MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. BENTZ

Aperçu sur les problèmes d'ordonnancement

Mathématiques et sciences humaines, tome 13 (1965), p. 3-21

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__13__3_0>

J. BENTZ

APERCU SUR LES PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

Le texte qui suit est un texte d'initiation réalisé à partir des documents cités en bibliographie (1). Il a pour but de présenter aux lecteurs du bulletin une application de la Mathématique à un problème d'organisation du travail, dont les méthodes sont susceptibles d'être utilisées dans d'autres domaines des Sciences Humaines.

I. QUELQUES QUESTIONS PRELIMINAIRES

1.1. Le directeur d'un laboratoire chargé d'une étude a divisé celle-ci en trois parties P,Q,R, chacune d'elles étant divisées en chapitres p_i, q_j, r_k, $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, $k \in \{1,2,3,4\}$.

Les différents chapitres de l'étude présentent des dépendances que le directeur a analysées et résumées dans le tableau:

p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_7	q_2	q_2	q_3	q_3	q_4	q_5	q_5	r_1	r_2	r_2	r_3	r_4	r_4
5	4	4	6	2	4	2	4	4	6	6	7	6	4	4	5	6	3	5	6
p_1	p_2	p_3	p_4	p_4	p_5	p_6	p_2	q_1	p_4	q_2	q_3	q_4	p_5	p_1	r_1	q_2	r_2	r_3	q_4

Le tableau se lit colonne par colonne: l'étude de p_2 ne peut débuter que 5 semaines après le début de l'étude de p_1, ... l'étude de r_4 ne peut commencer que 6 semaines après le début de l'étude de q_4. De plus l'étude des chapitres ultimes p_7, q_5, r_4 doit durer 5 semaines.

<u>Question posée au lecteur:</u> Le début de l'étude ayant lieu à la date 0, à quelle date le directeur peut-il espérer terminer au plus tôt?

* *

*

(1) Nous prions Monsieur B. ROY de bien vouloir trouver ici l'expression de nos remerciements pour ses conseils et son autorisation de faire largement appel à ses textes.

1.2. Un problème d'emploi de temps

Quatre auditoires distincts A,B,C,D doivent entendre chacun, au cours d'une après-midi, quatre conférenciers pris parmi huit, de la manière suivante:

Auditoires \ Conférenciers	1	2	3	4	5	6	7	8
A	×	×					×	×
B	×		×	×				
C		×			×	×		×
D	×		×				×	×

Se lit: A doit entendre les conférenciers 1,2,7,8...

<u>Question posée au lecteur:</u> Etablir l'horaire de la session de manière à en minimiser la durée.

*   *

*

1.3. Un laboratoire doit effectuer une étude $\mathcal{C}$ comprenant 2 groupes de travaux distincts A et B. A désigne les travaux de recherche et d'études préliminaires, B les travaux d'exécution. On se propose de minimiser la durée totale de $\mathcal{C}$.

a. A ne peut débuter avant une époque 0;

b. Les effectifs affectés à A et B sont compris entre certaines limites:

$$3 \leqslant n_A \leqslant 15.$$
$$6 \leqslant n_B \leqslant 15.$$

De plus, la direction décide de n'affecter à la réalisation de $\mathcal{C}$ qu'un nombre limité n de personnes.

c. Les durées de A et B respectivement sont estimées, en jours, à $\frac{600}{n_A}$ et $\frac{300}{n_B}$

d. B doit débuter au plus tôt à la date 10, et avant que la moitié des travaux A soit accomplie.

e. B ne peut être terminé avant que la moitié de A ne soit accomplie.

<u>Question posée au lecteur:</u> Influence de n sur la durée minimale de réalisation de $\mathcal{C}$.

- - - - - - - - - - -

II DEFINITION DE LA CLASSE DES PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

On dit qu'on est en présence d'un problème d'Ordonnancement si le problème posé satisfait à trois conditions:

2.1.1. IL S'AGIT D'ÉTUDIER LE COMMENT D'UNE RÉALISATION

Cette réalisation peut être de nature très variée. Il peut s'agir par exemple de l'élaboration d'un grand ensemble (immeubles, fusée, navire, ...), de l'organisation d'un emploi du temps (répartition des maîtres et des locaux dans un lycée), d'un circuit administratif...

Il s'agit de guider la conception et le contrôle de la réalisation.

2.1.2. CETTE RÉALISATION EST DÉCOMPOSABLE EN ÉLÉMENTS, QU'ON APPELLE TACHES

La notion générale de tâche ne peut être précisée par son contenu concret. Celui-ci dépend de chaque cas particulier de problème.

On appelle tâche, un élément de réalisation, caractérisé par:

- Sa durée, notée d_i,
- son époque de début, notée t_i, son époque de fin, notée f_i;
- les moyens à mettre en oeuvre pour la réaliser.

$i \in \{N\} = \{0,1,\ldots,n\}$ est un indice numérotant les tâches, supposées en nombre n, de la réalisation.

Remarques:

a. Dans l'hypothèse généralement vérifiée d'un déroulement continu de la tâche i: $f_i = t_i + d_i$. Dans le cas contraire, on décompose la tâche discontinue en plusieurs tâches continues.

b. Les "moyens" à mettre en oeuvre pour mener une tâche à bien sont essentiellement de trois types:
- argent
- matériel
- hommes.

L'emploi de ces moyens est représenté par le symbole $\gamma_{ik}(\theta)$, importance du moyen k nécessaire à la tâche i à la date θ.

c. Certaines des caractéristiques des tâches de la réalisation étudiée apparaissent comme des inconnues, d'autres comme des données.

d. Pratiquement, la difficulté d'un problème d'Ordonnancement réside d'abord dans le choix d'une décomposition en tâches, décomposition qui n'est pas unique. Il est nécessaire, pour résoudre un problème de ce type, de bien définir chaque tâche; toutefois, les caractéristiques des tâches peuvent être soumises à des imprécisions, ou être aléatoires.

2.1.3. CETTE RÉALISATION EST SOUMISE À UN ENSEMBLE DE CONTRAINTES

Les tâches sont soumises à des exigences qu'il faut respecter pour que les valeurs attribuées à leurs caractéristiques représentent réellement une façon possible d'effectuer la réalisation.

Exemples de contraintes:

- une tâche ne peut débuter que lorsque d'autres sont terminées,
- une tâche n'est réalisable qu'au cours d'une période donnée,
- ... etc...

*   *

*

Dans ces conditions, et pour un problème de ce type, on appellera ordonnancement, un ensemble de valeurs des caractéristiques des tâches conforme aux exigences données. A un problème d'Ordonnancement, il peut correspondre plusieurs ordonnancements. Ceux-ci apparaissent comme des points à l'intérieur d'un domaine P (domaine des possibles, ou des ordonnancements réalisables) défini par les contraintes, ensemble de points entre lesquels il faut choisir, selon des critères qui peuvent être :

- coût ou durée totale minimum,
- équilibre optimal des courbes exprimant l'évolution de la charge de main-d'oeuvre au cours du temps.

On est donc amené à:

2.2.1. Analyser la compatibilité.

P est-il ou non vide?
Si oui, le problème est sans solution. On peut alors essayer de déterminer quels sont les paramètres qui sont à l'origine de l'incompatibilité.

2.2.2. Choisir entre plusieurs possibles si P n'est pas vide.

La recherche de l'ordonnancement optimum est dans la plupart des cas difficile pour les raisons suivantes:

- en général, P n'est pas un polyèdre, mais l'union, non convexe, de polyèdres dans l'espace affine de dimension n sur R. Ce n'est souvent même pas un ensemble: il y a des ordonnancements dont on ne peut dire de façon claire s'ils appartiennent ou non à l'ensemble des ordonnancements réalisables (de par le caractère flou des frontières). Dans certains cas, on s'arrange même pour rendre possible un ordonnancement qui ne l'est pas (par une modification des contraintes) si cette opération présente de gros avantages.
  L'élasticité des contraintes et donc celle de la frontière de P rend absurde la notion même d'optimum.
- la préférence d'un élément de P à un autre est rarement traduisible par une formule mathématique.

On se contente donc de déterminer un ordonnancement réalisable "assez bon" en s'appuyant sur l'une des méthodes présentées ci-dessous.

a. Caractérisation de certaines solutions optimales.

Certains auteurs ont cherché à mettre en évidence des propriétés susceptibles de caractériser des solutions optimales d'un problème d'Ordonnancement, propriétés qui permettraient de construire ~~une~~ solution optimale.

Cette démarche n'a jusqu'à présent donné des résultats que dans des problèmes très particuliers. On en trouvera un exemple dans la résolution de l'exercice 1.2.

b. Programmation mathématique.

On peut ramener certains problèmes d'Ordonnancement (qui se formulent à l'aide d'un système de potentiel sur un graphe avec disjonctions) à un problème de programmation mathématique par l'introduction de variables booléennes.

c. Méthodes de construction progressive fondée sur des intérêts locaux.

Ces méthodes consistent à construire un ordonnancement réalisable à partir de règles de décisions locales: on opère de proche en proche, le passage d'un ordonnancement O_i à un autre meilleur O_{i+1} se faisant selon un critère local qui peut changer à chaque opération.

$$O_1 < O_2 < \ldots\ldots < O_i < O_{i+1} \ldots\ldots < O_{optimum}$$

Ces méthodes ne conduisent pas forcément à l'optimum, et peuvent même aboutir à une solution mauvaise (exemple: problème du voyageur de commerce).

d. Exploration systématique de P.

Ces méthodes utilisent un processus capable d'engendrer n'importe quel ordonnancement réalisable appartenant à un ensemble donné:

d.1. Exploration aléatoire: choix parmi un ensemble de points atteints indépendement les uns des autres à partir de conditions initiales tirées au hasard pour chacun d'eux.

d.2. Exploration dirigée: à partir d'un ordonnancement réalisable, un processus permet de construire un ordonnancement voisin, meilleur que le précédent.

d.3. Exploration par séparation: le processus sélectionne des parties de P de plus en plus fines selon des critères fixés.

2.2.3. Adapter les décisions et contrôler la réalisation au cours de son évolution dans le temps.

En cours de réalisation, certaines données du problème se précisent, d'autres nouvelles apparaissent. La méthode utilisée doit donc être assez souple pour permettre à tout moment de modifier le planning prévu initialement.

* *
*

III. ANALYSE DE LA CLASSE DES PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT

La diversité des problèmes d'Ordonnancement ne réside pas dans leur contexte: une même théorie peut étudier l'Ordonnancement du fonctionnement d'un atelier ou de l'établissement d'un emploi du temps scolaire.

Elle se trouve plutôt dans la nature des contraintes qui pèsent sur le problème.

1. Contraintes de type potentiel

Définition: on appelle contrainte de type potentiel, toute contrainte qui peut se mettre sous la forme

$$\boxed{t_j - t_i \geqslant a_{ij}}$$

où t_i et t_j sont les époques de début des tâches i et j et les a_{ij} des constantes.

On numérote généralement les n tâches au moyen d'un indice

$$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

et on pose en plus:

$i = 0$, indice de la tâche "début de la réalisation" correspondant à une date de début minimum $t_o = 0$.

$i = n+1$, indice de la tâche "fin de la réalisation" correspondant à une date de début minimum t_{n+1} = date au plus tôt d'achèvement de la réalisation.

Exemples:

a. Succession de deux tâches: la tâche j ne commence qu'après que la tâche i soit terminée: $t_j \geqslant t_i + di \Longleftrightarrow t_j - t_i \geqslant d_i$.

b. Succession de deux tâches sans interruption: la tâche j commence dès que la tâche i est terminée:

$$t_j = t_i + di \Longleftrightarrow \begin{cases} t_j - t_i \geqslant d_i \\ t_i - t_j \geqslant -d_i \end{cases}$$

c. Succession de deux tâches avec un intervalle de battement:

$$t_j \geqslant t_i + d_i + \theta_{ij} \Longleftrightarrow t_j - t_i \geqslant d_i + \theta_{ij}$$

d. La tâche j ne peut commencer avant que la tâche i ait atteint un degré d'avancement suffisant:

$$t_j \geqslant t_i + p.d_i \Longleftrightarrow t_j - t_i \geqslant p.d_i$$

$$0 < p < 1$$

e. La tâche i ne peut commencer avant une date donnée:

$$t_i \geqslant \theta \Longleftrightarrow t_i - t_o \geqslant \theta$$

f. La tâche i doit être terminée avant une date donnée:

$$t_i + d_i \leqslant t_o + \theta \Longleftrightarrow t_o - t_i \geqslant d_i - \theta$$

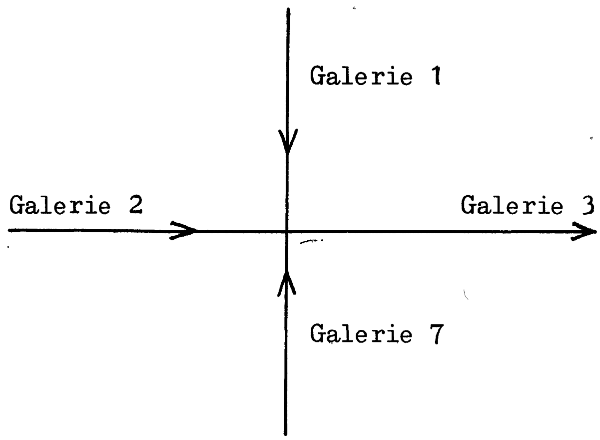
Résoudre un problème d'Ordonnancement où les contraintes sont du type potentiel, c'est faire en sorte que <u>toutes</u> les inégalités qui le caractérisent soient vérifiées; ce qui revient à construire l'intersection d'un certain nombre d'hyperplans. On dit que les inégalités sont reliées par la conjonction ET.

<u>Définition</u>: Nous dirons qu'un problème d'Ordonnancement est du <u>type central</u> si les inconnues sont constituées par les seules dates t_i de début des tâches, ces nombres n'étant soumis qu'à des inégalités de type potentiel, reliées toutes entre elles par la conjonction ET, dans lesquelles les seconds membres sont des constantes (certaines ou aléatoires).

Ce type de problème est dit central car:
- c'est le plus étudié, et le seul entièrement résolu sur le plan mathématique,
- dans un cas plus complexe, on s'efforce de se ramener à un problème central.

<u>Exemple de problème pouvant être ramené à un problème du type central</u>.

Les inconnues sont les t_i. Elles sont soumises à des inégalités de type potentiel, reliées entre elles par la conjonction OU NON EXCLUSIF (c'est-à-dire qu'au moins une des inégalités doit être satisfaite, mais que plusieurs peuvent l'être), et vérifient en outre une condition de faisceau. C'est le cas du percement de galeries de mines: le creusement de la galerie 3 ne peut être entrepris que si une au moins des trois galeries 2, 1, 7 est terminée.



2. Contraintes de type disjonctif

<u>Définition</u>: On appelle contrainte de type disjonctif, toute contrainte qui impose à certaines tâches d'être exécutées pendant des intervalles de temps disjoints.

Soient deux tâches numérotées i et j, d_i et d_j leurs durées, $\alpha_i = (t_i, t_i+d_i)$ et $\alpha_j = (t_j, t_j+d_j)$ les intervalles de temps pendant lesquels les tâches i et j sont exécutées; la contrainte de disjonction peut s'écrire: $\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset$

ou aussi:
$$\left\{\begin{array}{l} t_j - t_i \geqslant d_i \\ t_i - t_j \geqslant d_j \end{array}\right\}$$
les deux inégalités étant reliées par la conjonction OU EXCLUSIF.

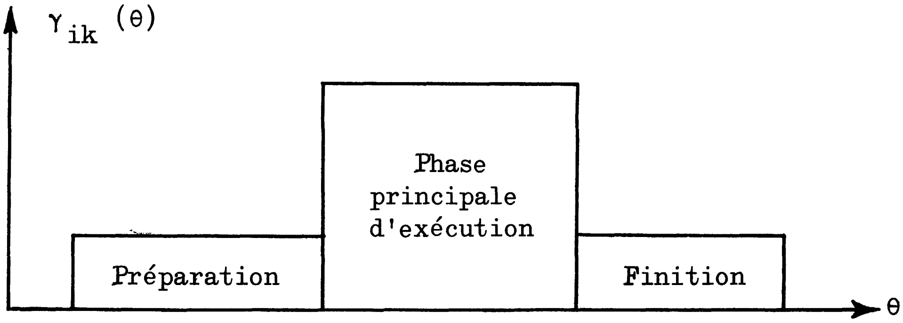
De telles contraintes apparaissent quand deux tâches distinctes d'une même réalisation nécessitent la présence d'un moyen unique. Par exemple, un spécialiste dans une étude, une grue sur un chantier, la salle de géographie d'un lycée ....

Remarque: Une telle formulation est inutile si l'on est en droit de préjuger catégoriquement de l'ordre de succession des tâches numérotées i et j. Il suffit alors d'introduire une des deux inégalités écrites plus haut.

3. Contraintes de type cumulatif

Dans de nombreux problèmes, on est amené à associer à chaque tâche i une fonction $\gamma_{ik}(\theta)$ traduisant en fonction du temps θ, les besoins de main-d'oeuvre pour la tâche i, et ce pour le corps de métier k.

Les courbes représentatives de telles fonctions ont généralement l'allure ci-contre:



Dans la plupart des cas réels, $\gamma_{ik}(\theta)$ dépend de t_i et de d_i, ce qu'on note $\gamma_{ik}(\theta/t_i, d_i)$.

Si on effectue à chaque instant θ, pour le corps de métier k, le cumul des besoins de main d'oeuvre, on obtient la courbe de change:

$$\sum_{i \in N} \gamma_{ik}(\theta/t_i, d_i) = \Gamma_k(\theta/t_1, t_2, \dots, t_n, d_1, d_2, \dots d_n)$$

qui traduit l'évolution au cours du temps du besoin global de main-d'oeuvre pour l'ordonnancement $\{t_1, t_2, \dots, t_n, d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Définition: on appelle contrainte de type cumulatif, toute contrainte pesant sur les courbes Γ_k.

Exemple: $a \leqslant \Gamma \leqslant b$ où a et b sont des effectifs limites à ne pas dépasser.

Remarque: Ces contraintes sont généralement assez souples (par exemple un ingénieur qui se voit attribuer 1000 heures d'ouvrier pour une certaine tâche peut, sans trop d'inconvénients, utiliser 1050 heures, grâce à la possibilité d'heures supplémentaires) et sont donc difficilement prises en compte par les mathématiques. C'est ce caractère de souplesse qui distingue essentiellement contraintes disjonctives et cumulatives (les théoriciens pourraient en effet tenir le raisonnement suivant: un homme ne pouvant accomplir deux tâches simultanément, la prise en compte de limitations de main-d'oeuvre peut donc s'exprimer à l'aide de contraintes disjonctives).

4. Autres types de contraintes

La complexité de la réalité met en évidence un grand nombre de contraintes qui ne peuvent se ramener aux trois types définis ci-dessus. En particulier des contraintes à la fois disjonctives et cumulatives.

Nous nous limitons ici néanmoins à l'étude de ces trois types. En effet, si l'étude des systèmes de potentiel permet de résoudre la quasi-totalité des problèmes de type central, on se heurte déjà à des difficultés bien plus grandes quand on aborde les contraintes cumulatives ou disjonctives.

* *

*

IV. RESOLUTION MATHEMATIQUE DE CERTAINS PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT: RESULTATS

4.1. Le problème central - Première formulation

a. Considérons un ensemble de tâches repérées par un indice $i \in \overline{N} = \{0,1,\dots,n+1\}$ soumises à un système S de contraintes de la forme $t_j - t_i \geqslant a_{ij}$, où les couples (i,j) appartiennent à un ensemble K donné et les a_{ij} sont des données positives, négatives, ou nulles.

Notons $\overline{R}^{n+2}$ le produit antérieur de (n+2) ensembles $\overline{R} = \{-\infty, R, +\infty\}$.
La relation d'ordre $T' = \{t'_i \mid i \in \overline{N}\} \leqslant T'' = \{t''_i \mid i \in \overline{N}\} \Longleftrightarrow \forall i \in \overline{N}: t'_i \leqslant t''_i$ confère à $\overline{R}^{n+2}$ la structure de treillis complet.

Soit P l'ensemble des solutions de S (ensemble des ordonnancements possibles): $P \subset \overline{R}^{n+2}$. P apparait comme un "polyèdre" convexe formant un sous treillis de $\overline{R}^{n+2}$.

Autrement dit :

$$\begin{bmatrix} T' \in P \\ T'' \in P \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \{\mathrm{Min}\ (t'_i, t''_i)/i \in \overline{N}\} \in P \\ \{\mathrm{Max}\ (t'_i, t''_i)/i \in \overline{N}\} \in P \end{cases}$$

On peut le démontrer :

posons $$\forall i \in N : t_i = \text{Min}\,(t'_i,\ t''_i)$$

Si
$$t_i = t'_i \leqslant t''_i$$

ou bien $t_j = t'_j$, alors $t_j - t_i = t'_j - t'_i \geqslant a_{ij}$ S est vérifié

ou bien $t_j = t''_j$, alors $t_j - t_i = t''_j - t'_i \geqslant t''_j - t''_i \geqslant a_{ij}$ S est vérifié.

Si $t_i = t''_i \leqslant t'_i$, même démonstration.

Cette démonstration se transpose sans difficulté pour $t_i = \text{Max}\,(t'_i,\ t''_i)$.

Ainsi P possède un premier et un dernier élément que l'on appelle "minorant universel" et "majorant universel" respectivement.

b. Au Système S, on fait correspondre le graphe $G = (X,U)$ de la manière suivante:

$$X \equiv \left\{ x_i / i \in N \right\}$$
$$U \equiv \left\{ u = (x_i, x_j)/(i,j) \in K \right\}$$

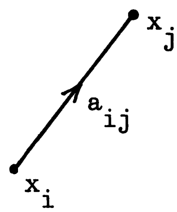
et on définit sur U une fonction numérique telle que:

$$\forall u \in U : a(u) = a_{ij}$$

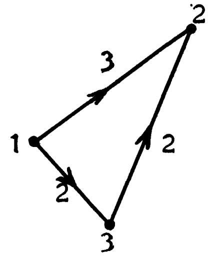
a(u) est appelée longueur de l'arc u, bien que cette "longueur" ne soit soumise à aucun des axiomes classiques.

<u>Exemples</u>:

α $\qquad t_j - t_i \geqslant a_{ij} \quad \Longleftrightarrow$



β $$S \begin{Bmatrix} t_2 - t_1 \geqslant 3 \\ t_2 - t_3 \geqslant 2 \\ t_3 - t_1 \geqslant 2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$$



c. Toute solution T de S se présente dès lors comme un ensemble de nombre t_i vérifiant:

$$\forall u \in U : t_{\text{extrémité}} - t_{\text{origine}} \geqslant \text{longueur de l'arc.} \qquad (I)$$

Définition: on appelle système de potentiels sur un graphe G = (X,U) dont les arcs sont munis de longueur a(u), un ensemble T de nombres t_i mis en correspondance biunivoque avec les sommets $x_i \in X$ et vérifiant la proposition (I) .

L'étude du système S est donc équivalente à celle des systèmes de potentiel sur un graphe.

Le graphe G = (X,U) est dit graphe potentiels-tâches.

d. Analyse de la compatibilité des contraintes.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les données pour que P soit non vide?

x_0 étant une anti-base* supposée ponctuelle de G on peut lui associer un ensemble

$$\Lambda_o = \left\{ \lambda_i / i \in N \right\}$$

mis en correspondance biunivoque avec X, en posant:

$\lambda_o = 0$ pour x_o

$\forall x_i \in (X-x_o)$: λ_i = longueur du plus long chemin élémentaire joignant x_0 à x_i

On peut démontrer le théorème suivant:

Un graphe admet un système de potentiels si et seulement s'il ne possède aucun circuit de longueur strictement positive.

Le minorant universel de P coïncide alors avec Λ_0 et les valeurs des λ_i sont toutes finies.

e. Algorithme de construction du minorant universel des systèmes de potentiel sur un graphe G sans circuit d'anti base x_0.

α Marquer $\lambda_o = 0$ au sommet x_o.

β Chercher parmi les sommets non encore marqués un sommet x, dont tous les précédents x_h, h ∈ H, le soient:

Marquer $\lambda_i = \underset{h \in H}{\text{Max}} (\lambda_h + a_{hi})$.

* Anti-base d'un graphe: tout sous ensemble A⊂X vérifiant:
- il n'existe aucun chemin joignant deux sommets de A.
- tous sommet n'appartenant pas à A est l'extrémité terminale d'un chemin commençant dans A.

γ Recommencer β jusqu'à épuisement du graphe. Cette procédure permet de marquer tous les sommets de manière unique puisque G est sans circuit.

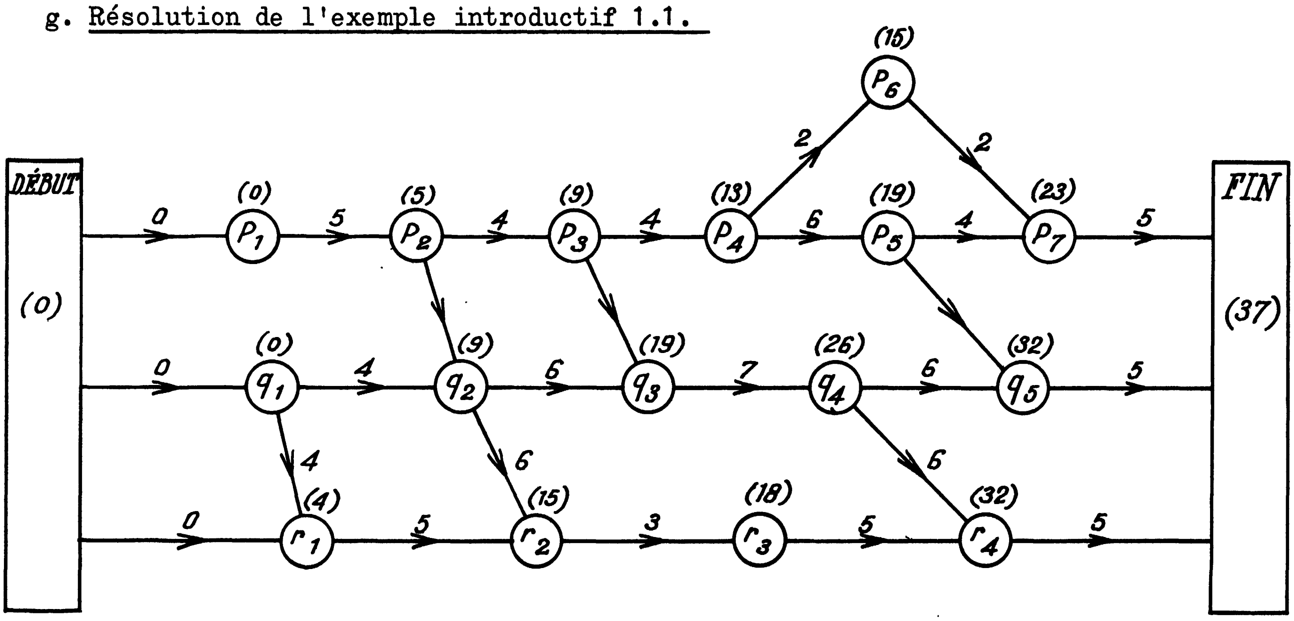
<u>Exercice proposé au lecteur:</u> Définir un algorithme de construction du majorant universel de P.

f. <u>Conclusion:</u>

On sait construire un ordonnancement minimal tel que, non seulement la dernière tâche est faite le plus tôt possible, mais encore toutes les autres le sont.

<u>Remarque:</u> Toute fonction non décroissante du temps sera minimum pour le minorant universel. C'est le cas souvent pour le côût si celui-ci ne dépend que du temps.

g. <u>Résolution de l'exemple introductif 1.1.</u>



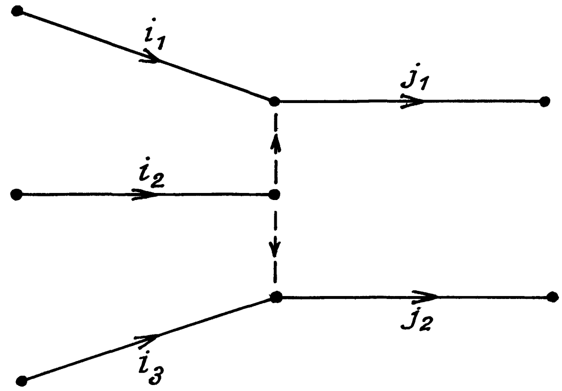
date au plus tôt de fin de l'étude = 37 semaines.

4.2. Le problème central. Formulation PERT

Cette formulation, généralement utilisée dans les méthodes américaines, repose sur le même principe: déterminer un système de potentiels sur un graphe. Mais ce dernier est conçu différemment:

- à chaque tâche i on associe un arc de longueur la durée de la tâche,
- les contraintes sont représentées par les sommets: l'extrémité d'un arc coincide avec l'origine d'un autre pour exprimer que la tâche associée au premier doit être achevée avant que celle associée au second puisse débuter. On est donc amené à introduire des arcs de longueur nulle (représentant des tâches dites fictives) pour exprimer certaines contraintes sans en ajouter d'autres.

Exemple: Réalisation d'un ensemble de cinq tâches i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 telles que la tâche j_1 suit i_1 et i_2 et la tâche j_2 suit i_2 et i_3 :



Exercice proposé au lecteur: Tracer le graphe de l'exercice 1.1. en formulation PERT.

4.3. Les problèmes à contraintes cumulatives

Moins complètement maitrisés que les précédents, ces problèmes présentent une grande diversité quant à leur nature et aux méthodes utilisées pour les résoudre.

On peut distinguer, comme dans (Bibliographie: 11) les cas suivants:

4.3.1. Les durées des tâches sont constantes. La courbe de charge

$$\Gamma_k\ (\theta/t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)$$

doit être en totalité en dessous d'une courbe de charge maximale M (le calendrier $\{t_1, \ldots, t_n\}$ étant réalisable).

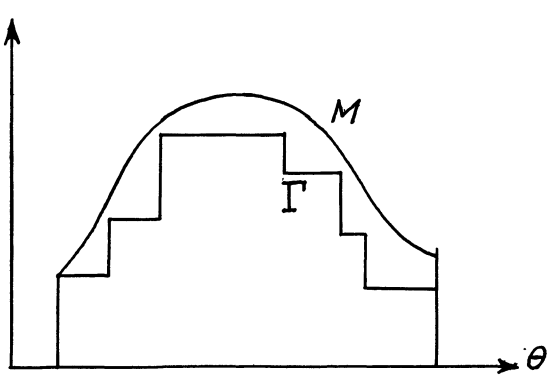


Fig. La charge totale satisfait aux contraintes.

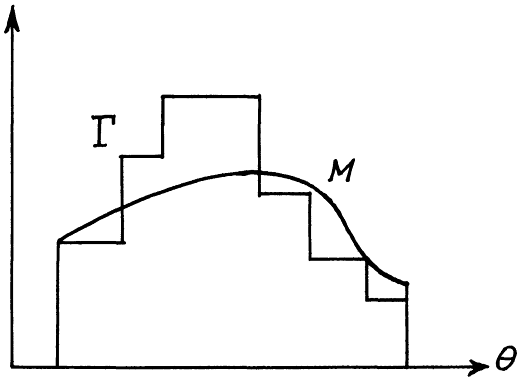


Fig. 2 La charge totale ne satisfait pas aux contraintes.

Les méthodes utilisées consistent en des modifications du calendrier $\{t_1, \ldots, t_n\}$ sans en changer ou au besoin en augmentant la durée totale de la réalisation, à partir d'ordres partiels définis sur l'ensemble des tâches par les contraintes de succession et de priorité de chargement.

4.3.2. Les durées des tâches sont constantes. Il s'agit de lisser les courbes de charge avec une contrainte sur la durée d'achèvement de la réalisation.

Parmi les méthodes de lissage utilisées, nous citerons:

- Burgers et Killebrew:

Soit T la durée imposée de la réalisation:
$\Gamma(\theta)$ la courbe de charge "idéale"
$\Gamma'(\theta)$ une courbe de charge réalisable.

La qualité de $\Gamma'(\theta)$ par rapport à $\Gamma(\theta)$ est supposée varier en raison inverse de

$$I = \int_0^T \left[\Gamma'(\theta) - \Gamma(\theta)\right]^2 \, d\theta$$

Il s'agit donc de minimiser I sous les contraintes:

$$\int_0^T \Gamma'(\theta).\, d = \int_0^T \Gamma(\theta).\, d\theta = \text{quantité totale nécessaire} +$$

- lissage en parallèle, par découpage de la durée de la réalisation en intervalle significatifs étudiés un à un (on opèrera un réajustement des dates de début des tâches).

On pourrait présenter d'autres méthodes (CPM, RAMPS, ...), en particulier pour les cas où les durées des tâches sont variables. Leur multiplicité suffit à montrer le grand besoin d'une théorie unitaire relative à ces problèmes.

La méthode d'exploration systématique de l'ensemble des ordonnancements possibles, dont suit une brève présentation, constitue un premier pas en ce sens.

4.3.3. <u>Méthode de la description segmentée d'un ensemble</u>.

Un ordonnancement possible T peut être défini par une suite ordonnée de n nombres réels $T = (t_1, \ldots, t_n)$. L'ensemble P des possibles est donc une partie de R^n qui est généralement définie par une famille de contraintes linéaires ou non:

$$q_f(T) \geqslant 0 \text{ pour } f \in F$$

Il s'agit de chercher quelles sont ceux des ordonnancements $T \in P$ qui rendent minimum une fonction donnée $\Gamma_k(T)$. On désigne par t_o une nouvelle variable et on pose:

$$t_o \geqslant \Gamma_k(t_1, \ldots, t_n)$$

Les vecteurs $\{t_o, t_1, \ldots, t_n\}$ satisfaisant à cette contrainte et à celles définissant P constituent un ensemble P_o.

Pour se faire une idée de P_o, on peut commencer par étudier la valeur minimum U_i et la valeur maximum V_i que peut prendre chaque composante t_i de P_o. On définit ainsi un "parallélépipède" contenant P_o:

$$U_i \leqslant t_i \leqslant V_i \text{ pour tout } i \in (N+o)$$

On peut ensuite, afin d'éliminer certaines parties parasites de ce "parallélèpipède", chercher des bornes fonctionnelles pour chaque t_i.

On démontre qu'il est possible, si P_o satisfait à certaines conditions, de définir pour chaque variable t_i un intervalle de variation I_i de la forme:

$$U_i\ (t_o, t_1, \ldots, t_{i-1}) \leqslant t_i \leqslant V_i\ (t_o, t_1, \ldots, t_{i-1})$$

vérifiant les conditions:

a: Tout système de nombre appartenant à ces intervalles constitue un point de P_o.

b: I_i est défini non vide pour tout système de nombres $(t_o, t_1, \ldots, t_{i-1})$ appartenant aux intervalles de rang inférieur, quelque soit i.

Si P_o vérifie ces conditions, on dit qu'il est segmentable et qu'on a ainsi construit sa description segmentée.

Il est clair qu'alors:

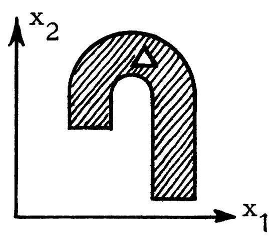
$$\text{Min } \Gamma_k\ (T) = U_o$$

Les ensembles segmentables sont donc particulièrement intéressant du point de vue qui nous préoccupe. Il faudrait maintenant préciser leur nature et montrer qu'ils constituent une classe abondante. On peut démontrer à ce sujet que tout sous ensemble Δ convexe, fermé, non vide de R^n est en particulier segmentable.

Remarque sur l'importance de l'ordre des variables:

Certains ensembles sont segmentables pour un ordre des variables, non pour un autre.

Exemple:



Δ est segmentable pour (x_1, x_2), non pour (x_2, x_1).

Réponse à l'exercice introductif n = 1.3.

Variables choisies:

$$\begin{cases} t_1 = \text{époque de fin de B.} \\ t_2 = \dfrac{15}{n_B} \\ t_3 = \dfrac{15}{n_A} \\ t_4 = \text{époque de début de A.} \end{cases}$$

Système des contraintes:

Définition de P.:

$$t_4 \geqslant o$$
$$t_3 - 1 \geqslant o$$
$$- t_3 + 5 \geqslant o$$
$$t_2 - 1 \geqslant o$$
$$- t_2 + \frac{5}{2} \geqslant o$$
$$- \frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_2} + \frac{n}{15} \geqslant o$$
$$- 20\, t_2 + t_1 - 10 \geqslant o$$
$$t_4 + 20\, t_3 + 20\, t_2 - t_1 \geqslant o$$
$$- t_4 - 40\, t_3 + t_1 \geqslant o$$

Construction de la description segmentée de P :

	bornes inférieures	variables	bornes supérieures
a.	o $- 20\, t_3 - 20\, t_2 + t_1$	t_4	$- 40\, t_3 + t_1$
b.	1 $\dfrac{1}{\frac{n}{15} - \frac{1}{t_2}}$	t_3	5 $\dfrac{t_1}{40}$ t_2
c.	1 $\dfrac{15}{n}$ $\dfrac{15}{n-3}$ $\dfrac{1}{\frac{n}{15} - \frac{40}{t_1}}$ $\dfrac{30}{n}$	t_2	$5/2$ $\dfrac{t_1 - 10}{20}$
d.	40 30 $10 + \dfrac{300}{n-3}$ $\dfrac{600}{n-6}$ $\dfrac{s\left[n+90+ \sqrt{(N+90)^2 - 240n}\right]}{n}$ $10 + \dfrac{600}{n}$ $\dfrac{600}{n}$	t_1	

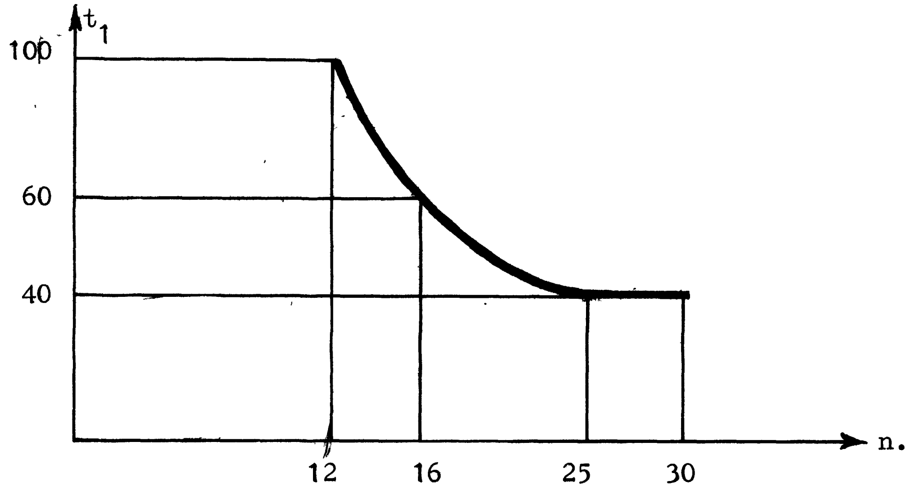
Conclusion:

si $12 \leqslant n \leqslant 16$, $t_1 \geqslant \frac{600}{n-6}$

si $16 \leqslant n \leqslant 25$, $t_1 \geqslant \frac{5}{n}\left[n + 90 + \sqrt{(90+n)^2 - 240\,n}\right]$

si $25 \leqslant n$ $t_1 \geqslant 40$

d'où le graphique: date au plus tôt d'achèvement des travaux en fonction de n.



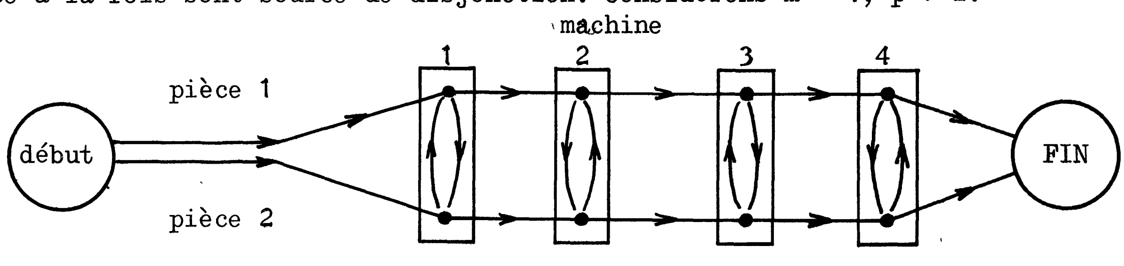
Note: Solution détaillée dans (Bibliographie 7).

4.4. Les problèmes à contraintes disjonctives

Les difficultés d'ordre combinatoire posent ici des problèmes tels que peu de résultats ont été jusqu'à présent obtenus.

Il s'agit ici de trouver un ordre sur les différents ensembles de disjonction (ensemble de tâches entre lesquelles aucun ordre n'est imposé) de manière à rendre optimal le calendrier d'exécution. Une fois cet ordre fixé, le problème se ramène à un problème de potentiels sur un graphe.

Exemple: soient m machines servant à la fabrication de p pièces.
Les opérations qu'il s'agit d'effectuer sur une pièce doivent être généralement exécutées dans un ordre bien défini; mais il n'en est pas de même des ordres de passage des pièces sur une machine. Les machines ne pouvant recevoir qu'une pièce à la fois sont source de disjonction. Considérons m = 4, p + 2:



On peut se ramener à l'étude d'un système de potentiels sur un graphe en faisant toutes les combinaisons possibles de flèches. Mais on ne peut plus construire directement le ou les minorants de P, P n'ayant plus la structure de treillis.

Quelques résultats:

1. Pour m = 2 ou 3, il existe une solution optimale dans laquelle les ordres de passage des pièces sur chaque machine sont identiques.

2. Pour m = 2 (Théorème de Johnson): l'ordre optimal est définit comme suit: on considère une partition de l'ensemble des pièces en 2 classes:

$C_1 = \{$ pièces dont la durée de passage sur la machine (1) est inférieure ou égale à la durée de passage sur (2) $\}$

$C_2 = \{$ les autres pièces $\}$, et on ordonne les pièces de C_1 dans l'ordre croissant des durées de passage sur la machine (1), puis les pièces de C_2 dans l'ordre décroissant des durées de passage sur (2).

3. Des procédures plus générales sont à l'étude. Dans (Bibliogr. 1) on trouvera la présentation de l'une d'entre elles qui consiste à construire sur les ensembles de disjonction des permutations des tâches pouvant donner lieu à des ordonnancements minimum, puis à caractériser ces ordonnancements minimum, ce qui permet de définir un procédé simple de passage d'un ordonnancement minimal à un autre, et donc de décrire l'ensemble des ordonnancements minimaux.

Solution de l'exercice 1.2.

Rappel: une clique d'un graphe symétrique G = (X,U) est un ensemble $C \subset X$ tel que:

$$x \in C,\ y \in C \implies y \in \{\text{suivants de } x\}$$

Une clique qui n'est sous graphe propre d'aucune autre clique est dite maximale pour G.

On définit le graphe G:

X = ensemble des conférences qui doivent avoir lieu;

U = ensemble des relations de compatibilité entre conférences, c'est-à-dire la propriété pour deux conférences de n'avoir ni auditoire, ni professeur commun.

G est symétrique. Etablir le calendrier des conférences consiste à affecter à chaque conférence une heure de l'après-midi. L'ensemble des sommets du graphe est ainsi partitionné en classes. Pour que le calendrier soit acceptable, il faut et il suffit que chaque classe soit une clique.

Le problème posé est donc celui du recouvrement des sommets du graphe par une famille de cliques maximales ayant le nombre minimum de membres.

Il se résoud simplement dans l'exemple considéré. On trouvera une présentation générale de l'algorithme dans (Bibl. 13).

V. CONCLUSION

Ce tour d'horizon des méthodes utilisées dans un domaine de la Recherche Opérationnelle montre bien que, malgré l'apport d'un vocable unique pour traiter des problèmes très différents, il serait vain de vouloir échafauder une théorie générale qui soit à même de les résoudre indépendemment de leur contexte concrèt.

Ce n'est qu'après une analyse soigneuse de la réalité (passée sous silence ici, en fait une source de grandes difficultés) qu'on est en mesure de diagnostiquer la méthode qui semble la mieux adaptée.

Peut être y a-t-il là un enseignement à tirer pour tous chercheurs en Sciences Humaines...

BIBLIOGRAPHIE

1. - Les problèmes d'Ordonnancement, par un groupe de spécialistes animé par B. ROY, Monographie de l'AFIRO, Dunod.

2. - Physionomie et Traitement des Problèmes d'Ordonnancement, B. ROY - Gestion Avril 1963.

3. - Numéro spécial sur la Recherche Opérationnelle - Articles de B. ROY, ROSS, MUIR et WATERMAN. Gestion - Mai 1964.

4. - La Méthode du Chemin critique - A. Kaufmann et G. Desbazeilles - Dunod.

5. - Métra, Volume II, n° 4, 1963 - Programmation mathématique et description segmentée, B. ROY.

6. - Métra, Cheminement et Convexité dans les graphes. Application aux problèmes d'Ordonnancement. B. ROY - 1962.

7. - Revue Française de R.O., N° 18, 1961, Description segmentée d'un ensemble, B. ROY et M. SIMONNARD.

8. - Le système PERT, E. VENTURA, Avril 1963.

9. - FUCHS: Une méthode d'analyse et d'évaluation des programmes: le PERT, in Chefs d'entreprise - Août 1962.

10. - La recherche opérationnelle aux U.S.A., par H. VENTURA, Revue Française de Recherche Opérationnelle, N° 25, 4° trimestre 1962.

11. - La Théorie des Graphes et ses applications, par Cl. BERGE, Dunod 1958.

12. - Prise en considération des contraintes pesant sur la disponibilité des moyens dans les méthodes de chemin critique, par BOSS, Centre Français de Recherche Opérationnelle - Mars 1965.

13. - Quelques considérations sur les problèmes d'emplois du temps - par J.-C. HERTZ, AFIRO - Avril 1965.