I} c \rightleftarrows x = c$$

on vérifie que les points, les droites et la relation d'incidence vérifient bien les axiomes B d'une géométrie affine. Cette vérification n'utilise que les propriétés algébriques du corps des nombres réels ; le procédé précédent est donc valable pour tout corps. En particulier en utilisant les corps finis étudiés dans notre premier article, on va obtenir des géométries finies. Soit K un corps fini ; il est d'ordre p^n (p nombre premier) ; nous noterons AG $(2, p^n)$ la géométrie plane affine définie à partir de K ; à cette géométrie est associée une géométrie plane projective notée PG $(2, p^n)$. (On pourrait obtenir des géométries affines ou projectives de dimension supérieure à 2, par un procédé analogue.)

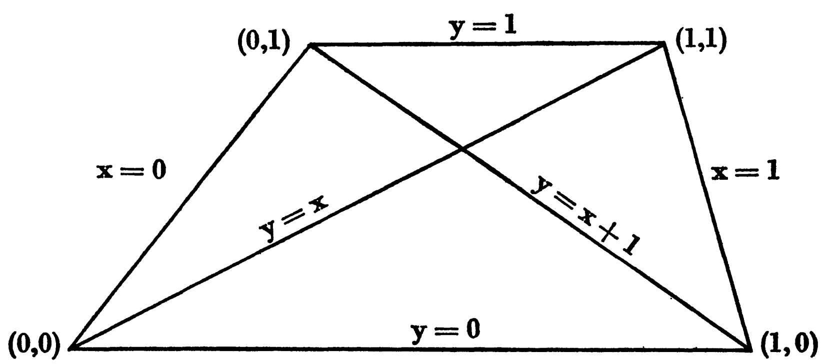


Fig. 4

Exemple :

Soit $K_2 = (0,1)$ le corps à 2 éléments ; il permet la construction de la géométrie AG (2,2) déjà rencontrée : les points ont maintenant des coordonnées et les droites sont représentées par leurs équations.

Exercice 12 :

Etudier le plan affine AG (2, 3) obtenu à partir du corps K_3 à 3 éléments ; équations des droites, parallèles...

A tout corps on peut donc associer une géométrie plane. Inversement toute géométrie plane peut-elle être obtenue comme géométrie sur un corps ? La réponse est négative et date de 1907 : Veblen et Wedderburn exhibaient des géométries planes construites à partir de structures algébriques qui n'étaient pas des corps ; ces structures ont reçu le nom de systèmes de Veblen-Wedderburn ; nous les avons définies dans l'article 1 ; la manière dont nous les avions alors introduites montre précisément qu'on peut définir des géométries au moyen de ces systèmes par le même procédé que pour un corps ; il en est évidemment de même avec les presque-corps définis dans le même article.

Toute géométrie plane peut-elle être ainsi algébrisée et quelle est la structure algébrique minimale nécessaire ? La réponse est donnée par M. Hall en 1943, l'algébrisation de la géométrie repose sur l'introduction d'un repère (comme pour la géométrie habituelle) ; la structure algébrique obtenue est celle d'«anneau ternaire» dont celles de quasi-corps, presque-corps ou corps peuvent être considérées comme des cas particuliers. Les propriétés supplémentaires de l'anneau ternaire dépendent du groupe d'automorphismes de la géométrie. Avant d'exposer la méthode de Hall, nous allons montrer que certaines propriétés de ce groupe d'automorphismes sont équivalentes à l'existence de certaines configurations dans la géométrie.

3. — GROUPE DE COLLINÉATIONS D'UNE GÉOMÉTRIE ET THÉORÈME DE DESARGUES.

3.1 — *Définitions.*

Soient $G = (P, D, I)$, $G' = (P', D', I')$ deux plans projectifs. Un *isomorphisme* de G sur G′ est défini comme une bijection de G sur G′ conservant les relations d'incidence ; de façon précise, il existe deux bijections $f : P \to P'$; $g : D \to D'$ avec $p \; I \; d \rightleftarrows f(p) \; I' \; g(d)$. Pour définir un isomorphisme, il suffit de se donner une bijection de P sur P′ telle que trois points alignés aient leurs images collinéaires (ou une bijection de D sur D′ telle que trois droites incidentes à un même point aient leurs images concourantes).

Un *automorphisme* d'un plan projectif G sera un isomorphisme de G sur lui-même ; on a l'habitude de parler alors de *collinéation*. Soit f une collinéation de G ; si $f(p) = p$ le point p est un point fixe ; si pour tout $p \in d$, $f(p) = p$, la droite d est dite invariante (ou de points fixes) ; si l'on a seulement $f(d) = d$, la droite est dite fixe ; si pour toute droite passant par p on a $f(d) = d$, le point p est dit point de droites fixes.

Exercice 13 :

Soit f une collinéation (différente de l'identité), laissant une droite d invariante. Démontrer qu'il existe au plus un point p extérieur à d, qui soit point fixe pour f. (Supposer deux points fixes et montrer que f est l'application identique.)

Le résultat de l'exercice précédent, permet une classification des collinéations. On distingue :

- les collinéations ne laissant aucune droite invariante,
- les collinéations laissant une droite invariante : on les appelle ***translation*** ou ***élation***,
- les collinéations laissant une droite invariante et ayant un point fixe en dehors de cette droite : on les appelle ***homothétie*** ou ***homologie***.

Exercice 14 :

Montrer que pour une translation ou une homothétie, il existe un point de droites fixes (ce point est sur la droite invariante pour une translation, et est le point fixe de l'homothétie).

Les translations et homothéties sont appelées les ***collinéations centrales*** (ou perspectives) ; si 1 est la droite de points fixes et c le point de droites fixes, on parle d'une (c, 1) ***collinéation*** d'axe 1 et de centre *c* ($c \in 1$ pour une translation ; $c \notin 1$ pour une homothétie).

Exercice 15 :

Soit f une (c, 1) collinéation. Montrer que f est complètement déterminée par la donnée de c, 1 et de l'image f(p) d'un point p ($p \neq c$, $p \notin 1$). (Etant donné un point p′ on construira son image f(p′) au moyen des données précédentes.)

3.2 — *Propriétés de groupes de collinéations et théorème de Desargues.*

Soit G un plan projectif d'ordre *n* ; l'ensemble des collinéations est évidemment un groupe pour la composition des applications. Ce groupe sera d'ordre élevé et sa détermination est difficile (par exemple pour PG(2,2) le groupe est d'ordre 168) ; on va en considérer des sous-groupes.

Exercice 16 :

Soit G(c,1) l'ensemble des (c,1) collinéations de centre et d'axe fixés. Montrer que G(c,1) est un sous-groupe du groupe des collinéations.

Même exercice pour l'ensemble G(1) des translations de même axe.

Considérons le groupe G(c, 1) défini ci-dessus ; soit p un point du plan ; une (c, 1) collinéation est définie par la donnée p′ de l'image de p ; sur la droite pp′, passant par c, il y a *n* points différents de c ; donc G(c, 1) a au plus *n* éléments. Supposons G(c, 1) d'ordre maximal *n* ; autrement dit si 1′ est une droite passant par c et si p_1 et p_2 sont deux points de 1′ (distincts de c et n'appartenant pas à 1), il existe une collinéation de G(c, 1) transformant p_2 en p_1 ; on dit encore que le groupe G(c, 1) est transitif sur l'ensemble A des points de 1′ : $A = (p : p \in 1', p \neq c, p \notin 1)$; et ceci est vrai quel que soit la droite 1′ ; on dira aussi que le *plan projectif G est (c,1) transitif.*

Cette propriété est équivalente au théorème de Desargues.

Proposition :

Pour que le plan projectif G soit (c, 1) transitif il faut et il suffit que le théorème de Desargues soit vrai dans cette géométrie par rapport à l'axe 1 et au centre c.

La validité du théorème de Desargues par rapport à c et 1 signifie ceci : pour tout couple, p q r, p′ q′ r′ de triangles perspectifs par rapport à c (cf. figure) dont deux paires de côtés correspondants pr, p′r′, p q, p′q′ se coupent sur 1, alors les deux autres côtés qr et q′r′ se coupent sur 1 (les deux triangles sont dits alors perspectifs par rapport à 1).

(La figure est faite dans le cas d'une homothétie de centre c et d'axe 1.)

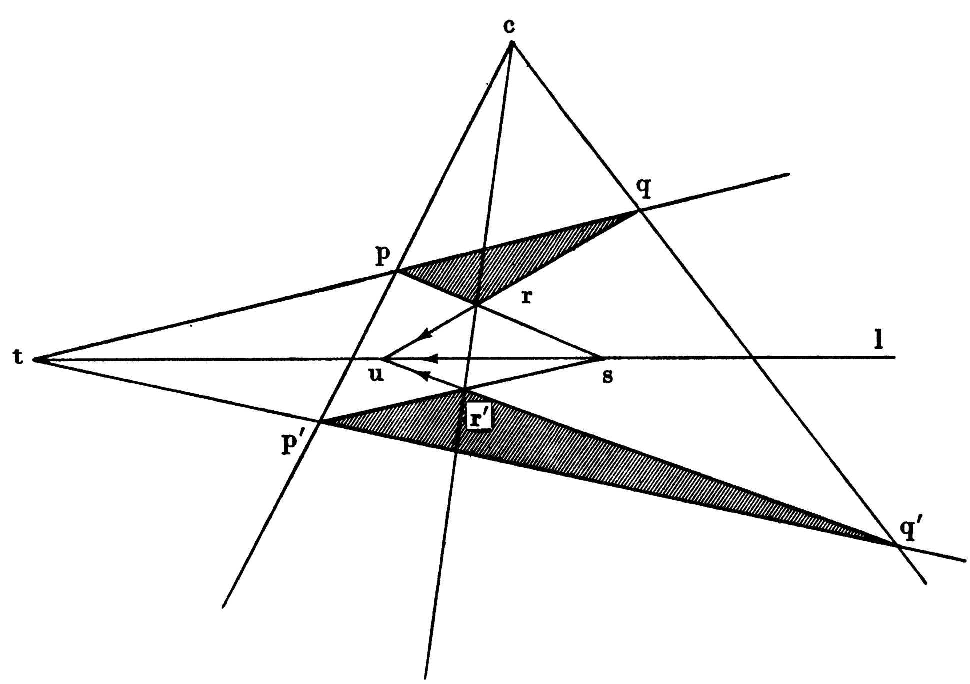


Fig. 5

Condition nécessaire :

Soient vérifiées les conditions du théorème de Desargues ; puisque G est (c, 1) transitif, il existe une (c, 1) collinéation f transformant p en p′ ; l'image de q par f est alors déterminée : c'est q′ ; de même l'image de r est r′ ; donc l'image de la droite q r est q′ r′ et ces deux droites se coupent bien en u sur la droite 1 des points fixes.

Condition suffisante :

S'il existe une (c, 1) collinéation transformant p en p′, elle est complètement définie par la donnér du couple p, p′ ; on peut alors construire l'image q′ d'un point q quelconque ; l'image r′ d'un point e quelconque peut alors être construite au moyen du couple p p′ ou du couple q q′ ; et l'unicité de cette image résulte du théorème de Desargues.

Un *plan* est dit ***arguésien*** si le théorème de Desargues est vrai pour toute droite et tout point de ce plan. On a donc :

$$G \text{ géométrie arguésienne} \rightleftarrows G\ (c,1) \text{ transitif pour tout couple } (c,1).$$

3.3 — *Plans non arguésiens.*

Il existe des géométries qui ne sont (c,1) transitives que pour certains couples ; elles sont alors non arguésiennes ; il en est justement ainsi des géométries construites par Weblen et Wedderburn en 1907 qui donnèrent donc le premier exemple de géométries non arguésiennes.

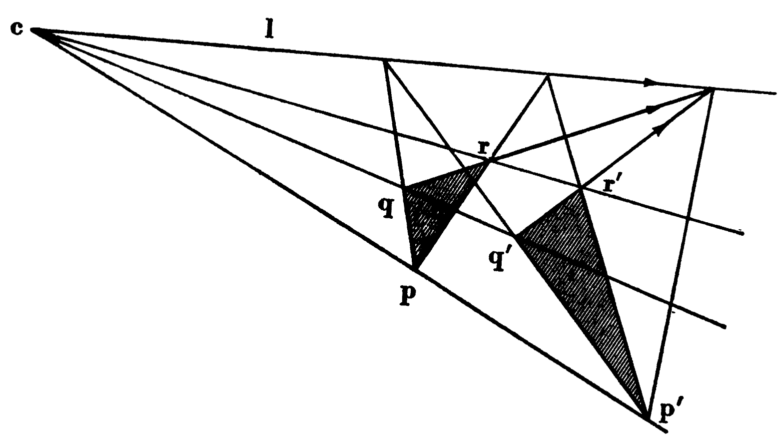
Dans le cas non-arguésien on introduit de nouvelles définitions :

Un *plan* est de ***translation*** par rapport à une droite 1, s'il est (c,1) transitif pour tout centre $c \in 1$; autrement dit le groupe G(1) des translations d'axe 1 est transitif sur $\{p \in P,\ p \notin 1\}$; ou encore le théorème de Desargues est vrai pour l'axe 1 et tout centre c sur 1 (ce cas particulier du théorème de Desargues s'appelle aussi théorème de linéarité).

Un *plan de Moufang* est un plan de translation par rapport à toute droite (il suffit pour cela qu'il soit de translation par rapport à deux droites).

On a de nombreux résultats donnant des conditions suffisantes pour qu'un plan soit arguésien ; exemples :

- — tout plan de Moufang fini est arguésien,
- — tout plan (fini) dont le groupe des collinéations est doublement transitif sur les points est arguésien (Ostrom-Wagner 1959),
- — tout plan (fini) dont le groupe des collinéations est simplement transitif et qui admet une (c,1) collinéation non triviale est arguésien (Wagner 1959).



Théorème de linéarité

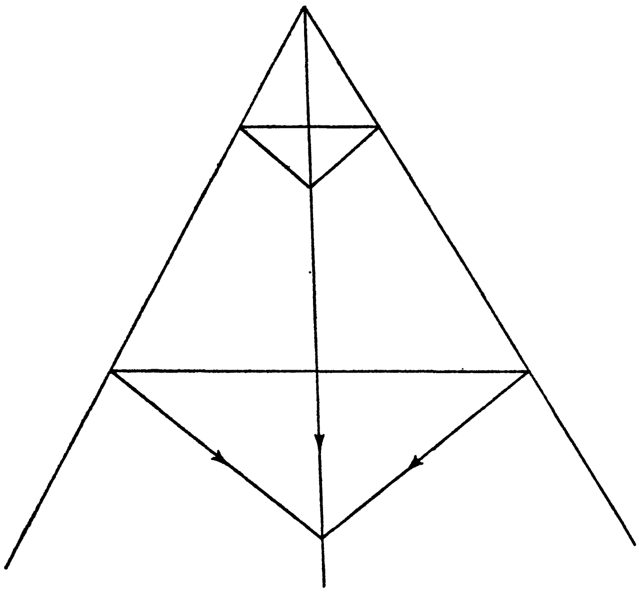
Fig. 6

On conjecture qu'un plan (fini) est arguésien si le groupe des collinéations est simplement transitif sur les points.

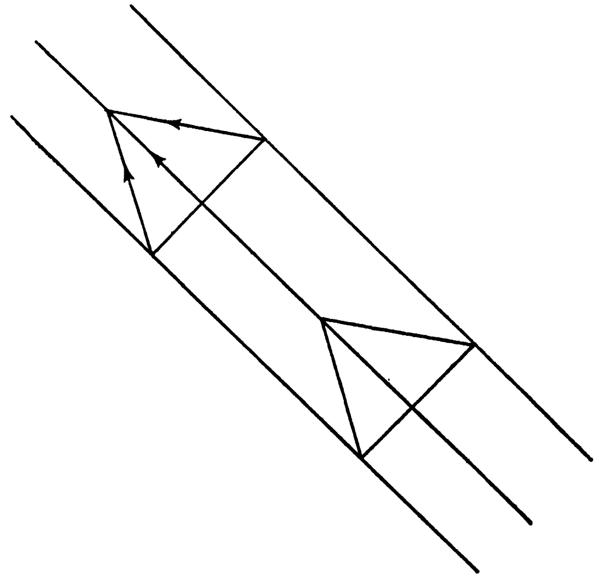
Ces résultats ont parfois été établis « directement », parfois grâce à l'algébrisation du plan dont nous allons parler maintenant.

Remarque :

Dans le cas d'une géométrie affine, les configurations du théorème de Desargues deviennent les suivantes :



Homothétie



Translation

Fig. 7

Pour la translation, le théorème signifie que l'équipollence est une relation d'équivalence.

4. — INTRODUCTION DE COORDONNÉES DANS UN PLAN PROJECTIF — ANNEAU TERNAIRE.

4.1 — *Repère d'un plan projectif.*

Soit G une géométrie projective plane finie d'ordre n et soit E un ensemble à n éléments E = {0, 1, a, b, ..., x, y, ,,,}. On appelle *repère* de G un ensemble de quatre points O, I, X, Y dont trois quelconques d'entre eux sont non collinéaires. On note L_∞ la droite X Y, ∞ étant un symbole n'appartenant pas à l'ensemble E ; le point d'intersection de X Y et O I est noté J.

La donnée d'un tel repère permet d'attribuer à chacun des points ou des droites de G, un élément ou un couple d'éléments de l'ensemble E : ces éléments s'appelleront les coordonnées du point ou de la droite.

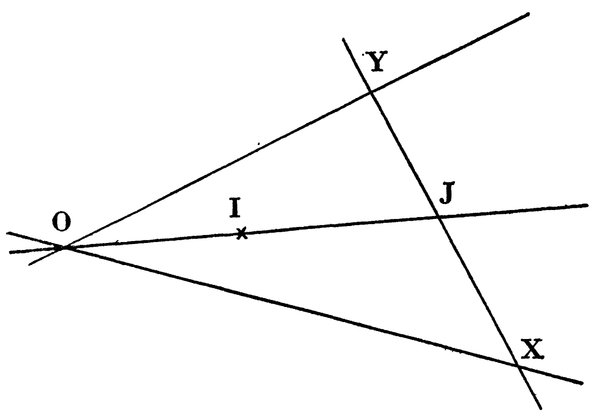


Fig. 8

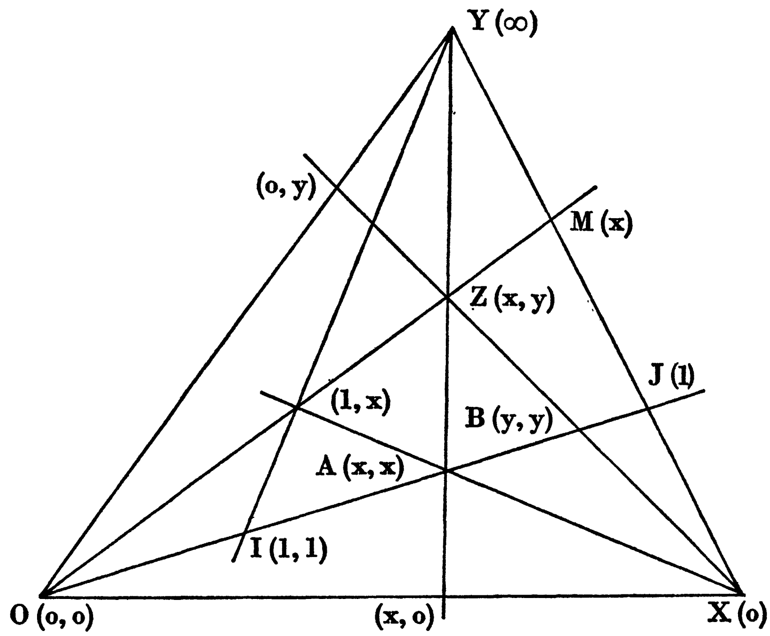


Fig. 9

4.2 — *Définition des co-coordonnées.*

1°) Coordonnées des points :

— Points de la droite O I (différents de J) : (x, x) avec en particulier O : (0, 0) et I : (1, 1).

— Point Z (non situé sur O I ou L_∞) : (x, y) avec x coordonnée du point A d'intersection des droites O I et Y Z et y coordonnée du point B d'intersection des droites O I et X Z.

— Point M de la droite L_∞ (différent de Y) : (x) avec x seconde coordonnée du point d'intersection des droites O M et Y I.

Donc J : (1) et X : (0)

— Point Y = (∞).

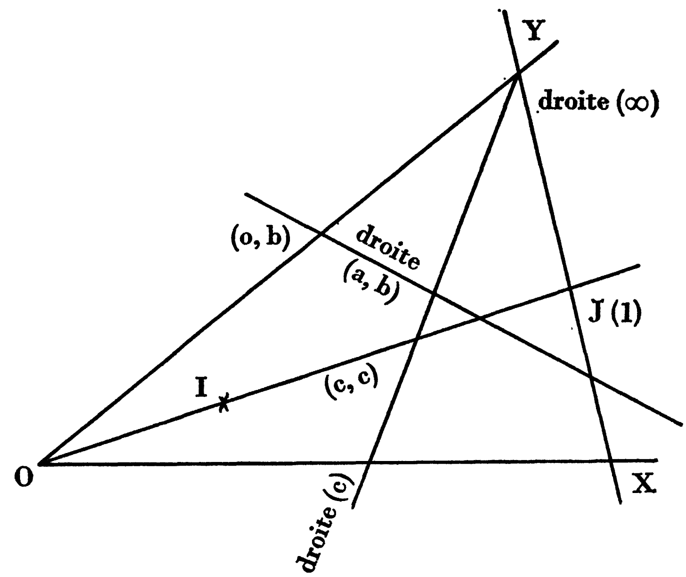


Fig. 10

2°) Coordonnées des droites :

— Droite Δ ne passant pas par Y : (a, b)

avec a : coordonnée du point d'intersection de Δ et de L_∞

b : 2^e coordonnée du point d'insection de Δ et O Y

— Droite Δ passant par Y (différente de L_∞) : (c)

avec c : coordonnée du point d'intersection des droites Δ et O I

— Droite L_∞ : (∞).

4.3 — *Anneau ternaire.*

Les $n^2 + n + 1$ points ou droites de G sont maintenant munis de coordonnées, éléments d'un ensemble E ; la relation d'incidence entre points et droites de G va permettre de définir une opération ternaire sur E. Soient en effet a, b, x, trois éléments de E ; il existe alors un point unique noté (x, y) tel que ce point soit incident à la droite (a, b) : c'est le point d'intersection de la droite (a, b) et de la droite joignant Y au point (x, o) de O X ; donc y est déterminé uniquement par la donnée de a, b et x.

Autrement dit, on peut définir sur E une opération ternaire F en posant :

$$y = F(a, x, b) \rightleftarrows [\text{point } (x, y) \text{ incident à la droite } (a, b)]$$

Exercice 17 :

Montrer que l'opération ternaire F définie ci-dessus, vérifie les propriétés suivantes :

— $F(a, 0, b) = F(0, a, b) = b$,

— $F(a, 1, 0) = F(1, a, 0) = a$,

— Pour tout $(a, x, y) \varepsilon E^3$, l'équation $F(a, x, b) = y$ a une solution unique.

— Pour tout $(a_1, a_2, b_1, b_2) \varepsilon E^4$ avec $a_1 \neq a_2$,
l'équation $F(a_1, x, b_1) = F(a_1, x, b_2)$ a une solution unique.

— Pour tout $(y_1, y_2, x_1, x_2) \varepsilon E^4$, avec $x_1 \neq x_2$, le système d'équations $F(a, x_1, b) = y_1$ $F(a, x_2, b) = y_2$ a une solution unique.

On dit que E muni de l'opération F est un anneau ternaire (ou anneau ternaire planaire).

A toute géométrie plane est donc associé un anneau ternaire, dépendant d'ailleurs en général du repère choisi. Inversement, soit un anneau ternaire, on lui associe un plan projectif (par un procédé semblable à celui défini pour les corps), dont les quatre points (0, 0), (1, 1), (0) (∞) constituent un repère.

4.4 — *Anneau ternaire linéaire.*

Une opération ternaire est assez difficile à étudier directement ; aussi on essaye en général de se ramener à une composition d'opérations binaires. Dans le cas de l'anneau ternaire on définit deux opérations binaires de la façon suivante :

$$x + b = F(1, x, b) \qquad\qquad a \,.\, x = F(a, x, 0)$$

Le lecteur effectuera les constructions géométriques correspondantes et montrera que les opérations + et . sont des opérations de boucles. On se demande alors à quelles conditions l'anneau ternaire est linéaire, c'est-à-dire :

$$F(a, x, b) = a \,.\, x + b$$

le résultat est le suivant :

Un anneau ternaire est linéaire si et seulement si le plan projectif correspondant est (Y, L_∞) transitif (autrement dit si le théorème de Desargues est vrai par rapport au centre Y et à l'axe L_∞) ; l'opération + est alors une opération de groupe.

Exercice 18 :

Démontrer le résultat précédent (on construira les points d'ordonnées $F(a, x, b)$ et $a \,.\, x + b$).
Les propriétés supplémentaires de l'anneau ternaire coordonnant G dépendent de la « richesse » du groupe de collinéations de G. Nous donnons les principaux résultats.

G (X, OY) transitif $\rightleftarrows$ l'anneau ternaire est linéaire et . est une loi de groupe.

G de translation par rapport à $L_\infty \rightleftarrows$ (E, +, .) est un système de Weblen-Wedderburn.

G de translation $\rightleftarrows$ (E, +, .) est un système de Moufang (donc dans le cas fini, un corps).

G arguésien $\rightleftarrows$ (E, +, .) est un corps.

Ce dernier résultat montre clairement comment le caractère arguésien du plan est lié à la nature de la structure algébrique qui le coordonne ; on ne peut d'ailleurs démontrer le théorème de Desargues dans le plan habituel qu'au moyen de la géométrie analytique, c'est-à-dire des propriétés du corps des nombres réels.

Exercice 19 :
Soit le quasi corps à neuf éléments défini dans l'exercice six.
Nous donnons ci-dessous sa table de multiplication.

0	0	1	2	i	1 + i	2 + i	2i	1 + 2i	2 + 2i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	i	1 + i	2 + i	2i	1 + 2i	2 + 2i
2	0	2	1	2i	2 + 2i	1 + 2i	i	2 + i	1 + i
i	0	i	2i	2	1 + 2i	1 + i	1	2 + 2i	2 + i
1 + i	0	1 + i	2 + 2i	2 + i	2	2i	1 + 2i	i	1
2 + i	0	2 + i	1 + 2i	2 + 2i	i	2	1 + i	1	2i
2i	0	2i	i	1	2 + i	2 + 2i	2	1 + i	1 + 2i
1 + 2i	0	1 + 2i	2 + i	1 + i	2i	1	2 + 2i	2	i
2 + 2i	0	2 + 2i	1 + i	1 + 2i	1	i	2	2i	2

On considère la géométrie projective d'ordre 9 construire à partir de ce quasi-corps. Soient les deux triangles de cette géométrie :

A (1, 2 + i) B (i, 1 + i)
M (0, 2 + i) N (0, 1 + i)
A′ (1, 2) B′ (i, 2i)

Montrer que ces deux triangles sont perspectifs par rapport au point O = (0, 0) (c'est-à-dire que les droites AB, MN, A′B′ se coupent en O). Chercher les points d'intersection des droites AA′ et BB′, MA et NB, MA′ et NB′ et vérifier que ces trois points ne sont pas alignés, donc que cette géométrie n'est pas arguésienne.

5. — EXISTENCE DE PLANS PROJECTIFS.

On connaît actuellement cinq classes de plans projectifs finis. D'abord les plans arguésiens correspondants aux corps finis ; puisque pour tout nombre p^n (p premier) il existe un seul corps d'ordre p^n, il existe une seule géométrie arguésienne d'ordre p^n ; puis les plans correspondants aux systèmes de Veblen-Wedderburn ; ils sont d'ordre p^n (p premier, n impair, systèmes d'Albert) ou p^{2n} (p premier, systèmes de Hall) ; le premier de ces plans est d'ordre 9, 9 étant d'ailleurs l'ordre minimum pour une géométrie non-arguésienne. Les trois classes de plans suivants sont coordonnés par des anneaux ternaires non linéaires : ce sont les plans d'Hugues (1957), d'Ostrom (1962) et des plans dérivés de ceux d'Hugues ; tous ces plans sont d'ordre p^{2n} et contiennent un sous-plan arguésien d'ordre p^n.

Dans tous ces exemples l'ordre du plan est une puissance d'un nombre premier ; en est-il toujours ainsi ? et de façon générale quels sont les nombres n pour lesquels il existe un plan projectif d'ordre n. Ces questions restent ouvertes ; le seul résultat général obtenu est celui de Bruck et Ryser en 1959 ; ils ont montré par des méthodes arithmétiques l'impossibilité de certaines valeurs de n ; les valeurs ainsi exclues sont $n \equiv 1 \pmod 4$ ou $n \equiv 2 \pmod 4$ avec $n = p^2 + q^2$ (p et q entiers) ; en particulier le nombre 6 ainsi que tout $n \equiv 2\,p$ avec p premier et $p \equiv 3 \pmod 4$ sont des valeurs éliminées. Le premier nombre n pour lequel on ignore s'il existe une géométrie projective d'ordre n est $n = 10$.

Remarque :

Les géométries projectives ou affines de dimension supérieure à deux peuvent être algébrisées de manière analogue, mais la structure algébrique obtenue est toujours celle de corps ; le théorème de Desargues est d'ailleurs toujours vrai dans ces géométries.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE

Il existe très peu d'ouvrages ne traitant que des géométries planes finies projectives ou affines ; mais il en existe beaucoup dont une partie plus ou moins importante se rapporte à ce sujet. Afin de ne pas étendre démesurément cette bibliographie, nous ne signalerons en principe, que les ouvrages traitant de l'algébrisation des géométries planes finies.

Commençons par les exceptions ; pour comprendre ce qu'est une géométrie pour un mathématicien moderne, et comment elle est devenue une partie de l'algèbre il existe deux exposés remarquables :

DIEUDONNÉ J. — *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* (Hermann).

L'ouvrage ne traite apparemment que des géométries affines et euclidiennes à 2 ou 3 dimensions. Mais, en familier de Bourbaki, l'auteur a pris soin d'indiquer de nombreux « thèmes d'exercice» qui vont beaucoup plus loin, et il a ajouté quatre annexes dont une sur les géométries projectives et non euclidiennes.

ARTIN E. — *Algèbre géométrique* (Gauthier-Villars, 1962).

L'ouvrage est d'un niveau plus élevé que le précédent. Il étudie les géométries affines, projectives, métriques et la structure de groupes de collinéations correspondants. Le cas des géométries finies est considéré mais seulement lorsque le système des coordonnées est un corps (le théorème de Desargues est pris pour axiome supplémentaire d'une géométrie affine ou projective).

On peut ajouter à ces deux ouvrages et dans le même esprit la lecture de :

BOURBAKI. — *Eléments d'histoire des mathématiques* (Hermann, 1960).

Voir les chapitres « Algèbre linéaire et algèbre multinéaire» et « Formes quadratiques et géométrie élémentaire».

A l'opposé du style précédent, on peut citer un bon exemple d'exposé traditionnel de la géométrie projective (le traitement est celui de la « géométrie pure», l'aspect algébrique étant pratiquement absent) :

COXETER. — *Projective Geometry*, Blaidsell Publishing Company, New York, 1964.

Pour notre bibliographie principale, nous utiliserons le classement suivant. D'abord les ouvrages étudiant une théorie algébrique (groupes, treillis, algèbre linéaire) ; les géométries interviennent à titre d'exemples ou d'applications de cette théorie. Dans le second cas le sujet d'étude est d'emblée géométrique, le matériel algébrique nécessaire apparaissant à l'occasion ; une géométrie est considérée alors comme un cas particulier d'un « système d'incidence». (Voir article suivant.)

On trouve dans le premier style :

CARMICHAEL. — *Introduction of the theory of groups of finite order*, 1937 (Réédition Dover 1956).

Les chapitres XI et XII traitent des géométries (de dimension supérieure ou égale à 2) sur un corps fini ; l'étude analytique des groupes de collinéations est développée. Le chapitre XIII indique la construction de presque-corps comme algèbres de groupes doublement transitifs et donne l'exemple de plan projectif non arguésien coordonné par le presque-corps d'ordre 9. L'exposé est toujours très clair.

HALL M. Jr. — *The theory of groups*, New York, Mac-Millan, 1959.

Le dernier chapitre s'appelle : Théorie des groupes et plans projectifs. On y trouve démontrés tous les résultats importants établis jusqu'en 1959 (Méthode du repère, structure des presque-corps, systèmes d'Albert, théorèmes de Weddeburn et d'Artin-Zorn, théorème de Bruck-Ryser, groupe de collinéations).

DUBREIL, JACOTIN, LESIEUR et CROISOT. — *Leçons sur la théorie des treillis*, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

La troisième partie est consacrée aux treillis géométriques dont les géométries projectives ou affines (de dimension quelconque) sont des cas particuliers. Un chapitre est réservé aux géométries planes affines (structure algébrique de l'ensemble des coordonnées et groupe des collinéations, exemple de plans non-arguésiens).

On trouve dans le second style : *Algebrical and topological foundations of geometry*, Proceed. of a Coll, Utrecht, août 1959, Pergamon Press, 1962.

Compte rendu d'un congrès avec quelques articles importants dont celui de Tits.

PICKERT G. — *Projective Ebenen* (Grundlehren der Math., vol. LXXX), Berlin-Spinger, 1955, 343 pages.

L'exposé le plus complet sur la question.

SEGRE B. — *Lectures on modern Geometry*, Edizione Cremonese, Rome, 1961.

Un appendice important de Lombardo-Radice fait le point sur les plans non-arguésiens (l'auteur utilise des plans affines) et énumère les problèmes non résolus.

On peut aussi consulter :

GUÉRIN R. — *Existence et propriétés des carrés latins orthogonaux*, Publications Institut de statistique de l'Université de Paris (1966), p. 113-213.

Le deuxième chapitre est un exposé succint mais clair sur les plans projectifs ; on y trouvera les résultats les plus récents (notion de plans dérivés, plans de semi-translations, plans d'Ostrom).

Enfin, on ne saurait trop recommander :

Chantiers Mathématiques, Ministère de l'Education nationale (I.P.N.), 1965, série I, n° 13, Algèbre et Géométrie.

ainsi que le feuilleton de *Mathématiques et Sciences Humaines :* Qu'y a-t-il sur notre couverture ? (N° 8-9-10-11).

N.B. Une référence importante vient de s'ajouter aux précédentes :

DEMBOWSKI P. — *Finite geometries*, Editions Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968, 317 pages.

L'auteur partant du point de vue « système d'incidence» fait une revue synthétique de tous les résultats récents dans ce domaine. Un ouvrage dont il faudra reparler.