MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. EYTAN

Topologie et logique propositionnelle modale

Mathématiques et sciences humaines, tome 12 (1965), p. 29-30
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__12__29_0>

M. EYTAN

TOPOLOGIE ET LOGIQUE PROPOSITIONNELLE MODALE

Si l'on considère Aristote comme le premier logicien (formel) à qui nous sommes redevables de tous les développements ultérieurs, on sait en revanche assez peu que c'est encore lui qui a introduit, en plus des assertions usuelles, des "assertions fortes" du type "cela est nécessairement vrai" et des assertions faibles du type "cela est possiblement vrai". Une logique qui incorpore ces deux types supplémentaires d'assertions est appelée modale.

Il faudra attendre jusqu'à Lewis (cf Lewis - Langford (1)) pour voir à nouveau un logicien s'intéresser à la logique modale. Celui-ci ne proposera pas un seul système, mais toute une série de systèmes, et parmi eux un, qu'il appela S4, retiendra notre attention. Nous ne retiendrons pas, pour des raisons de commodité, les notations de Lewis.

Convenons de représenter les propositions (et dans tout ce qui suit tous les objets logiques seront des propositions) de notre système par des minuscules latines x, y, z, ...

On peut définir les opérations logiques de conjonction $x \wedge y$ ("x et y"), de disjonction $x \vee y$ "("x ou y, ou les deux"), et de négation x' ("non-x") sur l'ensemble des propositions considérées. Distinguons de plus, dans l'ensemble B des propositions, la proposition fausse 0 et la proposition vraie 1. L'ensemble B, muni des opérations $\wedge$, $\vee$, $'$, et des éléments distingués 0, 1 constitue une algèbre booléenne. Définissons encore l'élément $x \rightarrow y$ de B ($x \rightarrow y$ n'est pas une implication, mais une proposition) comme une abréviation de $x' \vee y$, $x \leqslant y$ comme une abréviation de "($x \rightarrow y$) est un théorème" (on montre que la relation $x \leqslant y$ est une relation d'ordre, réflexive, anti-symétrique et transitive), c'est-à-dire "non-x ou y est un théorème". Utilisant Nx pour l'assertion forte ("x est nécessaire") et Px pour l'assertion faible ("x est possible"), les axiomes du système S4 de Lewis s'écrivent :

1) $x \wedge y \leqslant x$
2) $x \wedge y \leqslant y \wedge x$
3) $(x \wedge y) \wedge z \leqslant x \wedge (y \wedge z)$
4) $x \leqslant x \wedge x$
5) $N(x \rightarrow y) \wedge N(y \wedge z) \leqslant N(x \rightarrow z)$
6) $x \leqslant Px$
7) $PPx \leqslant Px$
8) $Nx = (Px')'$

auxquels il faut adjoindre les diverses règles primitives (de formation, de substitution, d'adjonction, de détachement) qui nous importent peu ici, n'intervenant que dans les questions de déduction.

Mac Kinsey (2) démontre quelque temps plus tard que ce système de postulats équivaut au suivant :

0) B est une algèbre booléenne par rapport aux opérations $\wedge$, v,' et aux éléments distingués 0,1;

1) $P0 = 0$

2) $Px \geqslant x$

3) $PPx = Px$

4) $P(x \vee y) = Px \vee Py$

quels que soient x et y dans B.

Opérons maintenant le changement de notation suivant :

B	2^E
$x \wedge y$	$A \cap B$
$x \vee y$	$A \cup B$
x'	cA
0	$\emptyset$
1	E
Px	fA
$x < y$	$A \subset B$

L'axiome 0) ci-dessus signifie que 2^E est une algèbre booléenne, ce qui est trivial. Les axiomes 1), 2), 3), 4), deviennent les formules (0), (2), (3), (4) du paragraphe précédent.

Toute logique propositionnelle modale (vérifiant les axiomes S4 de Lewis) peut donc être représentée comme un espace topologique, où P est la fermeture (et par suite N est l'intérieur).

En particulier tout ce que l'on sait sur les espaces topologiques peut être interprété en termes logiques (et inversement): ainsi l'algèbre de Kuratowski y est la même, et NPNP = NP.

Bibliographie :

1 - LEWIS - LANGFORD: Symbolic Logic (Dover, New-York, 1959).

2 - Mac KINSEY : A solution of the decision problem for the Lewis system S2 and S4 with an application to topology, Journal of Symbolic Logic 6 (1941) pp. 117-134.