

G. TH. GUILBAUD

1. L'algorithme de l'élagueur

Mathématiques et sciences humaines, tome 21 (1968), p. 19-28

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1968__21__19_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

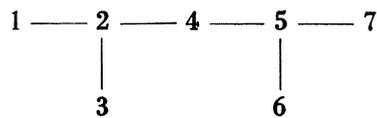
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ALGORITHME DE L'ÉLAGUEUR

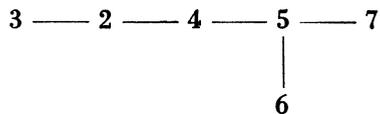
par

G. Th. GUILBAUD

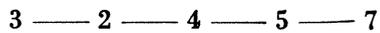
1. ELAGUER UN ARBRE est facile.



ôter 1 rattaché à 2, reste :



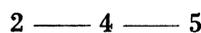
ôter 6 rattaché à 5, reste :



ôter 3 » à 2 :



» 7 » à 5 :



» 5 » à 4 :



» 4 » à 2 :



Compte rendu des opérations, qui se sont succédées dans un ordre arbitraire :

(1 à 2, 6 à 5, 3 à 2, 7 à 5, 5 à 4, 4 à 2)

On aurait pu aussi bien effectuer la suite :

(7 à 5, 3 à 2, 1 à 2, 6 à 5, 5 à 4, 2 à 4).

Exercice : Compter le nombre de façons de faire (sur l'exemple choisi on devra trouver cent-vingt).

2. — RECONSTRUIRE L'ARBRE d'après le compte rendu d'élagage n'est pas moins facile ; il est clair qu'un compte rendu tel que :

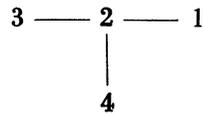
(3 à 2, 1 à 2, 2 à 4, 6 à 5, 7 à 5, 5 à 4)

donne, indépendamment de l'ordre dans lequel sont donnés les renseignements, les liaisons constitutives de l'arbre. Il suffit de les accrocher les uns aux autres :

(3 à 2), (1 à 2) donneront : 3 — 2 — 1

puis

(2 à 4) :



et ainsi de suite.

3. — MAIS il faut remarquer :

1^o) qu'une suite de couples de chiffres n'est pas toujours un véritable compte rendu d'élagage (il faut vérifier les caractères d'un arbre : existence et unicité du chemin d'un point à l'autre).

2^o) que ledit compte-rendu comporte des informations qui ne servent à rien : à savoir l'ordre des opérations.

On va donc chercher à simplifier (élaguer, si l'on peut dire !).

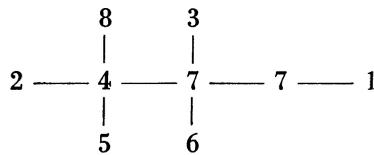
Pour cela :

1^o) on conviendra d'une règle qui fixe l'ordre de priorité des opérations, et :

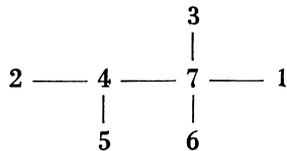
2^o) on ne conservera pour chacune des opérations que la moitié de l'information, à savoir la désignation du point de rattachement.

4. — L'ELAGAGE ORDONNÉ consistera à enlever à chaque fois la branche dont l'extrémité porte le numéro *le plus élevé*.

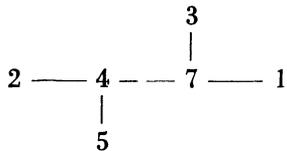
Voici un exemple :



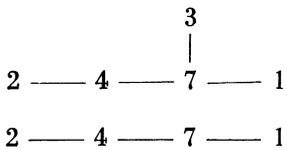
opérations : 8 à 4, il reste :



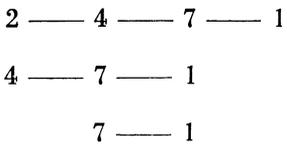
puis : 6 à 7, il reste :



puis : 5 à 4, il reste :



puis : 3 à 7, il reste :



puis : 2 à 4, il reste :

puis 4 à 7, il reste :

et c'est fini.

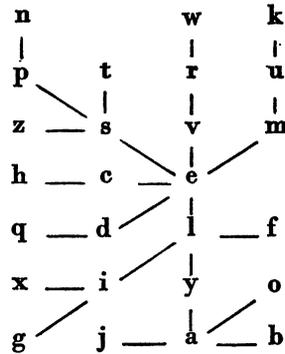
5. — COMPTE RENDU SUCCINCT des opérations précédentes : ne conserver que l'indication du rattachement en oubliant le nom du point rattaché, ce qui fait, pour notre exemple :

(4, 7, 4, 7, 4, 7)

c'est-à-dire une liste (ordonnée) de six informations, ou, comme on dit, un « mot » de six « lettres ».

6. — PETIT JEU.

Voici un arbre de vingt-six lettres :



appliquer l'algorithme de l'élagueur, en ôtant à chaque fois la terminaison qui est la première dans l'ordre alphabétique dans l'ensemble des terminaisons : on commence donc par ôter (b), et l'on note son rattachement, ici (a). Dans l'arbre ainsi élagué la première terminaison à enlever sera f rattaché à l. Le compte-rendu d'élagage commence donc ainsi (al ...). Le lecteur pourra continuer et découvrir le « mot » caché, c'est le titre d'un roman très célèbre.

7. — On aura compris par ces quelques exemples comment associer à tout arbre de N lettres (distinctes) un mot de N - 2 lettres.

On verra sans peine que seules figurent dans le mot les lettres qui ne sont pas terminaisons dans l'arbre, et que chacune y figure un nombre de fois égal à la valence diminuée d'une unité. Bien entendu on n'oubliera pas que cette construction suppose le choix (d'ailleurs arbitraire) d'un ordre « alphabétique ».

Une fois ce choix fait, à tout arbre correspond un mot et un seul. Mais le nombre des mots possibles est facile à calculer : c'est le nombre d'applications de l'ensemble des rangs soit (1, 2, ..., N - 2) dans l'ensemble des N lettres : il y en a N^{N-2} . Or selon Cayley, c'est aussi le nombre des arbres. Il faut donc prévoir que la correspondance : Arbre \rightleftharpoons Mot est bijective. Si on peut l'établir, on aura une démonstration de la formule de Cayley.

On peut d'abord, à titre d'exercice, examiner les petites valeurs de N.

8. — LES ARBRES DE TROIS objets sont :

1 — 2 — 3, 2 — 1 — 3 et 2 — 3 — 1

l'élagage (ordonné en ôtant à chaque fois le numéro le plus élevé) donne respectivement :

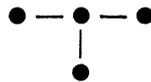
(3 à 2) (3 à 1) (2 à 3)

dont on ne conserve que l'information succincte :

(2) (1) (3)

9. — LES ARBRES DE QUATRE : il y en a seize.

1^o) D'abord quatre du type :



qui sont :



On vérifiera que les comptes rendus succincts d'élagage (ordonnés comme il a été dit) sont respectivement :

(2,2) (3,3) (4,4) (1,1)

2^o) Ensuite douze du type :



dont voici la liste ainsi que les comptes rendus succincts d'élagage ordonné :

1 — 2 — 3 — 4	(32)	2 — 1 — 3 — 4	(31)
1 — 3 — 2 — 4	(23)	2 — 3 — 1 — 4	(13)
1 — 4 — 2 — 3	(24)	3 — 1 — 2 — 4	(21)
1 — 2 — 4 — 3	(42)	4 — 2 — 1 — 3	(12)
1 — 4 — 3 — 2	(34)	2 — 1 — 4 — 3	(41)
1 — 3 — 4 — 2	(43)	3 — 4 — 1 — 2	(14)

3^o) On vérifie sans peine la bijection entre :

* d'une part les seize mots de deux chiffres

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

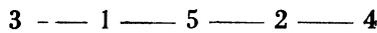
* d'autre part les seize arbres de quatre chiffres.

4^o) On aura aperçu les premières règles :

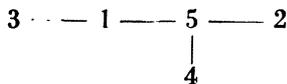
- le mot comporte seulement les chiffres qui ne sont pas en bout d'arbre,
- le nombre de répétitions d'un chiffre dans le mot est inférieur d'une unité à la valence du même chiffre dans l'arbre.

10. — LES ARBRES DE CINQ.

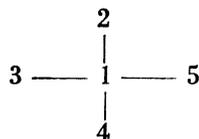
Il y a soixante chaînes :



soixante fourches :



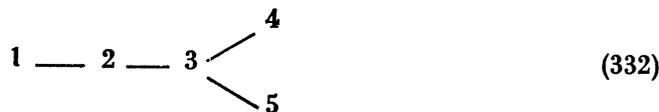
et cinq croix (grecques) :



Pour une chaîne telle que : 3 — 1 — 5 — 2 — 4, le mot ne contiendra que les chiffres 1, 5 et 2. La correspondance est facile à écrire :

<i>l'arbre</i>	<i>le mot</i>
3 — 1 — 5 — 2 — 4	215
4 — 1 — 5 — 2 — 3	152
4 — 1 — 2 — 5 — 3	125
3 — 1 — 2 — 5 — 4	521
3 — 2 — 1 — 5 — 4	512
4 — 2 — 1 — 5 — 3	251

Pour les fourches, le mot répète deux fois le chiffre de la bifurcation.



Enfin pour chaque croix le mot répète trois fois le chiffre du centre de la croix.

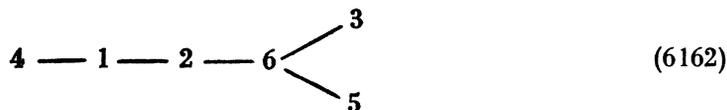
11. — LES ARBRES DE SIX, sont au nombre de $1\,296 = 6^4$.

On se contentera d'une esquisse.

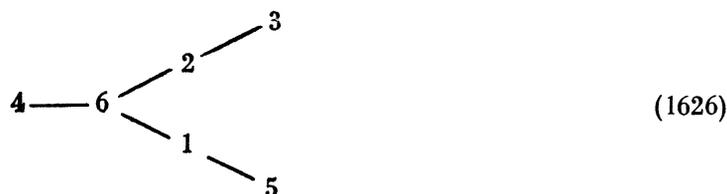
360 chaînes	3 — 1 — 2 — 6 — 4 — 5	(4621)
	5 — 1 — 2 — 6 — 4 — 3	(1462)

Il y a 24 chaînes ayant 3 et 5 comme terminaisons et 24 mots avec les quatre chiffres 1, 2, 4 et 6.

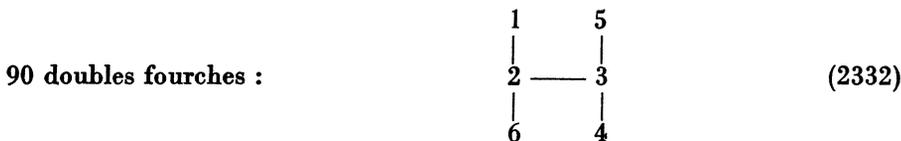
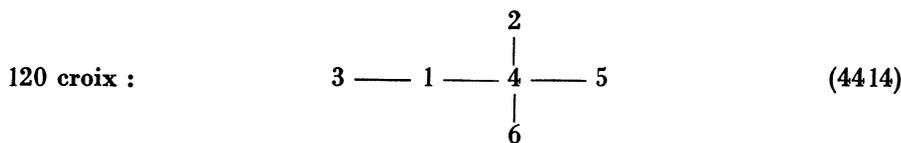
720 fourches : 360 petites fourches



360 grandes fourches :



On peut dénombrer les fourches ayant 6 à la bifurcation et 3, 4, 5 aux extrémités ; c'est de la statistique multinomiale élémentaire. De même pour les mots formés avec 1, 2 et 6, ce dernier répété. Et vérifier qu'on obtient le même nombre.



et enfin 6 étoiles dont le mot est formé du chiffre central répété 4 fois.

12. — ALGORITHME INVERSE.

Pour établir le caractère bijectif de la correspondance, il suffit de montrer comment le mot détermine l'arbre.

Soit le mot « mot » :

LIBERTEEGALITEFRATERNITE

Dressons d'abord la table des fréquences (en ordonnant les lettres).

0 :	C	D	H	J	K	M	O	P	Q	S	U	V	W	X	Y	Z
1 :	B	F	G	N												
2 :	A	L														
3 :	I	R														
4 :	T															
5 :	—															
6 :	E															

Et commençons la procédure par les opérations suivantes :

- 1^o) associer la première lettre du Mot à la première lettre de la Table,
- 2^o) porter le couple ainsi formé dans la description de l'Arbre,
- 3^o) supprimer alors la première lettre du Mot,
- 4^o) supprimer la première lettre de la Table,
- 5^o) déplacer d'un rang dans la Table la première lettre du Mot.

Ce qui donne :

L'Arbre : (LC)

Le Mot : IBERTEEGALITEFRATERNITE

<i>La Table</i> :	0 :	D	H	J	K	M	O	P	Q	S	U	V	W	X	Y	Z
	1 :	B	F	G	L	N										
	2 :	A														
	3 :	I	R													
	4 :	T														
	5 :	—														
	6 :	E														

Et on recommence.

L'Arbre : (LC), (ID)

Le Mot : BERTEEG...

La Table : 0: H J K M O P Q S U V W X Y Z
1: B F G L N
2: A I
3: R
4: T
5: —
6: E

Nouvelle étape :

L'Arbre : LC, ID, BH

Le Mot : ERTEEG...

La Table : 0: B J K M O...
1: F G L N
2: A I
3: R
4: T
5: —
6: E

Et ainsi de suite.

Nous ne reproduirons pas ici toutes les étapes de l'algorithme, mais seulement quelques-unes pour permettre au lecteur de vérifier ses propres calculs (le numéro d'ordre de chaque étape est indiqué par le nombre de paires inscrites au compte de l'Arbre).

L'Arbre : LC, ID, BH, EB, RJ, TK, EM, EO

Le Mot : GALITEFRATERNITE

La Table : 0: P Q S U V W X Y Z
1: F G L N
2: A I R
3: E T

L'Arbre : LC, ID, BH, EB, RJ, TK, EM, EO, GP

Le Mot : ALITEFRATERNITE

La Table : 0: G Q S U V W X Y Z
1: F L N
2: A I R
3: E T

L'Arbre : LC, ID, BH, EB, RJ, TK, EM, EO, GP, AG, LQ, IL

Le Mot : TEFRATERNITE

La Table : 0: S U V W X Y Z
1: A F I N
2: R
3: E T

avant dernière étape :

L'Arbre : LC, ID, BH, EB, RJ, TK, EM, EO, GP, AG, LQ, IL, TS.
EU, FV, RF, AW, TA, EX, RY, NR, IN, TI.

Le Mot : E

La Table : 0: T Z
1: E

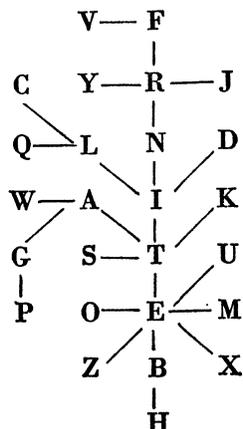
et la dernière :

L'Arbre : LC, etc, TI, ET

Le Mot est vide.

La Table : 0 : E Z

D'où l'on peut déduire un dessin de l'arbre :



13. — Mais il faut savoir (même en fait d'arbre) se dégager des figurations graphiques. Ce que la mathématique peut appréhender sous le nom d'arbre, ce n'est pas un dessin, mais un ensemble d'ensembles à 2 éléments. Reprenons alors l'algorithme initial et donnons en une représentation non figurative.

14. — L'ÉLAGUEUR ALGORITHMIQUE :

L'arbre est donné comme un *ensemble* de couple de lettres.

Pour ordonner cet ensemble, on commencera par le tableau statistique des fréquences de répétition des lettres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
3	2	1	1	7	2	2	1	4	1	1	3	1	2	1	1	1	4	1	5	1	1	1	1	1	1

ou bien :

	1:	C	D	H	J	K	M	O	P	Q	S	U	V	W	X	Y	Z
	2:	B	F	G	N												
<i>La Table</i>	3:	A	L														
	4:	I	R														
<i>de l'Arbre</i>	5:	T															
	6:	—															
	7:	E															

(On comparera cette Table à celle qu'on avait tirée plus haut, page 24, de l'analyse du Mot.)

C'est cette Table qui va permettre d'ordonner les couples qui constituent l'Arbre :

D'abord :

(1) : CL, DI, HB, JR, KT, ME, OE, PG, QL, ST, UE, VF, WA, XE, YR, ZE
(c'est-à-dire les couples qui contiennent une lettre de fréquence 1 et rangés alphabétiquement selon cette lettre).

Une seconde liste ensuite, contiendra les couples qui contiennent une lettre répétée deux fois, et qui ne figurent pas dans la liste précédente :

(2) : BE, FR, GA, NI, NR

et ainsi de suite :

(3) : AT, LI

(4) : IT,

(5) : TE.

Un couple figure dans la liste numéro 1, si l'une de ses lettres figure 1 fois, l'autre ne figurant pas moins souvent. Pour chaque couple on mettra en tête, celle des deux lettres qui est la moins fréquente (en cas d'ex-aequo, choisir l'alphabétique).

Ces préliminaires étant réglés, l'algorithme va commencer : on enlève le premier couple de l'Arbre : ici (CL) ce qui modifie aussi la Table : C disparaît et L remonte d'un cran, et par conséquent, modifie l'ordre dans l'Arbre (puisque cet ordre dépend de la Table) : on déplacera dans l'Arbre, les couples, s'il y en a qui commencent par L.

La situation devient alors :

Table : 0 : C
1 : D, H, J, ...
2 : B, F, G, L, N
3 : A
4 : I, R
5 : T
7 : E

Suite des couples enlevés : (CL)

Arbre : (1) : DI, HB, ...
(2) : BE, FR, GA, LI, NI, NR
(3) : AT
(4) : IT
(5) : TE

On recommence : on enlève DI (d'où déplacement éventuel des couples qui contiennent I) ce qui donne :

Table : 0 : C, D
1 : H, J, K ...
2 : B, F, G, L, N
3 : A, I
4 : R
5 : T
7 : E

Arbre : (1) : HB, ..., ME, ..., ZE
(2) : BE, FR, GA, LI, NI, NR
(3) : AT, IT,
(5) : TE

Enlevés : CL, DI

On poursuivra de la même façon.

Voici les dernières étapes :

Table : 0 : C, D, F, G ... X, Y
1 : T, Z
2 : E

Arbre : (1) : ET, ZE

Enlevés : CL, DI, HB, BE, JR, KT, ME, OE, PG, GA, QL, LI, ST, UE,
VF, FR, WA, AT, XE, YR, RN, NI.

On doit enlever : ET, ce qui donne :

Table : 0 : C, D, F, G, ... T, U, V, W, X, Y
 1 : E, Z.

Arbre : (1) : EZ

Enlevés : CL, DI, ..., NI, ET

Et enfin :

Table : 0 : Toutes les lettres.

Arbre : vide

Enlevés : CL, DI, ..., NI, ET, EZ

Maintenant pour avoir le Mot, il suffit de lire la deuxième lettre de chacun des couples de la liste des enlèvements.