E. COUMET

Logique, mathématiques et langage dans l'œuvre de G. Boole - III

Mathématiques et sciences humaines, tome 17 (1966), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__17__1_0>

E. COUMET

LOGIQUE, MATHEMATIQUES ET LANGAGE DANS L'OEUVRE DE G. BOOLE - III

Après avoir introduit l'idée d'une "Algèbre" à deux valeurs, dans laquelle sont vérifiées les lois logiques fondamentales, Boole rencontre des expressions qui n'ont aucune signification logique visible, des symboles "ininterprétables".

C

L'"Algèbre" à deux valeurs que Boole venait de découvrir se révèle ainsi insuffisante pour fonder la Logique des Classes. Cela ne laisse pas de surprendre. D'où vient que Boole ne soit pas allé au bout de son invention? Sans imaginer. bien sûr, qu'il ait pu se livrer à une axiomatisation rigoureuse dont le temps n'était pas encore venu, il n'est pas invraisemblable d'avancer qu'il avait en mains suffisamment d'éléments pour créer d'emblée ce que sera la Logique des classes chez Schröder. D'aucuns diront que, s'il ne l'a pas fait, c'est qu'il a commis des erreurs, ou pour le moins des maladresses. Il sera, et plus équitable, et plus exact, d'essayer de cerner les véritables obstacles de pensée qu'a dû affronter sa volonté de mathématisation: obstacles d'autant plus difficiles qu'ils venaient en partie de cette volonté même, de l'effort pour définir le système formé par les opérations logiques élémentaires et leurs inverses.

- 1 -

a) L'addition

Lorsque Boole introduit le signe "+" pour représenter les conjonctions "et", et "ou" du langage courant, il semble solliciter abusivement le sens de ces dernières pour affirmer qu'elles sont "analogues au signe + en algèbre, et que leurs lois sont identiques" (1). Il affirme que ces mots lorsqu'ils sont interposés entre les termes descriptifs de deux ou plusieurs classes, impliquent que ces classes sont tout à fait distinctes, de telle manière qu'aucun membre de l'une ne se trouve dans l'autre (2). Mais reprenant plus loin cette question, il

(1) L.T., p. 33.
(2) Ibid.

est beaucoup moins affirmatif: tel est selon lui, précise-t-il, le sens strict de ces conjonctions, mais il admet que les "jus et norma loquendi" semblent plutôt favorables à une interprétation opposée. On serait porté généralement à comprendre que l'expression "Ou les y's ou les z"s" inclut les choses qui sont en même temps y's et z's, avec les choses qui sont seulement y's ou qui sont seulement z's (1).

Ainsi cette expression est ambigüe; aussi exige-t-elle, selon le sens qu'on lui attribue, deux équivalents symboliques différents:

- si nous voulons dire : "Les choses qui sont x's mais non y's, ou les choses qui sont y's, mais non z's", l'expression sera :

$$x\ (1-y) + y\ (1-x)$$

- si nous voulons dire : "Les choses qui sont x's, ou qui, si elles ne sont pas x's, sont y's", l'expression sera :

$$x + y\ (1-x)$$

expression qui admet des choses qui sont en même temps des x's et des y's.

On peut ainsi, en décomposant une "expression disjonctive" en "éléments réellement séparés en pensée", respecter la définition donnée du signe "+" (2). Mais qu'en sera t-il, si comme c'est l'intention essentielle de Boole, on veut assurer que les règles de manipulation de ce signe soient les mêmes dans le Calcul Logique qu'en Algèbre? La double traduction précédente vient de mettre en lumière que les lois du procédé logique d'addition dépendent d'une <u>condition d'interprétation</u> qui risque de mettre en péril le projet d'un Calcul Logique. Car s'il est inévitable de maintenir cette condition particulière, la recherche d'une méthode générale semble condamnée. C'est en ces termes que se présente à Boole un choix fondamental, dont l'issue commande à ses propres yeux le sort de toute sa méthode. On a décidé d'après l'examen de certains exemples, que l'expression $x + y$ semble <u>ininterprétable</u> à moins que les choses représentées par x et y soient entièrement séparées, et les actes de conception par l'étude desquels ont été obtenues les autres opérations symboliques comportaient des conditions analogues: "La question se pose alors de savoir s'il est nécessaire de restreindre l'application de ces lois symboliques et de ces procédés par les mêmes conditions d'interprétabilité. Si une telle restriction est nécessaire, il est manifeste que sera impossible quoi que ce soit qui ressemble à une méthode générale en Logique. D'autre part, si une telle restriction ne s'impose pas, sous quel angle allons nous considérer des procédés qui apparaissent ininterprétables dans cette sphère de pensée à laquelle on les destine à porter leur aide?".(3)

b) La division

C'est à un même choix que Boole se voit contraint, pour des raisons en quelque sorte symétriques, à propos de la division.

Le sens qu'il a donné à l'addition, venait, avons nous dit, de ce qu'il avait cru devoir poser comme étant représentée par le signe "-", l'opération inverse de l'addition. Il ne s'était pas préoccupé, dans son premier ouvrage, de poser un

(1) Id. p. 56.
(2) Ibid.
(3) Id., pp. 66-7.

problème analogue à propos de l'opération "produit". C'est par un scrupule de mathématicien désireux de systématiser le plus possible les lois symboliques élémentaires qu'il le pose clairement dans The Laws of Thought. Il faut d'autant plus dire de ce scrupule qu'il était louable que c'est en partie de lui que sont issus les aspects de l'oeuvre de Boole qui paraîtront au lecteur moderne les plus bizarres et les plus caduques. Pour vouloir poser le signe "−", Boole tombait sur une expression "$x+y$" qui risque d'être ininterprétable; ici, c'est en cherchant si la multiplication ne peut pas avoir d'inverse que Boole rencontre à nouveau, mais sous une forme bien plus énigmatique, une expression elle aussi ininterprétable.

Rappelons que "l'axiome des algébristes selon lequel les deux côtés d'une équation peuvent être divisés par la même quantité" n'est plus valable pour les symboles logiques. De l'équation :

$$zx = zy$$

on ne peut inférer que l'équation

$$x = y$$

soit vraie (1).

Donc si nous envisageons les symboles logiques comme des symboles soumis à des lois formelles, on voit qu'il n'existe pour eux aucun "équivalent formel" de l'"axiome" algébrique considéré.

Cette absence semble devoir entraîner de graves conséquences pour le Calcul Logique qui va buter dès son point de départ sur un problème simple. Supposons qu'une proposition soit exprimée par l'équation :

$$x = yz$$

On pourra se demander comment on peut déterminer z comme une fonction interprétable de x et de y. Or si nous obéissons à un réflexe qui vient de "l'algèbre communément reçue", nous écrirons :

$$z = \frac{x}{y}$$

mais ce sera pour nous trouver devant une forme ininterprétable (2). Nous pouvons sans doute exprimer ainsi la relation que nous cherchons, mais nous n'aurons pas le droit d'effectuer la division (3).

Ce désagrément est d'autant plus pénible qu'en cherchant à mimer ainsi le procédé de division algébrique, Boole voudrait traduire une "opération mentale" essentielle : l'Abstraction (4).

Obstacles de pensée, avons nous dit, que ces difficultés. Sans doute Boole se serait-il épargné des soucis en optant pour le "ou non-exclusif", mais lui reprocher, comme certains, d'avoir commis une erreur en ne le faisant pas, serait

(1) Id., p. 36.
(2) Id., pp. 86-87.
(3) Cf. p. 89.
(4) Id., p. 37.

injuste. Rétrospectivement, on peut dire qu'il a manqué son but: il n'a pas défini une véritable structure mathématique au sens moderne du mot. Mais son échec prouve peut-être que celle-ci était difficile à dégager d'emblée, et qu'en posant le problème comme il le posait, il était délicat de faire le partage entre analogies fécondes et analogies mal amorcées. N'oublions pas que c'est en réfléchissant sur les conditions de divisibilité que Boole en vient à envisager une Algèbre à deux valeurs... Il est heureux en tout cas que Boole rencontrant sur son chemin des expressions ininterprétables n'ait pas cru l'obstacle insurmontable: lui qui a vu dans la possibilité de s'accommoder de telles expressions le pivot de sa méthode, n'aurait pu songer, dans le cas contraire, à mettre sur pied un Calcul Logique.

- 2 -

Première condition à remplir pour assurer cette possibilité: il faut montrer que toutes les formes d'équations auxquelles conduit le procédé de développement peuvent être interprétées d'un point de vue logique. Des trois formes suivantes, la troisième est la plus générale; dans les deux premières les symboles logiques x, y, ... ne se trouvent pas sous forme fractionnaire.

Première forme (1)

Soit l'équation logique $V = 0$; supposons que V ne comporte que deux symboles x, y. Représentons le développement de l'équation donnée par :

$$a\,x\,y + b\,x\,(1-y) + c\,(1-x)\,y + d\,(1-x)\,(1-y) = 0$$

où a, b, c, d sont des coefficients numériques déterminés.

Supposons qu'un coefficient quelconque, par exemple a soit différent de 0. En multipliant chaque membre de l'équation par le constituant xy, on aura

$$a\,x\,y = 0$$

et donc :
$$x\,y = 0$$

Ce résultat, tout à fait indépendant de la nature des autres coefficients, peut être ainsi interprété: "Il n'existe aucun individu appartenant à la fois à la classe représentée par x, et à la classe représentée par y".

Mais si le coefficient a est égal à 0, le terme $a\,x\,y$ n'apparaît pas dans le développement, et l'équation $xy = 0$ ne peut donc être déduite.

Par conséquent, on pourra donner de chaque terme du développement dont le coefficient est différent de 0, une interprétation analogue, et en rassemblant toutes les interprétations semblables, on aura "l'interprétation complète de l'équation $V = 0$".

Soit, par exemple, une proposition représentée par :

$$x - y\,z = 0$$

(1) Id., pp. 82-5.

Le développement du premier membre sera :

$$0\, xyz + xy\,(1-z) + x\,(1-y)\,z + x\,(1-y)\,(1-z) - (1-x)\,y\,z + 0\,(1-x)\,y\,(1-z) + 0\,(1-x)\,(1-y)\,z + 0\,(1-x)\,(1-y)\,(1-z).$$

Les termes dont les coefficients sont différents de 0, nous donnent les équations suivantes :

$$x\,y\,(1-z) = 0 \quad , \quad x\,z\,(1-y) = 0$$

$$x\,(1-y)\,(1-z) = 0 \quad , \quad (1-x)\,y\,z = 0$$

On peut ainsi décomposer une Proposition exprimée par $V = 0$ en ses "éléments séparés" qui sont autant d'équations exprimant chacune pour leur part que telle classe déterminée n'existe pas: aussi peut-on appeler la forme à laquelle on aboutit ainsi une Conjoint Denial, appellation que nous pourrions traduire par: conjonction de négations.

Deuxième forme (1)

Elle peut être illustrée directement par l'analyse de l'exemple précédent. Puisque nous avons déduit de l'équation

$$x - yz = 0$$

la négation conjointe de l'existence des classes représentées par certains constituants, il en résulte que les autres constituants représentent des classes qui réunies forment l'univers.

$$xyz + (1-x)\,y\,(1-z) + (1-x)\,(1-y)\,z + (1-x)\,(1-y)\,(1-z) = 1$$

Ce qui équivaut à affirmer que toutes les choses existantes appartiennent à l'une ou l'autre des classes représentées par chacun des constituants. Cette forme de conclusion peut être appelée affirmation disjonctive (Disjunctive Affirmation).

Boole amorçait ainsi l'étude des formes dites actuellement "forme normale conjonctive" et "forme normale disjonctive" d'une "fonction de Boole"; mais, dans sa perspective, ce n'étaient là que des formes particulières.

Troisième forme (2)

$$V = w$$

V est une fonction des symboles logiques x, y, z, etc; w est un symbole logique quelconque.

C'est ici que se poseront les difficultés les plus délicates d'interprétation ; cela n'a rien de surprenant, car une équation de cette forme se présentera dans des circonstances où nous avons vu plus haut que cessait l'analogie entre les symboles logiques et les symboles algébriques. Soit en effet une proposition qui est exprimée par l'équation :

$$x = yz$$

(1) Id. pp. 85-6.
(2) Id. pp. 86-90.

Si nous cherchons à exprimer z comme fonction interprétable de x et y, nous pouvons tout d'abord, en considérant x, y, z comme des symboles numériques, déduire de l'équation donnée la relation :

$$z = \frac{x}{y}$$

mais l'équation se trouve alors sous une forme ininterprétable. Disons plus exactement que nous ne savons pas l'interpréter sous cette forme. Mais n'y a-t-il pas moyen de trouver une autre forme qui admette une interprétation logique?

La même question se reposera si nous posons le problème général suivant : "Etant donné une équation logique quelconque liant les symboles x, y, z, w, on demande d'exprimer sous une forme interprétable la relation entre la classe représentée par w et les classes représentées par les autres symboles x, y, z, etc.."

Nous pouvons toujours mettre l'équation donnée sous la forme :

$$E\,w + E'\,(1-w) = 0$$

E, E' étant des fonctions des symboles logiques autres que w.

$$E' = (E' - E)\;w$$

$$w = \frac{E'}{E' - E}$$

Si le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{E'}{E'-E}$ ont des termes communs en facteur, nous n'avons pas le droit de simplifier à moins qu'il ne s'agisse de symboles numériques, car, ainsi que nous l'avons vu, la règle de simplification admise par ceux-ci n'est pas valable pour les symboles logiques.

Il ne reste qu'une voie pour résoudre le problème: développer l'expression. Mais ne risquons nous pas alors de rencontrer une multitude de coefficients - rien moins que tous les nombres fractionnaires - qui nous créeront encore plus d'embarras?

La situation va cependant se simplifier considérablement: il va se trouver qu'il suffira de considérer les quatre cas suivants :

$$1,\ 0,\ \frac{0}{0},\ \frac{1}{0}$$

Aussi la difficulté va-t-elle se ramener à chercher quelle interprétation on peut donner de ces coefficients lorsqu'on les rencontre dans le développement de :

$$w = \frac{E'}{E' - E}$$

<u>1er cas</u>: "Soit le coefficient 1. Comme c'est là le symbole de l'univers, et comme le produit de deux symboles - de - classe quelconques représente les individus qui se trouvent dans les deux classes, tout constituant qui a l'unité pour coefficient doit être interprété sans limitation, c'est-à-dire qu'est concerné en ce cas l'ensemble de la classe qu'il représente".

<u>2ème cas</u>: "Soit le coefficient 0. Comme en Logique, ainsi qu'en Arithmétique, c'est là le symbole de Rien, aucune partie de la classe représentée par le coefficient du constituant auquel il est préfixé ne doit être prise".

3ème Cas: Supposons que le coefficient soit $\frac{0}{0}$. Un exemple va nous montrer quelle est sa véritable signification.

Considérons la proposition : "Les hommes non mortels n'existent pas"; si nous représentons "hommes" par y et "êtres mortels" par x, elle est représentée par l'équation :

$$y\ (1-x) = 0$$

Quelle est la valeur de x ? Autrement dit, quelle est la définition des "êtres mortels" en termes d'"hommes"?

Nous avons :

$$y - yx = 0 \qquad \text{ou} \qquad yx = y$$

Nous n'avons pas le droit de diviser les deux membres de l'équation par y. "Nous avons alors la ressource d'exprimer l'opération, et de développer le résultat par la méthode précédente.

$$x = \frac{y}{y}$$

$$x = y + \frac{0}{0}\ (1 - y)$$

Ceci implique que la classe des mortels est constituée
- par la classe comprenant tous les hommes,
- avec en plus un restant d'êtres qui ne sont pas hommes.

Le rôle du coefficient $\frac{0}{0}$ est donc d'indiquer qu'il faut prendre quelque chose dans la classe à laquelle il est préfixé; mais ce "quelque chose" est indéterminé.

Car quel est ce reste des "non hommes" qui est impliqué par la prémisse? Nous n'en savons rien, ce qui revient à dire qu'il peut correspondre à chacun des trois cas possibles: "que ces êtres non hommes soient tous les mortels, ou quelques uns d'entre eux, ou aucun d'entre eux, la vérité de la prémisse qui affirme virtuellement que tous les hommes sont mortels, en sera aussi peu affectée, et par conséquent, l'expression $\frac{0}{0}$ indique ici qu'on doit prendre tous, quelques, ou aucun membres de la classe sur laquelle porte cette expression".

Boole se satisfait de ce seule exemple, (il affirme qu'il est généralisable), pour adopter une signification que suggérait une comparaison avec l'Arithmétique, où $\frac{0}{0}$ représente un nombre indéterminé : ici, ce symbole représentera une classe indéterminée. On pourra le remplacer par le symbole v, soumis à la loi fondamentale $v\,(1-v) = 0$.

4ème cas: Le coefficient d'un constituant n'appartient à aucun des 3 cas précédents.

Il s'agira donc d'un coefficient qui, n'étant égal ni à 0, ni à 1, n'obéit pas à la loi fondamentale :

$$a\ (1 - a) = 0$$

Telle étant la caractéristique de ces coefficients, Boole en détermine la signification par le théorème suivant :

"Si une fonction V, destinée à représenter une classe ou une collection quelconque d'objets, w , est développée, et si le coefficient numérique, a , d'un constituant quelconque se trouvant dans ce développement, ne vérifie pas la loi:

$$a\ (1 - a) = 0$$

alors le constituant en question doit être <u>égalé à 0</u>".

Le 4ème cas se présente usuellement sous la forme $\frac{1}{0}$, et on écrira sous cette forme tous les coefficients différents de $0, 1, \frac{0}{0}$. Le sens de ces coefficients est qu'il faut, dans le développement de w, ne rien prendre des classes sur lesquelles ils portent, ou pour le dire autrement, égaler à 0 les constituants auxquels ils sont préfixés.

Nous pouvons dès lors donner les <u>Canons de l'interprétation</u>. Par développement, on obtiendra une expression de la forme :

$$w = A + 0\,B + \frac{0}{0}\,C + \frac{1}{0}\,D$$

et la solution du problème sera donnée par les deux équations suivantes :

$$w = A + v\,C$$

où v est un symbole de classe indéterminée

et : $$D = 0$$

qui montre quelles relations ont entre eux, tout à fait indépendamment de w , les éléments du problème considéré.

Ces Canons permettent de résoudre le problème formulé a priori comme étant le problème le plus général de la Logique, et ils le résolvent complètement puisque les deux équations finales fournissent sur la classe w toute l'"information" qui était contenue dans l'équation initiale. Par la suite, Boole systématise avec une grande habileté sa méthode, traite du problème de l'élimination de termes déterminés dans des équations données, de la solution de "systèmes de propositions", et donne des méthodes pour abréger les Calculs (1). Sa méthode, conclura-t-il, est par sa simplicité, sa beauté, proche de ce qu'on peut exiger d'une méthode parfaite.

Et pourtant, au coeur de cette méthode, était "l'ininterprétable", dont Boole a senti qu'elle serait une notion difficile à faire admettre.

(1) Remarquons que dans toute équation $V = 0$, où V consiste en une suite de symboles logiques ayant des coefficients positifs, nous pouvons remplacer "$x + x\,y$" par "x", et "$2\,x$" par "x". (Id., p. 131).

D

Boole avait bien senti d'où pouvait venir l'attaque. Il a pressenti que son recours à des procédés ininterprétables heurteraient les logiciens de profession accoutumés à professer que la logique, science de la pensée se pensant elle-même, de la pensée claire ayant la maîtrise lucide de toutes ses démarches, répugne à admettre des constructions symboliques qui, au sens propre, ne veulent rien dire. Boole reconnaît que dans "les applications ordinaires de la raison humaine", on ne rencontre pas d'opérations dont la signification et l'application ne soient pas visibles; et pour la plupart des esprits, il ne suffit pas que prémisses et conclusions soient liées seulement par un raisonnement formel: chaque étape, chaque résultat intermédiaire doit être également intelligible. "Nombreux sont peut-être ceux qui seraient disposés à étendre le même principe à l'usage général du langage symbolique comme instrument du raisonnement" (1). Car ces symboles, dont vous avez établi les lois en examinant les seuls cas où leur interprétation soit possible, avez-vous le droit - demanderaient-ils à Boole - d'étendre leur application à d'autres cas où leur interprétation est impossible, ou douteuse ? Même si on la cantonne aux étapes intermédiaires de la démonstration, une telle application n'est-elle pas radicalement illégitime ?

Boole pouvait en appeler au succès de sa méthode, puisqu'elle lui permettait de retrouver les résultats des syllogismes traditionnels; mais il a voulu affronter l'objection dans toute sa force, et à une condamnation de principe, il répond par des "principes généraux liés à l'usage des méthodes symboliques". On devine quel sera le style de sa réponse. C'est une exigence abusive de réclamer de la méthode symbolique une correspondance terme à terme entre chacune des manipulations qu'elle effectue et la compréhension pleine et entière de ce que signifie cette manipulation. "C'est un fait indubitable que la validité d'une conclusion à laquelle conduit un procédé symbolique quelconque de raisonnement, ne dépend pas de notre aptitude à interpréter les résultats formels qui se sont présentés aux différentes étapes de la recherche" (2). On pourrait dire que Boole est ici du côté de Leibniz défendant contre les exigences qu'avaient formulées Descartes, les droits et la fécondité des "pensées aveugles" ou de la "pensée sourde", qu'on rencontre "dans l'Algèbre où l'on pense aux symboles à la place des choses": loin de ne vouloir admettre que les chaînes de raison où la pensée va d'intuition claire en intuition claire, il est légitime d'étendre par tous les moyens le champ de la connaissance symbolique. Les débats et les recherches que nous voyons se consacrer actuellement à la "pensée naturelle" permettraient également d'éclairer la situation de Boole; on sait qu'il est des degrés différents d'adéquation entre les systèmes formels d'un côté, et la pensée naïve ou naturelle de l'autre. Boole juge suffisante l'adéquation entre son système et la manière ordinaire de raisonner, parce que les "lois de combinaison" de ses symboles reflètent bien les lois du langage ordinaire, et qu'aux conclusions des raisonnements menés à l'aide de ces symboles correspondent des résultats considérés comme vrais par qui use des procédés "ordinaires"; mais ce serait une condition trop contraignante d'imposer que ces derniers trouvent une traduction exacte dans les procédés symboliques.

Boole menait ici le combat en faveur du formalisme, comme l'atteste encore mieux ce texte manuscrit, postérieur à 1855, où il aborde à nouveau ce qu'il

(1) Id. p. 67.
(2) Id. pp. 67-8.

considère comme étant "peut-être la question la plus profonde de la Philosophie de la Logique" : "Lorsque nous manions au moyen du langage les procédés de raisonnement, sommes nous tenus de conserver constamment présentes à l'esprit les conditions d'interprétabilité, et de n'employer par conséquent des formes qui imposent de telles conditions que lorsque ces conditions sont remplies? La Logique a-t-elle nécessairement un caractère ostensif? Ou bien ce qui, en Logique, gouverne entièrement la procédure intellectuelle, n'est ce pas ce par quoi celle-ci est liée à des formes et à des lois abstraites ? Si ce dernier point de vue était adopté, la Logique devrait être décrite ... comme étant non une science ostensive, mais une science noétique" (1). Boole soutient évidemment le second point de vue. Sa méthode remplace en effet "implicitement et d'une manière très remarquable cette considération directe des conditions d'interprétabilité que la vue ostensive du sujet rendrait nécessaire" (2).

Tout n'est pas dit pourtant même si on admet que cette science noétique est un substitut satisfaisant de la science ostensive, car il y a bien du mystère dans la notion d'"ininterprétable": Boole avait plus à faire qu'à revendiquer le droit aux symboles; défendre le formalisme en tant qu'il se définit par le fait de combiner les symboles sans avoir souci de leur signification est une chose; introduire, dans un système, quitte à les faire disparaître au bout du compte, des symboles ininterprétables, en est une autre. C'est très précisément ce dernier procédé que Boole se devait de prendre en charge comme un des "principes généraux liés à l'usage des méthodes symboliques". Il n'y manque pas. Il affirme même qu'il suffit d'un seul exemple pour se convaincre de la validité de ce principe. Or quel est l'exemple qu'il va choisir pour l'illustrer? "L'emploi du symbole ininterprétable $\sqrt{-1}$, dans les procédés intermédiaires de la trigonométrie, fournit une illustration de ce qui a été dit" (3). Un texte manuscrit antérieur aux Laws of Thought laisse penser que cet exemple est tout autre chose qu'une illustration mentionnée au hasard, et qu'il a peut-être été pour Boole, à la fois le fil directeur et le modèle rassurant qui l'ont guidé dans une recherche à première vue hasardeuse: "Il faut observer que dans toute branche de l'analyse, les lois formelles de combinaison des symboles ont un domaine plus vaste que les lois de leur interprétation. En nous conformant strictement à ces lois, nous pouvons passer d'un résultat interprétable à un résultat ininterprétable, et repasser de ce dernier à un résultat interprétable. Ainsi, en trigonométrie, nous employons avec une sécurité parfaite, la forme $\sqrt{-1}$, représentation d'une opération tout à fait ininterprétable en arithmétique. Il m'apparaît que le fondement philosophique de cette application est le suivant: nous tirons les lois de nos symboles de l'examen des cas interprétables; nous constituons un langage ou une notation, dont les symboles sont soumis à la seule restriction suivante: ils doivent obéir à ces lois, mais non à la restriction selon laquelle toute combinaison ainsi obtenue devrait être interprétable; le procédé de raisonnement conduit à l'aide de ce langage général est formel, et dépend seulement des lois générales auxquels sont sujets les symboles utilisés; toute interprétation que nous avons la possibilité d'assigner à un tel langage est particulière; et la validité d'une conclusion dépend des deux conditions suivantes: tout d'abord, que l'interprétation soit compatible avec les lois formelles auxquelles sont soumis les symboles, et qu'ensuite, ces lois formelles n'aient jamais été violées au cours du raisonnement" (4).

---

(1) S.L.P., p. 233.
(2) Id. p. 234.
(3)
(4)

A n'en pas douter, ce novateur dont d'autres textes rendent un son si moderne, s'en rapporte ici à cette philosophie des nombres imaginaires, qui tint si longtemps ces nombres pour vraiment "imaginaires", et ne leva la suspicion qui pesait sur eux que pour des raisons pragmatiques. Ininterprétables certes, mais d'un usage sans risque, et du plus grand profit. Et c'est alors même qu'en ce milieu du XIXème siècle, ils cessaient d'être "ininterprétables" en recevant leur véritable légitimité mathématique, que Boole recourt à eux pour justifier l'usage de symboles ininterprétables en logique (1).

Son projet avait tiré sa source, et sa force de novation d'une mathématique de pointe, celle du groupe des Algébristes Anglais; il reflue en quelque sorte ici, signe certain de faiblesse, vers une mathématique déjà dépassée.

(1) Cf. de Mlle Suzanne BACHELARD, à qui nous devons, ainsi que d'autres indications précieuses, ces remarques: La représentation géométrique des quantités imaginaires au début du XIXème siècle, à paraître dans la Collection des Conférences du Palais de la Découverte.

CONCLUSION

La construction de Boole apparaît ainsi comme l'enchaînement hybride d'une idée forte, d'une analogie mal placée, et des efforts pour parer aux fâcheuses conséquences de celle-ci. L'idée forte, celle d'un "système formel de symboles", n'aboutit pas à une véritable structure mathématique au sens moderne du mot. D'où l'appareillage compliqué destiné à préserver les jeux des symboles ininterprétables. Cet appareillage devait s'écrouler, lorsque la structure que visait Boole fut mieux dégagée. Il conviendrait, et de voir comment cela se fit historiquement, et de porter, par ailleurs, sur le système de Boole, un jugement sérieusement motivé, à partir des exigences de la logique moderne. C.I. Lewis avait déjà demandé qu'on donne de ce système une axiomatisation satisfaisante (1). Feys avait récemment pris la défense de Boole, jusqu'à légitimer l'usage des symboles "ininterprétables" (2), mais ses arguments sont jugés inacceptables par Dummet qui précise quelles restrictions il faut imposer aux conventions de Boole pour qu'on puisse vraiment justifier ses procédés (3).

Nous avons tenté seulement, pour notre part, de rendre compte des démarches principales de Boole, en restant aussi près que possible de ses intentions déclarées. Démarches en zig-zag, pourrait-on dire, et qui déconcertent. C'est que Boole mêle constamment des tâches que nous sommes accoutumés à voir séparées. On reconnaîtra pourtant la subtilité avec laquelle il fait de la notion de "concordance formelle" une technique d'analyse féconde: elle le conduit non seulement à un Calcul Logique qui mathématise le raisonnement, mais aussi, selon nous, à viser une formalisation de la pensée et du langage. Ainsi traduite, sa conviction qu'il atteignait les lois secrètes de l'esprit, paraît moins venir d'une soumission regrettable de ce novateur à la philosophie ambiante que d'une grande confiance dans la puissance d'analyse et de découverte du nouvel organon logique. Une même confiance inspire aujourd'hui ceux qui tiennent la technique logistique pour un instrument indispensable de la psychologie et de la théorie de la connaissance.

L'oeuvre de Boole est peut-être moins profonde que solidement charpentée. De par la foule de problèmes que Boole n'a pas soupçonnés, à cause justement de la prétention qu'il eut d'apporter un calcul proche de la perfection, son oeuvre peut paraître un peu courte à certains égards. Mais ce que nous pourrions tenir aujourd'hui en elle pour faiblesse fit, sur le moment, sa force. Pour contredire le mythe d'une Logique close dans sa perfection, il ne fallait pas moins qu'un nouveau système logique, parachevé selon une perfection d'un autre ordre. Simplement pour imposer l'idée que la logique symbolique était possible, il fallait qu'un tel système frappât les esprits par sa solidité. Or Boole en avait assez fait pour citer (4) avec quelque ironie un arrêt de Kant: "depuis l'époque d'Aristote, la logique n'a guère gagné en contenu, et aussi bien sa nature le lui interdit". Le mérite de Boole fut de montrer la marche en marchant; et la Logique commença à marcher du même pas que les Mathématiques.

---

(1) C. I. Lewis, A Survey of Symbolic Logic, ..., New-York, Dover Publications, 1960, p. 56.

(2) "Boole as a Logician", Proceedings of the Royal Irish Academy, sec. A, vol. 57, 1955, n° 6, pp. 97 - 106.

(3) The Journal of Symbolic Logic, 1959, pp. 203 - 209.

(4) p. 239. Boole renvoie à l'Introduction de la Logique de Kant. (Cf. E. Kant, Logique, trad. par L. Guillermit, Paris, Vrin, 1966, p. 20; cf. Critique de la raison pure, trad. Tremesaygues et Pacaud, Paris, P.U.F., 1965, p. 15).