MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. TH. GUILBAUD

Pour le deux cent cinquantième anniversaire de la mort de G. W. Leibniz

Mathématiques et sciences humaines, tome 17 (1966), p. 13-36
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__17__13_0>

G. Th. GUILBAUD

POUR LE DEUX CENT CINQUANTIEME ANNIVERSAIRE DE LA MORT DE G. W. LEIBNIZ

UN PROBLEME LEIBNIZIEN: LES PARTAGES EN NOMBRES ENTIERS

A

On croit que c'est une lettre de Leibniz qui constitue le plus ancien texte sur le problème général du partage d'un entier en parties qui soient elles-mêmes entières. L.E. Dickson consulté, avoue ne point connaître de références antérieures (voir le chapitre 3 du volume 2 de son History of the theory of Numbers). Mais, si l'on cherchait mieux, je crois qu'on pourrait esquisser une histoire intéressante*.

Voici le texte de Leibniz.

Leibniz à Joh. Bernoulli :
(G.W. Leibniz, mathem. schriften, Ed. Gehrardt, III/2, p. 601).
(...) an unquam considerasti numerum discerptionum vel divulsionum numeri dati, quot scilicet modis possit diuelli in partes duas, tres, etc. Videtur mihi eius determinatio non facilis et tamen digna quae habeatur (...) Vale, etc. Dabam Hanoverae 28 Julii 1699.

Ce qui veut dire, approximativement :
"as-tu jamais étudié le nombre des partages, ou découpages, d'un nombre donné
"- c'est-à-dire: de combien de façons peut-on partager en deux ou trois parties,
"ou davantage. Le calcul ne m'en parait pas facile, mais il est intéressant...".

On aura noté le vocabulaire: ce que nous appelons partage, Leibniz le nomme divulsio, mot latin authentique, qu'on pourrait peut être ressusciter: en français on connait les convulsions et les révulsions - mais pas encore les "divulsions".

Qu'il convienne de s'arrêter un peu sur les mots, tout le monde sait pourquoi: en français mathématique contemporain, "partition" désigne un ensemble de parties disjointes d'un ensemble dont elles sont l'union. Mais on trouve, chez les arithméticiens, le même mot "partition" pour désigner l'ensemble des cardinaux des parties susnommées. Dans ce dernier emploi 3+2+1 sera une "partition" du nombre 6. Bien entendu, il y a une correspondance tout à fait évidente entre les deux acceptions; mais un exemple simple fait bien voir qu'il n'est guère fa-

(*) Je m'en suis expliqué naguère dans un article sur: "les problèmes de partage", paru en 1952 dans Economie Appliquée et réimprimé, dans une monographie de l'A.F.I.R.O. sous le titre: Eléments de la théorie des jeux, Paris, Dunod, 1967).

cile d'exploiter cette correspondance en vue de résoudre les deux problèmes traditionnels de l'énumération et du dénombrement :

Partitions de l'ensemble (a,b,c,d)	Partitions de l'entier 4
(a,b,c,d)	4
(a,b,c) et (d)	3 + 1
(a,b,d) et (c)	
(a,c,d) et (b)	
(b,c,d) et (a)	
(a,b) et (c,d)	2 + 2
(a,c) et (b,d)	
(a,d) et (b,c)	
(a) et (b) et (c,d)	1 + 1 + 2
(a) et (c) et (b,d)	
(a) et (d) et (b,c)	
(b) et (c) et (a,d)	
(b) et (d) et (a,c)	
(c) et (d) et (a,b)	
(a) et (b) et (c) et (d)	1 + 1 + 1 + 1
Les quatorze partitions de l'ensemble.	Les cinq partitions de l'entier.

Notes:

1. L'application des partitions d'ensemble sur les partitions d'entiers est une surjection, mais la méthode des bergers n'est pas applicable, car il y a ici des moutons dits "à cinq pattes", c'est-à-dire n'ayant pas le nombre de pattes réglementaires.

Il n'est toutefois pas difficile de calculer le nombre des pattes: Soit une partition d'entier: $a + b + c + d + \dots = n$.

Faisons d'autre part la statistique des parts, c'est-à-dire comptons le nombre de parts qui sont égales :

exemple : $p = 3$ si $a = b = c \neq$ des autres
$q = 2$ si $d = e \neq$ des autres
$r = 1$ si $f \neq$ des autres
etc...

La formule multinomiale bien connue donne d'abord le nombre des applications soit :

$$\frac{n!}{a!b!c!\dots}$$

et l'on divise ce résultat par $p!q!r!\dots$

2. Notons aussi que tout serait bien plus facile avec les partitions (ou quotients) d'un ensemble ordonné: on retrouverait les structures simpliciales bien connues, et le Triangle de Pascal. Qu'il suffise ici d'indiquer la piste, elle est très commode.

Partitions d'un ensemble ordonné			Cardinaux Correspondants		
	abcd			4	
a,bcd	ab, cd	abc,d	1+3	2+2	3+1
a,b,cd	a,bc,d	ab,c,d	1+1+2	1+2+1	2+1+1
	a,b,c,d			1+1+1+1	

Les partitions ordonnées d'un entier n sont les "distributions" du statisticien :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

(population de n répartie en k classes). Certains auteurs de langue anglaise appellent cela une "composition" de l'entier n.

Mais laissons ces études "dans l'ordre" et revenons à celles, plus délicates, "dans le désordre".(*)

B

Je propose, compte tenu de ce qui vient d'être dit (et de ce qui n'est pas dit) de dire partage pour désigner ici la construction d'un système d'entiers de somme donnée (il s'agira bien entendu, tout au long, des entiers naturels, c'est-à-dire négatifs exclus ainsi que zéro).

Les partages de	sont :
2	2 et 1 + 1
3	3 et 2 + 1 et 1 + 1 + 1
4	4 et 3 + 1 et 2 + 2 et 2 + 1 + 1 et 1 + 1 + 1 + 1

(On a déjà dit qu'on ne tient pas compte de l'ordre des parts).

Il n'est guère besoin de méthode savante pour les énumérations ci-dessus. On peut même continuer un peu: le lecteur, même non entraîné, ne mettra guère que quelques minutes pour établir la liste complète des sept partages de 5, et celle des onze partages de 6.

(*) Nous allons laisser aussi bien de côté les problèmes concernant les partitions d'ensemble, ils ont déjà été présentés dans ce même Bulletin, dans le numéro 3, Avril 1963, pages 31 à 41: G. KREWERAS, Une dualité combinatoire. Renvoyons aussi nos lecteurs à un article de P. BERTIER: Partages, Parties et Partitions, dans la Revue "Metra", Vol. 6, n° 1, Mars 1967.

Mais on se fatiguera vite: pour les curieux disons tout de suite qu'il y a 42 façons de partager le nombre 10, 627 façons pour le nombre 20, pour 50 il y en a deux cent quatre mille et quelques; pour 100: cent quatre vingt dix millions et demi (environ).

Toujours pour les curieux, et pour eux seulement, j'ajoute que vers l'année 1918, le célèbre major (de l'Artillerie Royale, en retraite) Percy A. Macmahon, F.R.S., réussit, dit-on, après un mois de travail à calculer le nombre de partages de l'entier 200: il y en a un peu moins de trois mille neuf cent soixante treize milliards (mais bien sûr, le major a donné le nombre exact). Comme disait Leibniz: "faut le faire!" (en latin: "digna quae habeatur").

Dans la pratique, de quoi peut-on avoir besoin? Parfois d'énumérer les partages, parfois seulement de les dénombrer - et, sauf cas vraiment exceptionnels, il s'agira toujours de partager un entier très petit: disons moins de 50, pour fixer les idées. Il peut arriver aussi qu'on ait envie de connaître l'ordre de grandeur même très grossièrement approché du nombre des partages d'un entier un peu moins petit. Commençons par cette dernière curiosité.

C

ORDRE DE GRANDEUR DU NOMBRE DES PARTAGES

Supposons qu'on ne se soucie pas de calculer avec précision le nombre des partages $p(n)$ de l'entier n, mais qu'on ait seulement besoin d'en connaître l'ordre de grandeur: un moyen rapide et commode c'est de trouver le nombre des chiffres décimaux de $p(n)$ - c'est le logarithme décimal (arrondi à l'unité).

Une première règle peut être donnée, remarquable par sa simplicité :

> Tant que n ne dépasse pas trop 2500, le nombre de chiffre décimaux de $p(n)$ est assez voisin de la racine carrée de l'entier n.

On peut sur quelques exemples, se rendre compte de la valeur de l'approximation :

$p(25) = 1958$: 4 chiffres

$p(36) = 17977$: 5 chiffres

$p(49) = 173525$: 6 chiffres

$p(11^2)$ a 10 chiffres

$p(20^2)$ a 19 chiffres

$p(23^2)$ a 23 chiffres

$p(24^2)$ a 24 chiffres

$p(25^2)$ a 25 chiffres

$p(45^2)$ a 47 chiffres.

On a donc au départ: $p(n^2) = (n-1)$ chiffres (tant que $n \leqslant 20$)

puis: $p(n^2) = n$ chiffres (vers $n = 25$)

puis: $p(n^2) = (n+1)$ (vers $n = 40$), $n+2$ (vers 50) etc...

et il faut s'attendre à voir l'écart augmenter: $p(100^2)$ a 107 chiffres.

On constate donc, aisément mais empiriquement, une relation (approximative) entre le logarithme du nombre $p(n)$ des partages de l'entier n et la racine carrée de n.

On peut s'en ébahir. En fait c'est moins mystérieux qu'il ne semble au premier abord. Mais je ne veux pas alourdir le présent exposé (qui se veut très élémentaire). Pour les curieux je signalerai simplement qu'il faut partir de la fonction génératrice eulérienne décrite un peu plus loin (page 28) et utiliser quelque théorème de caractère "Taubérien" (c'est-à-dire liant le comportement asymptotique des coefficients d'une série à celui de la fonction somme). Le lecteur curieux pourra, par exemple, trouver dans une bibliothèque la collection des Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, et lire que le 2 Janvier 1917 G.H. Hardy et S. Ramanujan y firent une communication sur "une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n" . Ce sont trois pages de résumé qui donneront une petit idée des démarches du calcul.

On arrive, par ces moyens, à donner une idée du comportement de:

$\log p\,(n)/n^{1/2}$, quand n est grand

On peut d'ailleurs perfectionner de telles formules d'approximation. Par exemple, une valeur approchée de

$$p\,(n^2)$$

est donnée par le quotient

$$\exp\,(K\,\pi\,n)/q\,n^2$$

(à condition de prendre $3\,K^2 = 2$, $q^2 = 48$, π comme de coutume $= 3,14...$ et l'exponentielle népérienne c'est-à-dire de base $= 2,718....$)

Avec cette formule plus raffinée on trouve :

	Approximation	vraie valeur
$n = 10$	48	42
$n = 25$	2138	1958
$n = 50$	217590	204226
$n = 100$	$1,98.10^8$	$1,90.10^8$
$n = 200$	$4,07.10^{12}$	$3.97.10^{12}$
$n = 1000$	$2,44.10^{31}$	$2,41.10^{31}$

On peut prouver que l'approximation est toujours par excès, mais que l'erreur <u>relative</u> diminue et tend vers zéro.

Il existe encore d'autres formules, encore plus précises; elles s'appuient toutes sur le développement eulérien déjà cité, qu'il faut rattacher à la théorie des fonctions de la variable complexe (fonctions elliptiques, fonctions modulaires, voir la référence n° 3 donnée dans la note bibliographique, infra). Les détours sont assez longs, mais le tout est finalement assez simple à comprendre.

Mais il nous faut revenir maintenant à une manière très peu savante de poser le problème de partages d'un entier naturel.

D

FAIRE LA MONNAIE

Il existe en France, aujourd'hui, des billets de 5 francs, de 10 francs, de 50 francs et de 100 francs.

De combien de façons peut-on échanger un billet de 100 francs contre plusieurs billets ?

$100 = 50 + 50$

$100 = 50 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$

$100 = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5$

etc...

Il s'agit, comme on le verra sans peine, d'énumérer et de dénombrer les solutions (en nombres entiers) de l'équation :

$$x + 2y + 10z = 20 \tag{1}$$

(On a pris pour "unité" la plus petite valeur en jeu c'est-à-dire le billet de cinq francs).

On aurait pu aussi bien parler de pièces: il y en a de 5 centimes, de 10, 20, 50 centimes, de 1 franc et 5 francs. Changer une pièce de cinq francs, c'est trouver une solution de l'équation :

$$100 = x + 2y + 4z + 10t + 20u \tag{2}$$

Examinons l'équation (1); c'est facile :

$z = 2 : x + 2y = 0 ; y = 0$: $x = 0$

$z = 1 : x + 2y = 10 ; y = 0,1,2,3,4,5$: $x = 10,8,6,4,2,0$

$z = 0 : x + 2z = 20 ; y = 0,1,2,\dots,9,10$: $x = 20,18,\dots,2,0$

Il y a donc $11+6+1 = 18$ façons de faire la monnaie.

Nous pouvons, par la même occasion, dresser un tableau des solutions de

$$x + 2y + 10z = a$$

pour n'importe quelle valeur de a (payer 5a francs en billets de 5, 10 ou 50 francs). On choisit d'abord z, d'où le <u>reste</u>: $a' = a - 10z$.

a	0	1	2 ... 9	10	11	12 ... 19	20	21 ... 30	31 ...
z = 0, a' =	0	1	2 ... 9	10	11	12 ... 19	20	21 ... 30	31 ...
z = 1, a' =				0	1	2 ... 9	10	11 ... 20	21 ...
z = 2, a' =							0	1 ... 10	11 ...
z = 3, a' =								0	1 ...

Il suffit donc de savoir dénombrer les solutions de

$$x + 2y = a'$$

Même méthode: on choisit d'abord y, d'où le reste $a'' = a' - 2y$

a'	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
y = 0, a'' =	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ...
y = 1, a'' =			0	1	2	3	4	5	6 ...
y = 2, a'' =					0	1	2	3	4 ...
y = 3, a'' =							0	1	1 ...

Finalement, on est conduit aux solutions de

$$x = a''$$

dont la liste est facile à établir, puisqu'il n'y en a jamais qu'une seule.

On peut donc maintenant, en sens inverse, calculer le nombre des solutions.

1) $x = a''$

a''	0	1	2	3	...
Nombre de solutions	1	1	1	1	...

2) $x + 2y = a'$

a'	0	1	2	3	4	5	6	7	...
pour: a'' = a'	1	1	1	1	1	1	1	1	...
pour: a'' = a'-2			1	1	1	1	1	1	...
pour: a'' = a'-4					1	1	1	1	...
pour: a'' = a'-6							1	1	...
....									
Nombre total	1	1	2	2	3	3	4	4	...

3) $x + 2y + 10z = a$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
a' = a	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	...
a' = a-10											1	1	2	2	...
a' = a-20															...
Total	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	7	7	9	9	...

a	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	...
a' = a	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	...
a' = a-10	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	...
a' = a-20							1	1	2	2	...
Total	11	11	13	13	15	15	18	18	21	21	...

On retrouve le cas particulier traité plus haut (pour a = 20) :

$$11 + 6 + 1 = 18$$

Il est évident que l'algorithme qu'on vient d'essayer est valable pour dénombrer les solutions de toutes équations de la forme: $ax + by + cz + dt + \text{etc} \ldots = n$.

Voici, sans autres détails, une suite de résultats.

Nombre des solutions de $x = a$

a	0	1	2	3	4	...
	1	1	1	1	1	...

Nombre des solutions de $x + 2y = a$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Si y = 0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
Si y = 1			1	1	1	1	1	1	...
Si y = 2					1	1	1	1	...
Si y = 3							1	1	...
									...
Total	1	1	2	2	3	3	4	4	...

Nombre des solutions de $x + 2v + 3z = a$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Si $z = 0$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	...
Si $z = 1$				1	1	2	2	3	3	4	4	...
Si $z = 2$							1	1	2	2	3	...
Si $z = 3$										1	1	...
...												...
Total	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	...

Nombre de solutions de $x + 2y + 3z + 4t = a$

On reprend la suite précédente, qu'on additionne à elle-même après les décalages de quatre rangs :

1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	...
				1	1	2	3	4	5	7	...
								1	1	2	...
1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	...

Et on recommence pour $x + 2y + 3z + 4t + 5u = a$:

1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	...
					1	1	2	3	5	6	...
										1	...
1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	...

Puis pour $x + 2y + \ldots + 5u + 6v = a$

1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	...
						1	1	2	3	5	...
1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	...

et ainsi de suite.

(Pour les curieux: une procédure analogue a été utilisée en 1786 par le géomètre italien Malfatti).

On pourrait souhaiter un algorithme plus économique: c'est ce qu'on appelle en général une "formule". Pour cela on peut exploiter une idée due à J.F.W. Herschel (1818), et développée plus tard par Cayley (1856) et Sylvester (1882) et d'autres encore (pour les détails historiques, voir l'History de L.E. Dickson, déjà citée).

On a dans ce qui précède construit une fonction $N(a)$ de la variable entière a. Cette fonction est construite par sommation de fonctions similaires après décalage.

Mais c'est une généralisation de la très vieille procédure des nombres "figurés", systématisée par Pascal (1654) dans son Triangle arithmétique, qui marque le début du Calcul Intégral :

1	1	1	1	1	...
	1	1	1	1	...
		1	1	1	...
			1	1	...
				1	...
1	2	3	4	5	...

(triangulaires)

1	2	3	4	5	...
	1	2	3	4	...
		1	2	3	...
			1	2	...
				1	...
1	3	6	10	15	...

(pyramidaux)

1	3	6	10	...
	1	3	6	...
		1	3	...
			1	...
1	4	10	20	...

Or, les fonctions ainsi construites peuvent être exprimées sous forme de polynomes :

$$a, \quad \frac{1}{2}\, a(a+1), \quad \frac{1}{6}\, a(a+1)\,(a+2), \qquad \text{etc...}$$

Mais le nouvel algorithme présente une complication que n'avait pas l'ancien: les décalages sont variables. Il faut donc apporter quelques modifications. Reprenons par exemple, le cas traité plus haut, de l'équation (la monnaie de cent francs) :

$$x + 2y + 10z = a$$

et considérons seulement pour commencer, les valeurs $a = 0, 10, 20, 30, \ldots$

Le Tableau des calculs est alors aussi régulier que le triangle pascalien :

a	0	10	20	30	40	50	
	1	6	11	16	21	26	...
		1	6	11	16	21	...
			1	6	11	16	...
				1	6	11	...
					1	6	...
						1	...
	1	7	18	34	55	81	...

et il n'est pas difficile de trouver une formule polynomiale :

$$N(a) = \frac{(a+10)\,(a+4)}{40}$$

On a donc une fonction polynome qui coïncide avec la fonction cherchée si a est multiple de 10.

On peut recommencer pour les valeurs $a = 1, 11, 21, 31$, etc...

Le tableau est le même que le précédent; on a donc dans ce cas :

$$N(a) = \frac{(a+9)\ (a+3)}{40}$$

Puis pour a = 2, 12, 22, 32, etc... on aura :

2	7	12	17	...
	2	7	12	...
		2	7	...
			2	...
2	9	21	38	...

ce qui donne la formule :

$$\frac{(a+8)\ (a+6)}{40}$$

On peut continuer de la sorte, et obtenir facilement :

Si a = multiple de 10
et si a = (mult. 10) + 6 $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+10)\ (a+4)$

Si a = (mult. 10) + (1 ou 7) $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+9)\ (a+3)$

Si a = (mult. 10) + (2 ou 4) $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+8)\ (a+6)$

Si a = (mult. 10) + (3 ou 5) $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+7)\ (a+5)$

Si a = (mult. 10) + 8 $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+12)\ (a+2)$

Si a = (mult. 10) + 9 $\qquad N = \frac{1}{40}\ (a+11)\ (a+1)$

On voit que la fonction (N) de (a) emprunte tour à tour ses valeurs à six polynomes du second degré :

$$N = P\ a^2 + Q\ a + R$$

avec : $P = \frac{1}{40}$, Q = alternativement : $\frac{14}{40}$ et $\frac{12}{40}$

ce qu'on écrira $\qquad Q = (7,6)/20$

et enfin : $\qquad R = (40,27,48,35,40,27,24,11)/40$

La formule qui donne N, (le programme du calcul), peut donc s'écrire en langage de polynome à condition d'y adjoindre (c'est ce qu'indiquait Herschel) des fonctions périodiques, ici désignées par les notations :

(p,q), (p,q,r), et ainsi de suite.

On pourra, à titre d'exercice, évaluer d'une façon analogue le nombre N des solutions entières de :

$$x + 2y + 3z + 4t = a$$

On trouve (c'est un résultat de Herschel) :

$$N = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

avec :

$$A = \frac{1}{144}, \quad B = \frac{5}{48}, \quad C = (0,-1)/16$$

D = une fonction périodique de période 12, que le lecteur se fera un plaisir de trouver.

Quelques manipulations conduisent à donner à cette dernière une forme assez simple :

$$D = \frac{4}{9} + \frac{1}{16}(3,0) + \frac{1}{9}(2,1,0) + \frac{1}{4}(1,0,0,0)$$

Mais comme N est nécessairement entier, on voit qu'il ne sera pas utile, le plus souvent, de calculer explicitement la valeur de D.

Note: Au lieu d'exprimer N comme combinaison linéaire (à coefficients périodiques) des monomes. a^3, a^2, a^1, a^0, on peut aussi bien prendre pour base les polynomes binomiaux. Par exemple, on pourra vérifier que :

$$N = A' \frac{a+4.a+5.a+6}{6} + B'(a+5) + C'$$

avec :

$$A' = \frac{1}{24} \quad \text{et} \quad B' = \frac{1}{9} - \frac{1}{16}(2,3)$$

et

$$C' = \frac{1}{9}(+1,0,-1) + \frac{1}{8}(1,0,-1,0)$$

E

UNE METHODE D'ENUMERATION DES PARTAGES

1. - Enumération

Soit à construire par exemple le catalogue des partages du nombre 6. Il est assez naturel de procéder comme suit :

1°) on écrira 6 = 1 + (...)

et on est ramené à chercher, pour les écrire dans la parenthèse (...), les partages du nombre 5. Supposons que cet inventaire ait déjà été fait.

2°) Ensuite on passe à 6 = 2 + (...) et il faut écrire dans la parenthèse, des partages de 4 mais on ne devra pas utiliser 1 dans ce partage de 4, sous peine de retrouver un partage déjà écrit précédemment (au 1°).

3°) Enfin: 6 = 3 + 3 qui est ici le seul de son espèce.

4°) Pour terminer il ne faut pas oublier : 6 = 6. D'où une méthode (récurrente) que voici :

Si l'on a déjà énuméré les partages de tous les entiers jusqu'à N-1, pour partager le nombre N on devra :

1°) Prendre tous les partages de N-1 et leur ajouter 1.

2°) Prendre ceux des partages de N-2 qui ne comportent pas de part inférieure à 2, et leur adjoindre 2 à chacun.

3°) Prendre les partages de N-3 dont aucune part n'est inférieure à 3, et adjoindre 3 à chacun.

4°) Et continuer de la sorte pour N-4, N-5, etc...

5°) Achever par le partage (qui n'en est pas un au sens vulgaire) dans lequel il n'y a qu'une seule part, laquelle "prend tout".

On voit alors qu'une telle procédure exige de classer les partages selon la valeur de la plus petite part.

Classification des partages selon $\begin{cases} S = \text{somme à partager} \\ PP = \text{plus petite part} \end{cases}$

	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6
PP = 1	1+1	1+1+1 1+2	1+(1+1+1) 1+(1+2) 1+(3)	1+(tous les partages de S = 4)	1+(tous les partages de S = 5)
PP = 2	2	Néant	2+(2)	2+(3)	2+(2+2) 2+(4)
PP = 3	Néant	3	Néant	Néant	3+(3)
PP = 4	Néant	Néant	4	Néant	Néant
PP = 5	Néant	Néant	Néant	5	Néant
PP = 6	Néant	Néant	Néant	Néant	6

On voit comment se construit progressivement un tableau de ce genre: la classe (S, PP) se construit en ajoutant au nombre PP l'ensemble de toutes les classes (S-PP, PP) (S-PP, PP+1) (S-PP, PP+2) etc... (voir à ce propos l'exercice proposé, in fine).

2. – Dénombrement

Si l'on s'intéresse seulement au nombre des partages dans chaque classe, on pourra construire un tableau de même forme en n'écrivant que les cardinaux des classes.

On commence par repérer, ce qui est très facile, les classes vides.

C'est-à-dire :

	S = 2	S = 3	S = 4	S = 5	S = 6
PP = 1					
PP = 2		0			
PP = 3	0		0	0	
PP = 4	0	0		0	0
PP = 5	0	0	0		0
PP = 6	0	0	0	0	

puis on dresse le tableau :

	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7	S=8	S=9	S=10	S=11	S=12
PP=1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56
PP=2	1	0	1	1	2	2	4	4	7	8	12
PP=3	0	1	0	0	1	1	1	2	2	3	4
PP=4			1	0	0	0	1	1	1	1	2
PP=5				1	0	0	0	0	1	1	1
PP=6					1	0	0	0	0	0	1
PP=7						1	0	0	0	0	0
PP=8							1	0	0	0	0
PP=9								1	0	0	0
PP=10									1	0	0
PP=11										1	0
PP=12											1

Le premier nombre d'une colonne égale la somme de tous ceux de la colonne précédente; le second s'obtient en additionnant, mais à partir de la seconde ligne seulement, ceux de l'avant dernière colonne; le troisième en additionnant, à partir de la troisième ligne seulement, ceux de la colonne qui précède l'avant dernière, et ainsi de suite.

Ce qu'on a appelé plus haut, le nombre des partages p(S) de la somme S n'est autre que ce qu'on lit dans la première ligne du tableau ci-dessus.

Désignons donc par $p(S)$ la somme $F(S,1) + F(S,2) + \ldots$ des nombres d'une colonne du tableau précédent. On a, comme il vient d'être dit :

$$F(S,1) = p(S-1)$$

puisque $F(S,2)$ est la somme de la colonne $(S-2)$ sauf le premier terme; on a :

$$F(S,2) = p(S-2) - F(S-2,1) = p(S-2) - p(S-3)$$

On peut continuer :

$$F(S,3) = p(S-3) - F(S-3,1) - F(S-3,2)$$

c'est-à-dire :

$$F(S,3) = p(S-3) - p(S-4) - p(S-5) + p(S-6)$$

De même on pourrait voir que :

$$F(S,4) = p(S-4) - p(S-5) - p(S-6) + p(S-8) + p(S-9) - p(S-10)$$

et l'on peut continuer.

Comme enfin $p(S) = F(S,1) + F(S,2) + F(S,3) + F(S,4) + \text{etc...}$

Il vient la formule de la Récurrence :

$$\boxed{p(S) = p(S-1) + p(S-2) - p(S-5) - p(S-7) + \text{etc....}}$$

qui permet de calculer successivement les nombres $p(S)$, à partir des premières valeurs $p(2) = 2$, $p(1) = 1$, $p(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
p(3) &= p(1) + p(2) &&= 1 + 2 = 3\\
p(4) &= p(3) + p(2) &&= 3 + 2 = 5\\
p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) &&= 5 + 3 - 1 = 7\\
p(6) &= p(5) + p(4) - p(1) &&= 7 + 5 - 1 = 11\\
p(7) &= p(6) + p(5) - p(2) - p(0) &&= 11 + 7 - 2 - 1 = 15\\
p(8) &= p(7) + p(6) - p(3) - p(1) &&= 15 + 11 - 3 - 1 = 22\\
p(9) &= p(8) + p(7) - p(4) - p(2) &&= 22 + 15 - 5 - 2 + 30
\end{aligned}$$

C'est ainsi, Hardy le dit, que fit le major Macmahon. Ce qui suppose qu'il avait précisé la forme de la formule de récurrence (qu'y a-t-il derrière les "etc." écrits ci-dessus?). Mais Euler y avait déjà pensé, vers les années 1740 : il faut dire maintenant ce qu'il avait découvert.

F

UNE METHODE DE DENOMBREMENT DANS LE GOUT EULERIEN (*)

1.- Elle utilise la technique des fonctions génératrices. Tout le monde sait que la formule du binome fut le premier exemple, exploité à partir de Pascal (1654), de cette méthode très puissante. Elle consiste à remarquer les vertus combinatoires du calcul algébrique (thème leibnizien par excellence).

Par exemple:

$$(1+a)\ (1+b) = 1 + a + b + ab$$
$$(1+a)\ (1+b)\ (1+c) = 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc$$

et l'on voit que l'on construit ainsi les "combinaisons" ou parties d'un ensemble. Il s'en suit que les formules:

$$(1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$$
$$(1+t)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3$$

et ainsi de suite, donnent, par leurs coefficients, le dénombrement des combinaisons.

On dira que le polynome $(1+t)^n$ est la fonction génératrice des nombres de parties d'un ensemble de n éléments: le nombre des parties à k éléments n'étant autre que le coefficient du terme en t^k.

Il s'agit alors ici, en suivant l'idée d'Euler, d'inventer la fonction génératrice du nombre des partages. Il suffit d'y penser comme on va voir.

2. - La fonction génératrice

Voici la recette de la fonction génératrice: faire le produit des polynomes suivants:

$$(1+t+t^2+t^3+\text{etc.})$$
$$(1+t^2+t^4+t^6+\text{etc.})$$
$$(1+t^3+t^6+t^9+\text{etc.})$$
$$(1+t^4+t^8+t^{16}+\text{etc.})$$

et ainsi de suite.

Pour avoir les premiers termes, par exemple les cinq premiers, il suffit de se limiter aux termes de degré inférieur à 5 dans chaque facteur:

$$(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5) \quad (1+t^2+t^4) \quad (1+t^3) \quad (1+t^4) \quad (1+t^5)$$

ce qui donne (en laissant tomber les termes au delà du cinquième degré):

$$1 + t + 2\ t^2 + 3\ t^3 + 5\ t^4 + \ 7\ t^5 + \text{etc} \ldots$$

(*) J'interprète ici, avec beaucoup de libertés, ce qu'Euler communiquait à l'Académie Pétersbourgeoise en 1741, et qu'il développa ultérieurement dans son Analyse infinitésimale (Introductio in Analysin Infinitorum, I, XVI; 1748).

On voit que les coefficients sont les nombres de partages de l'exposant. En effet: il y a par exemple 7 façons d'obtenir t^5, ce sont :

en prenant dans le :	1° façon	2° façon	3°	4°	5°	6°	7°
1° facteur	t^0	t^1	t^2	t^3	t^5	t	t^0
2° facteur	t^0	t^0	t^0	t^2	t^0	$(t^2)^2$	t^2
3° facteur	t^0	t^0	t^3	t^0	t^0	t^0	t^3
4° facteur	t^0	t^4	t^0	t^0	t^0	t^0	t^0
5° facteur	t^5	t^0	t^0	t^0	t^0	t^0	t^0

qui correspondent respectivement aux partages :

prendre le nombre 1	0 fois	1	2	3	5	1	0	x
prendre le nombre 2	0 fois	0	0	1	0	2	1	y
prendre le nombre 3	0 fois	0	1	0	0	0	1	z
prendre le nombre 4	0 fois	1	0	0	0	0	0	t
prendre le nombre 5	1 fois	0	0	0	0	0	0	u

(Chaque colonne représente une façon d'obtenir la somme 5, c'est-à-dire une solution de $x + 2y + 3z + 4t + 5u = 5$).

En prolongeant indéfiniment les polynomes on obtient des séries entières et nous écrirons, comme faisait Euler :

$$1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1-t}$$

$$1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots = \frac{1}{1-t^2}$$

$$1 + t^3 + t^6 + t^9 + \dots = \frac{1}{1-t^3} \qquad \text{etc...}$$

La fonction génératrice cherchée prend donc la forme :

$$G(t) = \frac{1}{(1-t)\ (1-t^2)\ (1-t^3)\ \dots}$$

Il suffit alors de pouvoir écrire le développement :

$$G(t) = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots$$

pour connaître les p_n c'est-à-dire les nombres de partages de l'entier n.

3. - La suite pentagonale

Euler commence donc par étudier le produit :

$$(1-t)\ (1-t^2)\ (1-t^3)\ \ldots$$

En effectuant courageusement les calculs, on trouve :

$$1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + t^{22} + t^{26} - t^{35} \text{ etc...}$$

Mais quelle est la loi des coefficients et des exposants?

a) Alternance des signes: deux signes moins suivent deux signes plus et inversement.

b) Tous les coefficients sont en valeur absolue égaux à l'unité.

c) Reste à construire la suite des exposants :

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, etc... (Pent)

On peut découvrir la loi par induction: chercher d'abord les différences entre les nombres successifs de la suite (Pent):

Suite des différences: 1, 1, 3, 2, 5, 3, 7, 4, 9, ...

et l'on voit que la suite des différences résulte de l'insertion de la suite des entiers dans celle des impairs :

1 3 5 7 9 ...
 1 2 3 4 ...

Si cette remarque est vraie on peut en déduire facilement une formulation de la suite (Pent).

Les nombres de rang pair : 0, 2, 7, 15, 26, ...
sont : 0, 2, 3+4, 4+5+6, 5+6+7+8, ..., n+(n+1)+...+(2n-1);

Finalement on vérifiera que tous les entiers de la suite sont obtenus au moyen de la formule :

$$\frac{1}{2}\,(3\,x^2 - x)$$

en donnant à x les valeurs entières positives et négatives. Jadis on disait que c'étaient des nombres "pentagonaux": somme des termes d'une progression arithmétique de raison 3.

Quant à savoir si toutes ces remarques sont vraies? Par la récurrence, bien sûr!

Rappelons à cette occasion la vieille nomenclature (nombres "figurés").

Les nombres triangulaires :

A	(A) : 1
B B	(A et B) : 1+2 = 3
C C C	(A, B et C) : 1+2+3 = 6
D D D D	(A, B, C, D) : 1+2+3+4 = 10 etc...
. . . . .	

Les nombres carrés :

A B C D	(A) : 1
B B C D E	(AB) : 1+3
C C C D E . . .	(ABC) : 1+3+5
D D D D E F . . .	(ABCD) : 1+3+5+7
E E E E E F . . .	etc...
. . . .	

Les nombres pentagonaux :

... E D C B A B C D E ...	(A) : 1
... E D C B B C D E ...	(AB) : 1+4
... F E D C C C D E F ...	(ABC) : 1+4+7
... F E D D D D E F ...	(ABCD) : 1+4+7+10
... G F E E E E E F G ...	etc...
....	

(une déformation de la figure: plier la première ligne pour en faire un angle de sommet A, et l'on fait apparaître d'authentiques pentagones).

Avec toutes ces données il devient facile de construire la suite (Pent) aussi loin qu'on voudra et par conséquent le développement du produit :

$$\frac{1}{G(t)} = (1-t)\ (1-t^2)\ (1-t^3)\ (1-t^4)\ \ldots = 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 \ \ldots$$

4. - Achèvement du calcul

On a :

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \ldots = \frac{1}{(1-t)\ (1-t^2)\ (1-t^3)\ \ldots} = \frac{1}{1-t-t^2+t^5\ldots}$$

ou, en faisant le produit :

$$(p_o + p_1 t + p_2 t^2 + \ldots)\ (1 - t - t^2 + t^5 + t^7 + \ldots) = 1$$

on doit annuler tous les coefficients, sauf le premier

$$\begin{aligned} 1 &= p_o \\ 0 &= p_1 - p_o \\ 0 &= p_2 - p_1 - p_o \\ 0 &= p_3 - p_2 - p_1 \\ 0 &= p_4 - p_3 - p_2 \\ 0 &= p_5 - p_4 - p_3 + p_o \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$p_n - p_{n-1} - p_{n-2} + p_{n-5} + p_{n-7} - p_{n-12} - p_{n-15} + p_{n-22} + \ldots = 0$$

Ce qui permet le calcul par récurrence. (On retrouve la première méthode(*) avec, en plus, la loi de construction, celle de la suite Pent).

Voici le tableau des calculs (tels que je les ai faits il y a huit ans, ce qui explique pourquoi je me suis arrêté au vingt cinquième terme; remarque adressée, comme de coutume, aux seuls curieux).

	$p_0 = 1$	$= 1$
1° série (1)	$p_1 = 1$	$= 1$
2° série (3)	$p_2 = 1+1$	$= 2$
	$p_3 = 2+1$	$= 3$
	$p_4 = 2+3$	$= 5$
3° série (2)	$p_5 = 5 + 3 - 1$	$= 7$
	$p_6 = 7 + 5 - 1$	$= 11$
4° série (5)	$p_7 = 11 + 7 - 2 - 1$	$= 15$
	$p_8 = 15 + 11 - 3 - 1$	$= 22$
	$p_9 = 22 + 15 - 5 - 2$	$= 30$
	$p_{10} = 30 + 22 - 7 - 3$	$= 42$
	$p_{11} = 42 + 30 - 11 - 5$	$= 56$
5° série (3)	$p_{12} = 56 + 42 - 15 - 7 + 1$	$= 77$
	$p_{13} = 77 + 56 - 22 - 11 + 1$	$= 101$
	$p_{14} = 101 + 77 - 30 - 15 + 2$	$= 135$
6° série (7)	$p_{15} = 135 + 101 - 42 - 22 + 3 + 1$	$= 176$
	$p_{16} = 176 + 135 - 56 - 30 + 5 + 1$	$= 231$
	$p_{17} = 231 + 176 - 77 - 42 + 7 + 2$	$= 297$
	$p_{18} = 297 + 231 - 101 - 56 + 11 + 3$	$= 385$
	$p_{19} = 385 + 297 - 135 - 77 + 15 + 5$	$= 490$
	$p_{20} = 490 + 385 - 176 - 101 + 22 + 7$	$= 627$
	$p_{21} = 627 + 490 - 231 - 135 + 30 + 11$	$= 792$
7° série (4)	$p_{22} = 792 + 627 - 297 - 176 + 42 + 15 - 1$	$= 1002$
	$p_{23} = 1002 + 792 - 385 - 231 + 56 + 22 - 1$	$= 1255$
	$p_{24} = 1255 + 1002 - 490 - 297 + 77 + 30 - 2$	$= 1575$
	$p_{25} = 1575 + 1255 - 627 - 385 + 101 + 42 - 3$	$= 1958$

Les numéros qui commencent une nouvelle série sont évidemment : 2, 5, 7, 12, 15, 22 ... on reconnait la suite (Pent.).

Dans chaque série le nombre des additions et soustractions est le même.

(*) Cf. ci-dessus, page 27.

Les effectifs dans les séries de rang pair sont les impairs successifs. et ceux des séries de rang impair sont tous les entiers successifs.

G

ORGANISATION DE L'ENSEMBLE DES PARTIES

On peut d'abord utiliser des règles alphabétiques.

On range les parts dans l'ordre croissant (ou décroissant) et les partages peuvent être rangés dans un ordre lexicographique (on sous-entend des zéros s'il le faut).

Il y a deux ordres possibles : voici un exemple.

Liste des quarante-deux partages de l'entier dix (en ordre alphabétique) :

(dix)	1117	111 115
19	1126	111 124
28	1135	111 133
37	1144	111 223
46	1225	112 222
55	1234	1 111 114
118	1333	1 111 123
127	2224	1 111 222
136	2233	11 111 113
145	11116	11 111 122
226	11125	111 111 112
235	11134	1 111 111 111
244	11224	
334	12223	
	22222	

En lisant les mots dans l'ordre inverse (comme dans la plupart des dictionnaires) :

1111111111	4111111	61111
211111111	421111	6211
22111111	42211	622
2221111	4222	631
22222	43111	64
31111111	4321	7111
3211111	433	721
322111	4411	73
32221	442	811
331111	511111	82
33211	52111	91
3322	5221	(dix)
3331	5311	
	532	
	541	
	55	

On peut se proposer de faire un programme pour l'algorithme qui énumère les partages dans l'un ou l'autre de ces deux ordres.

Prenons le premier pour exemple.

Il suffit d'étudier la nature des transitions telles que :

005(5) - 011(8);
00223(3) - 01111(6);
112(6) - 113(5):
114(4) - 122(5);
1111(6) - 1112(5);   etc...

On observera d'abord que la dernière part mise entre parenthèse est déterminée par l'ensemble des autres parts; il suffit donc de noter les transitions précédentes sous la forme :

05 - 11; 0223 - 1111; 2 - 3; 14 - 22; 1 - 2; etc...

Les règles s'écrivent alors sans peine (Bon exercice de programmation). On n'a pas attendu l'avènement des machines: dès 1747, Boscovich donnait un programme, Kramp un autre en 1808 (voir Dickson).

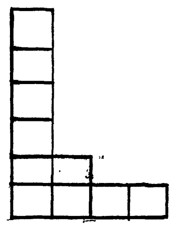
Au lieu de se contenter de classer les partages selon le nombre de parts. on peut utiliser simultanément d'autres caractères. Par exemple, (on en a vu l'emploi dans un paragraphe antérieur) selon la plus grande part.

plus grande part =	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
une part	x									
deux parts		19	28	37	46	55				
trois parts			118	127	136 226	145 235	244 334			
quatre parts				1^37	1126	1135 1225	1144 1234 2^34	1333 2233		
cinq parts					1^46	1^325	1^334 11224	12^33 11233	2^5	
six parts						1^55	1^424	1^433 1^3223	112^4	
sept parts							1^54	1^523	1^42^3	
huit parts								1^73	1^622	
neuf parts									1^82	
dix parts										1^x

Si l'on compte le nombre de cas dans chaque classe. on trouve un dispositif terriblement symétrique :

1........
.11111....
..11222...
...11232..
....11221.
.....1121.
......111.
.......11.
.........1

Il est en effet facile d'établir une relation entre les deux caractères: nombre de parts et plus grande part. Le mieux est de faire comme fit Sylvester (sur les conseils de Ferrers, en 1853). c'est-à-dire de montrer une représentation graphique d'un partage; soit par exemple: $10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 4$. On dessinera



Mais si on lit en colonne (quand on a dessiné en lignes) il vient :

$$6 + 2 + 1 + 1 = 10.$$

Le nombre des parts (six) est devenu la plus grande part.

Ce dispositif graphique ayant plus tard servi à Alfred Young dans ses études sur les représentations du groupe symétrique, certains appellent diagramme de Young l'objet en question: mais ce que Young appelle "tableaux" sont des schémas du type précédent avec des écritures dans les cases. G. Kreweras, dans le cahier n°6 du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle (Paris, 1965, Institut de statistique), exploite ingénieusement cette veine.

H

EXERCICE SUPPLEMENTAIRE (en plus de tous ceux qu'on a rencontré ci-dessus):

Appelons $g(n.m)$ le nombre des partages de l'entier n pour lesquels la plus grande part est égale à m et $p(n.m)$ celui des partages où la plus petite part est égale à m.

Appelons G et P les fonctions analogues aux précédentes mais définies par: ... la plus grande part au plus égale à m, la plus petite part au moins égale à m.

On a donc :

$$G(n,m) = G(n.m - 1) + g(n.m)$$
$$P(n.m) = P(n.m + 1) + p(n.m)$$

Etablir ensuite :

$$g(n.m) = G(n - m,m)$$
$$p(n.m) = P(n - m.m)$$

En déduire divers algorithmes récurrents et retrouver quelques uns des résultats précédents.

I

ORIENTATION BIBLIOGRAPHIQUE

La littérature concernant notre sujet est exceptionnellement riche. L. E. Dickson, dans son "History" déjà citée consacre un chapitre aux "Partitions" et donne 231 références, dans un désordre qui exige du lecteur une bonne connaissance du sujet, s'il espère s'y retrouver. Les livres classiques de combinatoire (Netto, MacMahon, Riordan, etc.) sont eux aussi fort prolixes.

Je pense être utile à mes lecteurs éventuels en faisant le contraire. Mais comme je ne citerai que ce que j'ai lu et pratiqué (qu'on me le pardonne!), il se peut que mon choix soit contestable (on peut contester: écrire à la Rédaction du présent bulletin).

1. - Si l'on est pressé et qu'on ait besoin de résultats seulement, on doit se procurer les belles tables de Gupta :

Tables of partitions, by Hansraj Gupta, C.E. Gwyther and J.P. Miller (Royal Society mathematical tables, nr. 4), Cambridge University Press, 1958. (3L. et 3 sh.) 132 pages du format de notre bulletin.

Avec une bibliographie (plus de quatre vingt références), on y trouvera 26 pages d'Introduction qui donne, très sommairement, toute l'algèbre du problème.

Les tables donnent le nombre (exact) de partages des entiers de 1 à 1000. Ainsi que le nombre de partages dont la plus grande part est donnée. Et des tables auxiliaires qui permettent encore d'aller plus loin.

2. - Pour étudier le problème lui-même, et les méthodes, on peut recourir d'abord à l'introduction des tables précédentes. Mais il faut y joindre un chapitre (le XIX pp. 273-296) du grand classique :

G.H. Hardy and E.M. Wright, An introduction to the theory of Numbers, Oxford, Clarendon Press. (Première édition 1938, souvent réimprimé depuis).

3. - Chez: Erdelyi, Magnus et Tricomi, Higher transcendantal functions (Bateman manuscript project, Tome 3, Pages 175-180; McGrawhill, New-York, 1955), on trouve un résumé très condensé en quatre pages des résultats théoriques les plus importants (avec 24 références): liaison avec les fonctions elliptiques (théta de Jacobi) et formules d'approximation.

4. - Il ne faut s'aventurer dans MacMahon, Combinatory analysis, 2 volumes (1915-1916) (réimprimé en un volume, Chelsea, New-York, 1960) que si on a beaucoup de temps devant soi.

Quant à Riordan, an introduction to combinatorial analysis (Wiley, New-York, 1958), il consacre une vingtaine de pages aux "partitions", avec quelques indications parcimonieuses sur les formules à la Herschel; mais l'introduction aux tables de Gupta, citée plus haut, est plus abondante et plus claire.

5. - On a toujours beaucoup de satisfactions en lisant Euler: on peut trouver, dans les bibliothèques publiques, quelque édition acceptable de l'Analyse infinitésimale. Soit en latin, soit en traduction française (par Labey, Paris, 1835).