MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

E. COUMET

Logique, mathématiques, et langage dans l'œuvre de G. Boole - I

Mathématiques et sciences humaines, tome 15 (1966), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1966__15__1_0>

E. COUMET

LOGIQUE, MATHEMATIQUES, ET LANGAGE dans l'oeuvre de G. BOOLE - I

- A -

L'Histoire joue parfois de curieux tours aux créateurs. Ils peuvent devenir célèbres, en quelque sorte par ricochet, pour un résultat qui n'a été tiré qu'indirectement de leurs oeuvres. Le malentendu va même parfois si loin qu'un tel résultat empêche qu'on s'intéresse vraiment à l'oeuvre, puisqu'on sera inévitablement déçu de n'y rencontrer que sous une forme tout à fait insolite des idées familières. Boole est célèbre, si c'est être célèbre de voir son nom attaché à des Algèbres, et dérivé en adjectifs (booléen, booléien, ...). Mais on peut douter que son oeuvre soit très pratiquée. Le lecteur moderne, s'il n'est pas déjà rebuté par les références à la scolastique ou les développements philosophiques, aura la pénible surprise d'y trouver un langage mathématique d'un autre âge, mis lui même, par moments, au service d'entreprises contestables. Pour peu qu'on sache aussi de lui qu'il est un des fondateurs de la logique moderne, on l'imagine volontiers comme un logicien qui a eu la bonne fortune de découvrir une nouvelle structure mathématique. En fait, il s'agit, à l'inverse, d'un mathématicien qui a voulu doter la logique de sa véritable structure formelle. Ce que cette dernière devint lorsque les mathématiciens revinrent plus tard y chercher leur bien, Boole ne l'avait certainement pas prévu. Il ne songeait nullement, en ce domaine, à faire progresser les mathématiques, mais à fonder une étude scientifique des lois de la pensée.

Mathématicien, Boole (1815-1864) le fut de profession, Antodidacte qui connaissait plusieurs langues, il fut professeur de mathématiques, publia de nombreux articles et deux ouvrages importants (1). Très jeune, il avait eu l'idée que les formules algébriques pouvaient être utilisées pour exprimer les relations logiques. La bruyante querelle entre W. Hamilton (le logicien, non le mathématicien du même nom) et de Morgan sur la quantification du prédicat, lui donna l'occasion de publier ses premières recherches dans The Mathematical Analysis of Logic (2) en 1847. Puis il médita longuement pour approfondir la nouvelle discipline qu'il venait de fonder, et prit soin de s'informer sur la philosophie du

(1) *Treatise on Differential Equations* (1859); *Treatise on the Calculus of Finite Differences* (1860).

(2) Que nous citons dans la réédition donnée à Oxford, en 1951 (Basil Blackwell), et que nous désignerons à l'occasion par les lettres M-A-L. Cet ouvrage est également accessible dans le recueil de textes de Boole intitulé *Studies in Logic and Probability,* London, Watts & Co., 1953, pp. 45-124.

langage et des fondements de la logique. Le fruit de ce long travail fut un ouvrage beaucoup plus volumineux, où Boole étendait au calcul des probabilités le bénéfice de sa méthode, et qui parut en 1854: An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities (1). Est-ce précisément pour avoir trop philosophé que Boole doit la sorte de disgrâce où sont tenues ses oeuvres? (2)

Des hommages, il en reçoit, certes, si l'on compte pour tels ceux que lui rendent distraitement les usagers des Algèbres de Boole. Hommage plus motivé, celui de Bourbaki résume bien, dans sa brièveté, ce qu'un moderne retiendra d'essentiel dans son oeuvre. D'une part, Boole est de ceux qui, au XIXe siècle, ont senti que les mathématiques devaient franchir les limites que leur assignait une définition trop étroite, et qu'elles pouvaient s'accorder le droit de raisonner sur des objets qui n'ont aucune "interprétation" sensible (3): "Il n'est pas de l'essence de la mathématique de s'occuper des idées de nombre et de quantité"(4); et il avait clairement aperçu qu'en s'élargissant, la méthode axiomatique révélait ce que sont dans leur essence, les mathématiques: l'étude des relations entre des objets qui ne sont plus connus et décrits que par celles de leurs propriétés que l'on met à la base de leur théorie (5). En second lieu, Boole "doit être considéré comme le véritable créateur de la logique symbolique moderne. Son idée maîtresse consiste à se placer systématiquement au point de vue de l'"extension", donc à calculer directement sur les ensembles, en notant $x\,y$ l'intersection deux ensembles, et $x + y$ leur réunion lorsque x et y n'ont pas d'élément commun. Il introduit en outre un "univers" noté 1 (ensemble de tous les objets) et l'ensemble vide noté 0, et il écrit $1 - x$ le complémentaire de x. Comme l'avait fait Leibniz, il interprète la relation d'inclusion par la relation $x\,y = x$ (d'où il tire sans peine la justification des règles du syllogisme classique) et ses notations pour la réunion et le complémentaire donnent à son système une souplesse qui avait manqué à ses devanciers. En outre, en associant à toute proposition l'ensemble des "cas" où elle est vérifiée, il interprète, la relation d'implication comme une inclusion, et son calcul des ensembles lui donne de cette façon les règles du "calcul propositionnel" (6).

Cette double mise en perspective se justifie d'autant mieux qu'elle répond tout à fait à la conscience qu'avait Boole lui-même de sa propre situation à l'égard des mathématiques et de la logique. Il savait, et il le dit clairement, que les idées nouvelles qu'il introduisait dans le domaine logique, devaient leur originalité et leur efficacité à un progrès des mathématiques, et à un renouvel-

---

(1) Que nous citons dans la réédition qu'en ont donnée, en insérant dans le texte toutes les corrections, les *Dover Publications*, et que nous désignerons par les lettres L.T.

(2) Le centenaire de sa mort est passé inaperçu en France. Depuis les *logiciens anglais contemporains* de Liard (1878!), on ne lui a guère consacré d'étude. Boole méritait mieux que l'"*adaptation*" que lui a infligée F. Gillot dans *Algèbre et logique*, d'après les textes originaux de G. Boole et W.S. Jevons... (Paris, A. Blanchard, 1962). Non content d'imposer à Boole un "rewriting" bien superflu, F. Gillot truffe son adaptation de textes de son crû, sans que le lecteur en soit le moins du monde informé (ainsi le § 2 de la p. 15), donne des traductions contestables ("fonction facultatives" pour "elective functions"), et chose plus grave, Boole se voit attribuer des affirmations qui prennent exactement le contrepied de doctrines qui lui tenaient à coeur. ("Si donc nous pouvons établir une systématisation de caractère général, nous devons obligatoirement la faire reposer sur la notion de grandeur"; *op. cit.*, p. 16).

(3) Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, p. 32.

(4) Boole, L.T., p. 12.

(5) Bourbaki, *op. cit.*, p. 33.

(6) *Ibid.*, p. 18.

lement profond de leur statut. Dès l'Introduction à The Mathematical Analysis of Logic on est retenu à la fois par la résonance toute moderne de réflexions sur l'emploi des symboles, et par la lucidité avec laquelle est envisagée l'extension à la logique des méthodes symboliques.

"Ceux qui sont familiarisés avec l'état présent de l'Algèbre Symbolique, savent que la validité des procédés de l'Analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles qui y sont employés, mais seulement des lois de leur combinaison". (1). D'un même procédé appartenant à un système donné de relations, on pourra admettre des interprétations différentes, toutes aussi légitimes les unes que les autres, relevant de la géométrie, de la dynamique, de l'optique, ..., pourvu qu'elles n'affectent pas la vérité des relations admises. Si on n'a pas reconnu toutes les conséquences de ce principe fondamental, c'est qu'on est aveuglé par un vieux préjugé qui veut que les mathématiques soient la science de la grandeur. Or, rien ne permet d'affirmer que l'interprétation quantitative actuelle des formes de l'Analyse s'impose nécessairement, et a une validité universelle. Il faut au contraire ériger en principe général que "la caractéristique bien déterminée d'un vrai Calcul, c'est d'être une méthode reposant sur l'emploi de Symboles, dont les lois de combinaison sont connues et générales, et dont les résultats admettent une interprétation cohérente" (2).

Si une prise de position aussi nette marque bien une date dans l'histoire des mathématiques, il faut se garder d'en porter tout le mérite au crédit de Boole qui proclame plus ici un manifeste d'Ecole qu'une idée personnelle (3). Mais là où il se montre plein d'audace, c'est en concevant comme justiciable du "principe général" qu'il vient d'énoncer, la Logique elle même. Lorsqu'il déclare sans ambages que "la Logique ne fait pas partie de la Philosophie", qu'il ne faut pas "associer Logique et Métaphysique, mais Logique et Mathématiques", on jugera de sa témérité en se reportant aux discussions académiques où il se croit obligé d'entrer. N'y voit-on pas W. Hamilton, une des autorités les plus respectées de l'époque, condamner l'étude des mathématiques comme "dangereuse et inutile" pour la formation de l'esprit! Boole, qui s'excuse par ailleurs de ne pas être un spécialiste de logique, se montre pourtant péremptoire: la logique peut devenir elle-même une "science exacte". La preuve, c'est son ouvrage tout entier: "On y verra la Logique reposer, comme la Géométrie, sur des vérités axiomatiques, et ses théorèmes construits sur cette doctrine générale des symboles qui constitue le fondement de l'Analyse classique" (4).

Ce programme, on peut dire globalement, comme en témoigne Bourbaki, que Boole l'a effectivement rempli. Mais qu'on se mette à lire vraiment ses écrits, cette belle image se brouille rapidement. Il y a bien de la différence entre

(1) M.A.L., p. 3.

(2) *Ibid.*, p. 4.

(3) Dans un de ses premiers articles ("On a General Method in Analysis", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1844, Part.II, p. 225), Boole cite une phrase où Gregory énonce le même principe fondamental: "Il y a, dans l'algèbre ordinaire, un certain nombre de théorèmes, dont apparemment, la vérité n'est prouvée que pour des symboles représentant des nombres, mais qui admettent une application beaucoup plus étendue. De tels théorèmes dépendent seulement des lois de combinaison auxquelles sont sujets les symboles, et sont donc vrais pour tous les symboles, quelle que puisse être leur nature, qui sont sujets aux mêmes lois de combinaison".

(4) M.A.L., p. 13.

l'énumération des quelques résultats fondamentaux extraits de l'oeuvre, et l'oeuvre elle-même. On attend pour le moins du "fondateur de la logique moderne" qu'il se plie à un minimum de rigueur formelle, et l'on trouvera qu'il se satisfait de bien peu lorsqu'il étudie les lois de "combinaison des symboles"; on aurait espéré de lui, qui n'était pas un mathématicien médiocre, plus d'adresses, et une conscience plus claire de la structure à laquelle il avait affaire: or il se fourvoie dans des complications que ceux qui le suivront dans la même direction jugeront bien vite superflues. Outre que Boole mérite qu'on s'intéresse même à ce qui, chez lui, n'est pas le meilleur, il ne sera pas vain toutefois d'accepter de le suivre dans le détail de son entreprise. Il nous importera surtout de comprendre comment, par le biais de notions qui nous paraissent difficilement acceptables, il est parvenu à imposer l'idée que la Logique pouvait être érigée en discipline "scientifique". Pour ce faire, nous allons lire la première partie de The Mathematical Analysis of Logic, puis les premiers chapitres de An Investiga- of the Laws of Thought.

- B -

The Mathematical Analysis of Logic est un ouvrage de dimensions modestes (82 pages), dont le sous-titre, modeste lui aussi dans sa forme: "Being an essay towards a Calculus of Deductive Reasoning", dit bien qu'il s'agit encore d'un travail de recherche. Le second ouvrage de Boole aura la lourdeur et le sérieux des justifications. Son premier essai, s'il est peu mûri, est tout proche de l'intuition qui lui donna naissance, et ce qui fait son prix, c'est que s'y laisse deviner sinon la genèse, du moins la courbe de progrès d'une découverte. On peut y distinguer schématiquement deux parties correspondant à deux mouvements de pensée:

(a) La logique traditionnelle étant considérée comme donnée, il s'agit, en un premier temps, de l'exprimer sous forme symbolique, et de mettre sur pied un Calcul qui remplisse les mêmes offices qu'elle.

(b) En un second temps, ce Calcul, exposé dans un style franchement mathématique, et visant à la plus grande généralité possible, est exposé de manière autonome.

Notons le sans plus tarder, cet ordre tout heuristique sera inversé dans les Laws of Thought, ouvrage synthétique où la tâche principale sera, comme nous le verrons plus loin, d'asseoir solidement le Calcul, l'intervention de ce dernier dans les problèmes traditionnels n'apparaissant qu'après coup, à titre d'application. Aussi nous semble-t-il opportun de ne retenir dans The Mathematical Analysis of Logic que la partie (a).

Dans ses premiers chapitres, Boole calque très exactement son exposé sur l'ordre habituel des traîtés de Logique (Concept, Jugement, Raisonnement):

- Premiers principes.
- De l'expression et de l'interprétation.
- De la conversion des propositions.
- Des syllogismes.
- Des hypothétiques.

*

*　　*

- 1 -

Le titre du premier chapitre; "Premiers principes", éveille d'emblée notre attention: c'est d'entrée de jeu que Boole va insérer son symbolisme dans le vieux cadre scolastique.

"Employons le symbole 1, ou l'unité, pour représenter l'Univers, et considérons le comme comprenant toute classe concevable d'objets, existant ou non réellement, étant supposé que le même individu peut se trouver dans plus d'une classe, vu qu'il peut posséder plus d'une qualité en commun avec d'autres individus. Employons les lettres X, Y, Z pour représenter les membres individuels des classes, X s'appliquant à tout membre d'une classe, en tant qu'il s'agit des membres de cette classe particulière, et Y s'appliquant à tout membre d'une autre classe, en tant qu'il s'agit des membres de cette classe, et ainsi de suite, selon le langage reçu des traités de Logique.

Concevons ensuite une classe de symboles x, y, z possédant le caractère suivant.

On supposera que le symbole x opérant sur un sujet quelconque, comprenant des individus ou des classes, sélectionne dans ce sujet tous les Xs qu'il contient. De la même manière, on supposera que le symbole y, opérant sur un sujet quelconque, sélectionne tous les individus de la classe Y que comprend ce sujet, et ainsi de suite.

Quand aucun sujet n'est exprimé, nous supposerons que 1 (l'Univers) est le sujet sous-entendu, de sorte que nous aurons:

$$x = x\ (1)$$

ce qui est signifié par chacun des termes étant la sélection dans l'Univers de tous les Xs qu'il contient, et le résultat de l'opération étant, en langage commun, la classe X, c'est-à-dire la classe dont chaque membre est X".(1)

Une fois posées ces définitions, Boole se confiant sans plus tarder à un symbolisme familier, trouve tout naturel de représenter par le produit $x\,y$ la succession de deux opérations: celle qui consiste à sélectionner la classe Y, puis celle qui consiste à sélectionner, dans cette classe Y, les individus de la classe X qu'elle contient. D'une manière analogue, le produit $x\,y\,z$ représentera une opération composée, constituée de trois sélections successives. On comprend dès lors que Boole qualifie d'électifs ces symboles x, y, z... qui représentent des opérations dont le propre est de <u>choisir</u> des individus ayant tel et tel caractère.

On n'accorde pas habituellement à cette notion de symboles électifs l'importance qu'elle mérite. On s'attarde plus volontiers sur le calcul qui en dérivera. Et pourtant, ce calcul une fois mis en marche, on pouvait faire confiance au mathématicien exercé qu'était Boole pour le développer. Mais le plus difficile n'était pas là. Appliquer les mathématiques à la logique, nombreux étaient ceux qui en avaient fait le projet; on sentait bien qu'il y avait quelque paradoxe pour la science du raisonnement à voir raisonner mieux qu'elle - plus vite et plus proprement - une science qui, en principe lui était subordonnée. Mais aussi, comment ne pas être tenté en ce cas de se précipiter là où il est dit que "raisonne" le logicien, pour y faire jouer les vertus tonifiantes du symbole? Autrement dit,

(1) M.A.L., p. 15.

le point d'application privilégié du symbolisme semblait être le syllogisme. Puisque calcul du raisonnement on cherchait, il fallait parvenir d'emblée à ce que le syllogisme se présente comme un calcul.

La sagesse de Boole a été de savoir attendre. Le syllogisme sera abordé à son heure. Mais la "combinaison des symboles" est présente, elle, dès ce premier chapitre du "Concept" où le logicien, qu'il fasse selon les goûts, la métaphysique ou la psychologie de l'Abstraction, ne semblait préparer que les matériaux du syllogisme. Peu importe au contraire à Boole la nature profonde de l'opération qu'il tient pour fondamentale; seul le retient son fonctionnement: "Il ne sera pas nécessaire que nous entrions ici dans l'analyse de cette opération mentale que nous avons représentée par le symbole électif. Ce n'est pas un acte d'Abstraction selon l'acception commune de ce terme, parce que nous n'avons jamais perdu de vue le concret, mais on peut probablement établir un rapport entre cette opération et un exercice des facultés de Comparaison et d'Attention. Ce qui nous intéresse à présent ce sont les lois de combinaison et de succession par lesquelles sont gouvernés ses résultats..." (1). Sans doute les logiciens n'avaient-ils pas manqué de relever que les "termes" obéissaient à des principes, et faisaient même dépendre tout raisonnement d'une application du dictum de omni et nulla. Mais, objecte Boole, ce principe, ou les principes équivalents, ne sont pas vraiment premiers. Ils exigent, en réalité, pour qu'on puisse les appliquer, qu'on procède à des opérations préalables: celles-ci font donc partie intégrante du raisonnement (2). Il fallait donc creuser plus profond pour atteindre l'opération mentale élémentaire.

A vrai dire, la preuve que la réduction est parvenue à son terme ne peut être fournie qu'après coup, par la réussite du système tout entier. Mais pour que ce système lui-même puisse être construit, il fallait parvenir à faire correspondre à l'"opération" mentale une "opération" symbolique, de telle manière que les combinaisons de symboles puissent traduire adéquatement l'activité mentale de sélection. Une des intuitions fondamentales de Boole tient presque tout entière dans ce qui n'est presque qu'un jeu de mots: il a symbolisé l'opération mentale la plus élémentaire par un opérateur.

*

* *

(1) *Ibid.*, p. 16.
(2) *Ibid.*, p. 18, note *.

Boole se propose maintenant de nous donner les lois qui gouvernent l'opération mentale simple qu'il vient de caractériser. Qu'est-ce à dire? Qu'il va en énumérer de manière abstraite les lois de composition? Que non pas. Boole veut simplement décrire ce qu'il voit, et ce qu'il voit ce sont les <u>résultats</u> auxquels conduisent certaines opérations de sélection menées de différentes manières. Et le principe qui commande les égalités qu'il va poser est pour lui d'une évidence si visible qu'il ne prend pas la peine de l'énoncer: ces égalités signifieront qu'on aboutit à des <u>résultats identiques</u> lorsqu'on effectue, tour à tour, la combinaison et la succession des opérations de sélection que représentent les symboles électifs qui se trouvent de chaque côté de l'égalité.

Boole "établit" ainsi trois lois (1).

1) "Le résultat d'un acte d'élection est indépendant du groupement ou de la classification du sujet".

En effet, qu'on se trouve dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes, on obtient un même résultat:

- un groupe d'objets considéré comme un tout nous est donné, et nous en sélectionnons la classe X.
- le même groupe est maintenant considéré comme divisé en deux; et nous sélectionnons séparément les individus Xs dans chacune de ces parties, pour réunir ensuite les résultats obtenus dans une conception globale.

Nous pouvons exprimer mathématiquement cette loi par l'équation:

$$x\ (u + v) = x u + x v$$

où $u + v$ représente le sujet indivis, et u et v ses parties composantes.

"Les symboles électifs sont <u>distributifs</u>".

2) L'ordre dans lequel sont effectués deux actes successifs d'élection n'importe pas.

En effet, dans les deux cas suivants, bien que l'ordre dans lequel nous effectuons nos sélections soit inversé, le résultat final n'en est pas affecté:

- nous sélectionnons les moutons dans la classe des animaux, puis parmi les moutons, nous prenons ceux qui sont cornus,
- nous sélectionnons parmi les animaux ceux qui sont cornus, puis parmi ces derniers, nous prenons les moutons.

L'expression symbolique de cette loi est :

$$x y = y x$$

Les symboles électifs sont "<u>commutatifs</u>".

3) Le résultat d'un acte donné d'élection accompli successivement deux fois, ou un nombre quelconque de fois, est identique au résultat du même acte accompli une seule fois.

(1) *Ibid.*, pp. 16-18.

Si dans un groupe d'objets, nous sélectionnons les Xs, nous obtenons une classe dont tous les membres sont Xs. Si nous répétons l'opération sur cette classe, il ne s'ensuivra aucune modification supplémentaire: en sélectionnant les Xs, nous prenons la classe en son entier.

Cette loi s'exprime ainsi mathématiquement :

$$xx = x$$

$$x^3 = x$$

ou en supposant que l'opération est accompli n fois :

$$x^n = x$$

Ainsi, Boole ne prend pas plus de précaution pour introduire les signes "=" et "+" que lorsqu'il a parlé de "produit". Il n'hésite pas pourtant à conclure que ces trois lois "suffisent comme base d'un Calcul". Mais, rappelons le, il était méritoire à cette époque, d'aller tout droit aux propriétés de distributivité et de commutativité (1). Quant à la troisième loi ("the indew law") qui est propre aux symboles électifs, elle jouera dans la pensée de Boole un rôle de plus en plus considérable.

*

*　　　*

(1) Méritoire aussi de savoir les reconnaître et de les utiliser. "Notons en particulier que Boole utilise la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion. qui paraît avoir été remarquée pour la première fois par J. Lambert". (Nicolas Bourbaki, *op. cit.*, p. 18, note ***).

Le symbole "1" nous a été présenté dès le début. Le symbole "0" va apparaître de manière beaucoup plus discrète, et sans justification explicite, au détour d'une équation. Ici encore, Boole se laisse conduire par des analogies tirées de l'algèbre élémentaire. Mais celles-ci n'auraient pu jouer s'il n'avait introduit la notion d'"univers" dans une intention toute proche de celle qui fit forger à A. de Morgan l'expression nouvelle d'"univers du discours" (1): assurer un traitement homogène aux termes positifs et aux termes négatifs. De Morgan avait protesté contre le privilège qu'Aristote avait accordé aux termes positifs; il n'y a aucune raison d'attribuer une importance essentielle à la différence qui sépare deux termes comme "hommes" et "non-hommes"; en fait, la forme positive, ou négative, ne dépend que de conventions ou d'accidents linguistiques. Sauf que, dans une formule imprudente, il fait embrasser à son Univers toutes choses, réelles ou irréelles, Boole adopte le même point de vue lorsqu'il exprime la classe non-X, "c'est-à-dire la classe incluant tous les individus qui ne sont pas Xs. La classe X et la classe non-X forment ensemble l'Univers. Mais l'Univers est 1, et la classe X est déterminée par le symbole x, donc la classe non-X sera déterminée par le symbole $1-x$". Et d'une manière analogue, on pourra sans peine déterminer ce que représentent les symboles $y\,(1-x)$ et $(1-x)\,(1-y)$. Il sera facile également d'exprimer:

- la Proposition Universelle Affirmative (A): "Tous les Xs sont Ys".

Comme tous les Xs qui existent se trouvent dans la classe Y, il est évident qu'il revient au même, soit de sélectionner tous les Ys dans l'Univers, et de sélectionner parmi eux, tous les Xs, soit de sélectionner d'un coup tous les Xs dans l'Univers"(2).

$$x\,y = x$$

ou, (et c'est ici qu'apparait subrepticement le "0") :

$$x\,(1-y) = 0.$$

- la Proposition Universelle Négative (E): "Il n'y a pas de Xs qui soient Ys".

$$x\,y = 0.$$

Mais le cas des propositions particulières est plus délicat, et nous allons voir surgir une des graves difficultés sur lesquelles va buter la méthode de Boole. Pour exprimer:

- la Proposition Particulière Affirmative (I): "Quelques Xs sont Ys"
- la Proposition Particulière Négative (0): "Quelques Xs sont non Ys",

Boole va faire intervenir un symbole auxiliaire qui a, en ce premier temps, un sens bien déterminé. Si "Quelques Xs sont Ys", il y a des termes communs aux classes X et Y; considérons la classe V que constituent ces termes, et à laquelle correspond le symbole électif v ; on aura:

$$v = x\,y$$

(1) Boole parle d'"univers du discours" dans L.T., p. 42. Une anecdote curieuse raconte que *The Mathematical Analysis of Logic* de Boole, et la *Formal Logic* d'A. de Morgan sortirent le même jour. Mais de Morgan avait soutenu des positions semblables dans un exposé lu en novembre 1846 devant la Cambridge Philosophical Society (Cf. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, VIII, 1849, pp. 378-380).

(2) *Ibid.*, p. 21.

"Et comme v inclut tous les termes communs aux classes X et Y, nous pouvons indifféremment l'interpréter comme Quelques Xs, ou Quelques Ys" (1). D'une manière semblable, "Quelques Xs sont non Ys" s'exprime par :

$$v = x\ (1-y).$$

Mais dès les premiers calculs où va s'engager Boole, ce symbole v créera des difficultés, car on ne pourra pas le détacher de ses "conditions d'interprétation".

Si nous multiplions l'équation (1): $v = x\,y$ par x, nous avons :

$$v\,x = x^2 y = x\,y,$$

donc : $v = v\,x$, ou : $v\ (1-x) = 0.$ (2)

En multipliant l'équation (1) par y, on obtiendrait :

$$v\ (1-y) = 0. \qquad (3)$$

D'où : $v\,x = v\,y = v$ (4)

système d'équations qui a pour équivalent les propositions :

$$\begin{cases} \text{Tous les Vs sont Xs} \\ \text{Tous les Vs sont Ys.} \end{cases}$$

"Le système (4) pourrait être utilisé pour remplacer (1), ou bien on pourrait utiliser la seule équation :

$$v\,x = v\,y$$

en assignant à $v\,x$ l'interprétation Quelques Xs, et à $v\,y$ l'interprétation, Quelques Ys. Mais on observera que ce système n'exprime pas tout-à-fait autant de choses que l'équation unique (1), dont il est dérivé. Tous les deux expriment certes la Proposition, Quelques Xs sont Ys, mais le système (4) n'implique pas que la classe V inclut <u>tous</u> les termes qui sont communs à X et Y". (2)

*

*   *

---

(1) *Ibid.*, p. 22.
(2) *Ibid.*, pp. 22-23.

Ces premières manipulations nous donnent déjà une idée de la manière dont Boole va poursuivre son calcul logique. Nous l'avons vu poser dès le départ, comme si cela allait de soi, des équations. Tout en devenant son centre d'intérêt exclusif, celles-ci vont être envisagées à un point de vue différent. La considération des opérations de sélection qui avait permis de les introduire va faire place à celle des propositions. Une proposition concernant les classes X et Y est en effet une équation entre les symboles x et y (1). Le problème fondamental consistant dans la "transformation des propositions" (2), on le résoudra en "déduisant" des équations"(3) à partir d'autres équations. On voit ainsi à quoi se ramène l'"emploi de l'analyse pour la déduction de l'inférence logique": il s'agit de mettre sur pied une théorie des équations logiques.

Pour commencer par l'inférence "immédiate", il ne sera pas difficile d'en retrouver les règles traditionnelles, en lisant simplement sous d'autres formes les propositions A, E, I, O. Ainsi les formes sous lesquelles nous avons exprimé plus haut E et I sont symétriques eu égard à x et y : nous pouvons donc changer x en y et y en x sans que l'équation correspondante en soit modifiée. E et I peuvent donc s'interpréter respectivement comme:

Aucun Y n'est X

Quelques Ys sont Xs

Ce qui revient à dire que E et I admettent la conversion simple. Pour montrer maintenant que A, par exemple, admet la conversion par contraposition, c'est-à-dire qu'on peut passer de: Tous les Xs sont Ys

à: Tous les non-Ys sont non-Xs,

on dira que: $x(1-y) = 0$

peut s'écrire: $(1-y)\ [1-(1-x)] = 0$,

ce qui est précisément la forme qu'on aurait obtenue, si dans:

$$x(1-y) = 0$$

on avait substitué $(1-y)$ à x et $(1-x)$ à y.

Abordons maintenant le Syllogisme. "L'équation par laquelle nous exprimons toute Proposition concernant les classes X et Y, est une équation entre les symboles x et y, et l'équation par laquelle nous exprimons toute Proposition concernant les classes Y et Z, est une équation entre les symboles y et z. Si de deux telles équations nous éliminons y, le résultat, s'il ne s'évanouit pas, sera une équation entre x et z, et pourra être interprété comme étant une Proposition concernant les classes X et Z. Et il constituera ainsi le troisième membre, ou Conclusion d'un Syllogisme dont les deux Propositions données sont les prémisses.

Le résultat de l'élimination de y des équations:

$$ay + b = 0$$

$$a'y + b' = 0$$

est l'équation:

$$ab' - a'b = 0$$

(1) *Ibid.*, p. 31.
(2) *Ibid.*, p. 28.
(3) *Ibid.*, p. 22.

Or les équations de Propositions étant du premier ordre relativement à chacune des variables qui y interviennent, tous les cas d'élimination que nous aurons à considérer, seront réductibles au cas précédent, les constantes a', b, a'', b' étant remplacées par des fonctions de x, z et du symbole auxiliaire v" (1).

Soit un syllogisme en Barbara :

Tous les Ys sont Xs $\quad y(1-x) = 0 \quad$ ou $\quad (1-x)\,y = 0$

Tous les Zs sont Ys $\quad z(1-y) = 0 \quad$ ou $\quad zy - z = 0$

En éliminant Y , nous avons :

$$z(1-x) = 0$$

Tous les Zs sont Xs.

Prenons un autre exemple qui nous permettra de revenir sur l'embarras qu'éprouve Boole à manipuler le symbole auxiliaire v. Soient les prémisses:

Tous les Ys sont Xs $\quad y(1-x) = 0$

Il n'y a pas de Zs qui soient Ys $\quad zy = 0.$

La solution la plus générale de l'équation :

$$y(1-x) = 0$$

est : $\quad y = vx \quad$ (a)

qui implique que Tous les Ys sont Xs, et que Quelques Xs sont Ys. En substituant cette valeur de y dans :

$$0 = zy$$

nous obtenons : $\quad 0 = vzx$

Quelques Xs sont non - Zs.

"La raison pour laquelle nous ne pouvons interpréter $vzx = 0$ en disant : "Quelques Zs sont non - Xs", est que l'interprétation de vx est fixée par les termes mêmes de l'équation (a), comme étant Quelques Xs; v est considéré comme représentatif de Quelques seulement eu égard à la classe X" (2). Boole oscille ainsi entre la première signification qu'il avait donnée à v, signification claire mais sans fécondité pour son calcul, et la tentation de donner à l'expression "Quelques" une "représentation" indépendante des termes sur lesquels elle porte (3).

*

* *

(1) *Ibid.*, pp. 31-32.
(2) *Ibid.*, p. 35.
(3) C'est le lieu de se souvenir, que "l'absence de véritables quantificateurs (au sens moderne) jusqu'à la fin du XIX° siècle, a été une des causes de la stagnation de la Logique formelle". (Nicolas Bourbaki, *op. cit.*, p. 14, note *).

Là et ailleurs, Boole commet certes des maladresses, mais il serait peu opportun de ne voir qu'elles, et de laisser échapper l'essentiel. Car, sans exagérer, il vient de se produire ici un évènement décisif, dont, malgré toutes ses précautions oratoires, Boole lui-même cache mal qu'il en a tiré une grande fierté. Il se donnait la peine de suivre tant bien que mal les articulations de l'exposé traditionnel, et alors même qu'il touche au but et qu'il rend ses devoirs au syllogisme, il voit s'ouvrir devant lui de bien plus larges perspectives. Ce qu'il pouvait et devait attendre de l'analyse mathématique de la logique, c'était qu'elle concorde avec les données immuables du savoir aristotélicien. Or, à peine a-t-il pu constater qu'elle réussissait en effet assez bien à exprimer l'essentiel de ce savoir que l'instrument forgé à cet effet dépasse son but premier : d'instrument d'expression, il devient guide critique. Une fois le syllogisme conçu comme un système de deux équations, tout invite à se placer résolument à un point de vue "purement mathématique", à négliger les classifications traditionnelles au profit de critères mathématiques plus clairs et plus systématiques. Mais alors, la situation se renverse: la Logique était un modèle à respecter, la voici jugée au nom de la nouvelle méthode (1).

Sur deux points, les canons aristotéliciens,se voient taxés d'arbitraire. En premier lieu, on a attaché bien en vain une importance considérable à l'ordre dans lequel se trouvent disposées les prémisses d'un syllogisme, et on a disputé sur l'importance relative du terme mineur et du terme majeur. Or, tout ceci est question de convention et de convenance. Qu'on dispose les équations qui expriment les prémisses dans tel ou tel ordre, cela ne concerne en rien leur résolution. En second lieu, les canons aristotéliciens rejettent comme "non-formelles" certaines conclusions, ainsi celles qui ont la forme :

Quelques non - Xs sont non - Ys ,

qui, exprimées en symboles électifs, ne présentent aucun caractère distinctif qui puisse motiver un tel rejet.

Si l'on tient à sacrifier à la tradition, on pourra admettre ces interdits : "En restreignant le canon de l'interprétation, nous pouvons confiner nos résultats à l'intérieur des limites de la logique scolastique, suivant qu'ils sont exprimés de telle ou telle manière; mais cela aurait pour seule conséquence de nous restreindre nous mêmes à n'utiliser qu'une partie des conclusions auxquelles notre analyse nous donne droit" (2). Boole rejette évidemment pour sa part une telle éventualité: il faut aller au contraire le plus loin possible dans la voie de la généralité. Il y avait d'ailleurs dans sa méthode de quoi l'inviter, et jusqu'à le contraindre à dépasser, non pas seulement les limitations internes de la syllogistique, mais la syllogistique elle-même. Un système de deux équations à une inconnue, ce n'est là qu'un cas particulier qui conduit naturellement à se proposer comme objet, comme le fait Boole dans son dernier chapitre, le problème général où le nombre des équations et celui des variables ne sont pas limitées. A ce point, il devient absolument nécessaire "d'écarter toute considération de précédent ou d'autorité, et d'interroger la méthode elle-même pour exprimer les justes limites de son application" (3).

(A suivre)

(1) Cf. *ibid.*, pp. 7-8: "Le but de ces recherches s'était limité en premier lieu à l'expression de la logique reçue, et aux formes de la disposition aristotélicienne, mais il devint vite visible qu'on introduisait ainsi des distinctions purement arbitraires, et qui n'avaient pas de fondements dans la nature des choses".

(2) *Ibid.*, p. 34.

(3) *Ibid.*, p. 8.