MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

J. CHOULEUR

Graphiques et tableaux

Mathématiques et sciences humaines, tome 10 (1965), p. 3-30
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__10__3_0>

J. CHOULEUR

N.D.R.L.- L'article de Monsieur J. Chouleur est le second que nous publions sur les représentations graphiques (voir M.S.H. N° 6). Nous pensons que ce thème, sur lequel une réflexion est particulièrement utile en vue de la pédagogie des mathématiques, provoquera d'autres articles que nous serions en mesure de publier.

Signalons que l'Association des Professeurs de Mathématiques a également commencé, dans son bulletin d'octobre 1964, une série de publications sur le même sujet.

GRAPHIQUES ET TABLEAUX *

La collecte et l'élaboration d'une information sont choses difficiles et coûteuses. (1)

Or, il ne suffit pas de disposer d'une information pour qu'elle soit efficace: tant qu'elle n'est pas assimilée par son destinataire, elle est en fait inexistante.

Ainsi, toute élaboration d'information devrait normalement être assortie de l'étude des modes d'expression en permettant l'assimilation aisée.

Nous allons voir que la représentation graphique y trouve une place de choix.

Mieux, même, le graphique est un véritable outil de travail, mais pour pouvoir remplir ce rôle, il doit donner une représentation correcte de l'information dont il est l'image.

On peut grossièrement classer les modes d'assimilation en trois catégories:

1. La lecture séquentielle d'un document. C'est le procédé le plus immédiat: l'information apparaît sous forme d'un texte ou d'une suite de données, de telle sorte que le lecteur prend successivement connaissance des différents éléments de l'information (2).

Ce procédé ne permet pas une assimilation aisée. En effet, la bonne compréhension d'une information suppose des rapprochements et des comparaisons qu'il est très difficile de faire, car notre mémoire est insuffisante.

---

* Ce chapître est extrait de l'ENCYCLOPEDIE DE L'ENTREPRISE MODERNE, tome 6, Les techniques mathématiques dans l'entreprise, par Jean CHOULEUR. L'Encyclopédie est publiée sous la direction de Roland CAUDE, par l'Entreprise Moderne d'Edition, 4, rue Cambon, Paris 1er. - Notice sur demande.

(1) Nous entendons ici principalement l'information chiffrée: statistiques, chiffres comptables, résultats d'études financières ou techniques. Mais nous verrons que les procédés graphiques et que les tableaux sont également importants pour des descriptions où les valeurs numériques ne sont pas dominantes, ou sont même totalement inexistantes.

(2) Les communications avec nos semblables sont généralement séquentielles: lecture, écriture, parole sont soumises à cette contrainte.

De plus, dès que le nombre des éléments décrits est un peu important, il est à peu près impossible de retirer une vue d'ensemble d'une simple lecture.

2. Le tableau apporte une dimension supplémentaire. On reste soumis à la contrainte séquentielle de la lecture, mais il est possible de faire une lecture horizontale ou verticale, et de nombreux rapprochements qui étaient interdits précédemment deviennent aisés, d'autant plus que la disposition en tableau facilite l'adjonction d'éléments de comparaison, comme des pourcentages par exemple.

3. Le graphique a recours à des processus très différents. La lecture n'intervient plus que par un rôle mineur dans les intitulés et la légende.

L'assimilation de l'information repose ici sur une saisie synthétique d'une représentation imagée de l'information: l'oeil a la faculté de comparer aisément longueurs, aires, courbures et pentes. Il distingue des représentations superposées si l'on recourt à différents graphismes (hachures, traits gras, tirets, etc.) ou à la couleur: on peut ainsi situer chaque élément dans tout un contexte:
Le graphique permet simultanément l'analyse et la synthèse.

Tableaux et graphiques sont donc des modes privilégiés de communication.

Nous savons que les Ensembles se caractérisent par leur structure et que des ensembles constitués par des éléments de natures différentes, et dans lesquels existent des relations dont l'énoncé n'utilise pas les mêmes termes, peuvent être mis en correspondance lorsque les structures sont les mêmes (ensembles isomorphes ou homomorphes).

Tout l'intérêt des graphiques repose sur cette correspondance entre une certaine structure des points et lignes de la représentation graphique et la structure abstraite du phénomène étudié.

Le graphique n'est correct - dont pleinement utile et non trompeur -, que lorsque cette correspondance existe.

On saisit ainsi combien les graphiques ne sauraient être employés arbitrairement, mais aussi combien ils constituent des outils de travail particulièrement riches, puisque toutes les propriétés existant dans l'ensemble géométrique de la représentation graphique vont avoir une traduction dans la structure du phénomène étudié.

Cette richesse a une contrepartie: puisqu'un graphique n'est pas une image, destinée à rendre moins austère la lecture d'un document, il demande à être compris par celui qui l'utilise et la densité même d'information rend nécessaire une véritable étude de sa signification.

GRANDES FAMILLES DE GRAPHIQUES

Nous savons, par notre expérience quotidienne, qu'il existe un grand nombre de types de graphiques.

Nous ne rechercherons pas ici à en faire une énumération complète. Il serait bien prétentieux d'affirmer avoir fait le tour d'un mode d'expression où bien des nouveautés nous attendent encore.

Nous avons seulement désiré établir une classification de quelques-uns des types les plus usités, en mettant l'accent sur les raisons profondes qui rendent une représentation graphique correcte ou fallacieuse.

1. GRAPHIQUES REPRESENTANT LA STRUCTURE D'UN ENSEMBLE

a) ensembles non totalement ordonnés

- ces représentations reposent sur le fait qu'un segment a deux extrémités et qu'il peut être orienté; elles servent à représenter des relations binaires, orientées ou non: organigrammes, arbres généalogiques, diagrammes d'ordonnancement ou similaires, sociogrammes, etc.

b) ensembles totalement ordonnés

- il est possible de représenter un ensemble totalement ordonné sur un axe. Mais, généralement, on profite de la deuxième dimension du plan pour rendre la représentation plus aisée.

2. GRAPHIQUES METTANT EN CORRESPONDANCE DEUX ENSEMBLES

Ces graphiques - les plus courants - reposent sur le fait que le plan, ayant deux dimensions, permet de décrire un ensemble sur chaque axe de coordonnées, les points du plan marquant alors une correspondance entre ces deux ensembles.

- les deux ensembles peuvent l'un et l'autre être divisés en classes;
- l'un des deux ensembles est divisé en classes, alors qu'in existe un ordre dans l'autre;
- ce second ensemble peut être mesurable;
- les deux ensembles sont ordonnés;
- l'un est ordonné et l'autre est mesurable;
- les deux ensembles sont mesurables.

Notons que la même correspondance obtenue ici par les points situés à l'intersection des deux ordonnées représentant les éléments de chaque ensemble, peut être établie en joignant par une droite les points représentatifs de ces éléments. Cette représentation duale sera développée un peu plus loin.

o

o o

I - GRAPHIQUES REPRESENTANT LA STRUCTURE D'UN ENSEMBLE

a) ensembles non totalement ordonnés

ORGANIGRAMMES. ARBRES GÉNÉALOGIQUES

Dans toutes les entreprises les relations hiérarchiques font l'objet d'une représentation graphique, l'organigramme.

Il se présente généralement sous la forme d'un arbre aux ramifications dirigées vers le bas.

Pourquoi cette représentation est-elle correcte ?

La structure à représenter est la suivante:

Entre deux membres de l'entreprise il peut:

a) exister une liaison hiérarchique directe et, dans ce cas, la liaison est orientée (par exemple du chef vers le subordonné);

b) ne pas exister de liaison hiérarchique directe.

Chaque élément de l'ensemble (chaque membre du personnel) est représenté par un cartouche.

Lorsque deux cartouches représentent deux personnes ayant une liaison hiérarchique, un arc est tracé entre eux.

L'orientation est donnée par la situation relative des deux cartouches, celui qui est placé plus haut étant le supérieur hiérarchique de l'autre. (fig. 1).

Ainsi, la relation "A supérieur hiérarchique de B", est exprimée par un arc orienté: cette image est correcte.

Toute relation binaire antisymétrique (si elle est vérifiée dans un sens, elle ne peut l'être dans l'autre), peut faire l'objet de cette même représentation.

Ainsi la filiation par descendance masculine par exemple, est représentée correctement par de tels graphiques. On sait par contre que l'arbre généalogique ne permet pas de représenter correctement toutes les relations de filiation; cette représentation ne permet pas en effet d'exprimer "Pierre est fils de Paul et de Jeanne".

Mais il est possible de faire l'arbre généalogique inversé d'une personne: il présente une grande régularité puisque chaque ascendant a, lui-même, deux ascendants. Les seules irrégularités proviennent des mariages consanguins (fig.2).

PLANS DE CLASSEMENT

Lorsqu'un ensemble est divisé en sous-ensembles, divisés eux-mêmes en sous-ensembles plus petits, etc..., il est possible de représenter ces inclusions successives sous une forme graphique ou synoptique les mettant en évidence.

Citons le plan de classement des espèces animales ou végétales (fig. 3).

Cette représentation conduit donc à un homomorphisme avec les arbres généalogiques.

Dans les entreprises, on recourt fréquemment à des classements des matières premières, des pièces, des assemblages complets.

Est-il possible de faire une représentation correcte selon un plan de classement ramifié, qui est indispensable pour affecter un symbole représentatif et permettre une recherche aisée ?

Ici, contrairement au cas précédent où les parties les plus petites étaient contenues entièrement dans un sous-ensemble et un seul, chaque pièce, par exemple, appartient à plusieurs sous-ensembles qui se recoupent: matière, forme, dimensions, définisant un réseau complet (fig. 4), et l'on ne parvient à une symbolisation pratique qu'en fixant d'abord, arbitrairement, un ordre dans les différentes partitions.

On classera d'abord les pièces par leur matière constitutive.

A l'intérieur de chacune de ces classes on fera de nouvelles classes correspondant à la forme générale, puis à tel détail de fabrication, etc., mais aucune représentation graphique correcte ne peut être réalisée en dehors de cas artificiellement simples: le diagramme d'Euler permet tout au plus de choisir trois critères pouvant prendre deux valeurs (fig. 5).

pièces ferreuses	(F)	-	pièces non ferreuses	(NF)
pièces de révolution	(R)	-	pièces non de révolution	(NR)
pièces percées	(P)	-	pièces non percées	(NP)

Dans ce cas particulier, on retrouve la disposition du simplexe d'ordre 3 (fig. 6). S'il y avait plus de trois critères ou plus de deux valeurs pour tel ou tel critère, cette seconde représentation pourrait être utilisée, mais le dessin deviendrait très vite illisible.

GRAPHIQUES D'ORDONNANCEMENT OU PERT ET SIMILAIRES

Dans la réalisation d'un chantier important, dans la construction d'une grosse machine, certaines opérations se commandent l'une l'autre: on ne peut bâtir un mur que lorsque les fondations sont faites, etc.

Entre toutes les opérations élémentaires existe donc une relation binaire telle que l'une des deux options ci-dessus soit vérifiée:
1) une des opérations doit être exécutée avant l'autre;
2) il n'y a pas d'enchaînement entre les deux opérations.

Il s'agit bien d'une relation d'ordre antisymétrique (si A doit être fait avant B, alors B ne doit pas être fait avant A), et transitive (si A doit être fait avant B, et B avant C, alors A doit être fait avant C).

Cet enchaînement crée un isomorphisme entre les opérations élémentaires et un ensemble ordonné:
- entre deux éléments, il peut y avoir une liaison et, si elle existe, elle est orientée et transitive,
- de plus, il existe un minimum: les opérations suivent toutes la décision initiale. Cette décision est donc une étape précédant toutes les autres,
- il existe de même un maximum: c'est la mise en service qui suit l'exécution de toutes les étapes de la construction.

Dans un réseau PERT, ce sont les étapes qui constituent les éléments de l'ensemble et les arcs les opérations. L'orientation pourrait être donnée en situant les opérations de la gauche vers la droite dans l'ordre de leur exécution. Cette convention est en général respectée, mais, pour donner plus de liberté au dessinateur et ne pas entraîner de confusion dans le sens de succession des opérations, les arcs sont fléchés (fig. 7).

b) ensemble totalement ordonnés

La succession des points sur une droite constitue un ensemble totalement ordonné. Il est donc isomorphe à tous les ensembles totalement ordonnés que nous pouvons désirer représenter.

Ainsi la durée totale d'insolation d'un observatoire météorologique peut être représentée sur un axe (fig. 11).

Cette représentation est correcte, mais elle est de lecture assez pénible si le nombre de points à représenter n'est pas très réduit.

De plus, on a souvent intérêt à assimiler des valeurs très voisines du caractère que l'on veut représenter et l'on regroupe les mesures à l'intérieur de classes.

Les heures d'insolation, par exemple, sont comptées en heures, sans tenir compte des minutes. Ainsi 194 heures 33 minutes et 195 heures 28 minutes sont regroupées en "195 heures".

Ce recours à des classes est très général: les classes de mobilisation répondent exactement à cette définition; la taille des êtres humains est regroupée sur le centimètre le plus voisin, etc..

Un exemple conduit à un graphique appelé histogramme ou pyramide des âges, dans le cas particulier où l'on analyse une population d'après les âges.

Regroupons les heures d'insolation par tranches de 50 heures. On obtient le tableau suivant:

Classes	Mois
0 à 49 heures	Décembre
50 à 99 heures	Janvier, Février, Novembre
100 à 149 heures	Septembre, Octobre
150 à 199 heures	Mars, Avril, Mai, Juin, Août
200 à 249 heures	----
250 à 299 heures	Juillet.

Ce tableau se traduit graphiquement par la fig. 12. Chaque mois est représenté par un rectangle situé dans une colonne correspondant à sa classe de durée d'insolation. Il est possible de porter dans ce rectangle un repère permettant de l'identifier. Il a été possible ici d'écrire le nom du mois en toutes lettres. Dans d'autres cas, on se contentera d'un numéro.

Un tel histogramme reste encore parfaitement lisible pour représenter 100, 200, voire 500 éléments.

D'autres représentations du même type sont utilisées (par cumul des effectifs de chaque classe en particulier).

II - GRAPHIQUES METTANT EN CORRESPONDANCE DEUX ENSEMBLES

Puisqu'il s'agit de mettre en correspondance deux ensembles, il est à prévoir que la structure des ensembles à représenter va avoir une grande importance sur le choix des modes de représentation et sur les contraintes à respecter.

Du point de vue qui nous intéresse, il y a lieu de distinguer:

a) les ensembles divisés en classes, par une relation d'équivalence.

Par exemple, "être natif de tel département" représente une telle relation d'équivalence: chaque personne née en France appartient à une classe et une seule.

De même: "être client rattaché à tel agent commercial" représente aussi une relation d'équivalence.

b) les ensembles totalement ordonnés, tels que deux éléments peuvent être toujours comparés l'un à l'autre et que cette comparaison permet de mettre l'un des deux éléments avant l'autre, ou de dire qu'ils sont égaux.

La température, la taille d'individus sont des caractères totalement ordonnés.

c) les ensembles mesurables, qui ajoutent à la propriété précédente, celle d'autoriser l'addition. Ainsi le montant des chiffres d'affaires, les tonnes de production sont des éléments mesurables.

Le caractère ordonné ou mesurable peut être quelquefois dû à l'optique particulière où l'on examine un problème.

On pourrait multiplier les exemples: nous rappelons la charge utile des camions, évoquée à propos des ensembles mesurables. A chaque fois qu'un objet présente une dimension (longueur, poids, capacité, etc..) ce caractère peut ne permettre que la comparaison (création d'un ordre) ou autorise l'addition (création d'une mesure) selon le problème abordé.

A - Représentation de deux ensembles divisés en classes

Les effectifs d'une petite entreprise comprennent 25 personnes pouvant chacune accomplir un certain nombre des 12 fonctions à assumer.

La direction a établi un tableau rectangulaire en mettant un nom sur chaque ligne et en représentant chaque fonction par une colonne (fig. 8).

Le tableau est complété par des croix indiquant les compétences de chacun.

Ainsi, l'ensemble des effectifs est mis en correspondance avec l'ensemble des fonctions.

Ce travail simple permet de juger si les différentes fonctions peuvent être remplies par un nombre suffisant de personnes (nombre de croix dans une colonne) et la polyvalence du personnel (nombre de croix dans une ligne).

On dispose ainsi d'un outil permettant de faire évoluer le recrutement, et de parer au mieux à une absence.

Ainsi, chaque ligne représente un élément du premier ensemble (l'un des membres du personnel) et chaque colonne un élément du second ensemble (l'une des fonctions à assumer).

Le dessin plus dépouillé de la fig. 9 a évidemment la même signification, mais insiste davantage sur l'origine géométrique de la représentation: deux droites perpendiculaires se coupent en un point et un seul. Il est donc possible de mettre chaque élément du premier ensemble en correspondance avec chaque élément du second ensemble, et cela de façon unique.

Mais à la propriété: "deux droites se coupent en un point et un seul" correspond l'énoncé suivant: "deux points définissent une droite et une seule". On voit la dualité entre ces deux propriétés et il doit être possible d'en tirer une autre représentation graphique, correcte comme la précédente.

La fig. 10 est la figure <u>duale</u> de la précédente.

Dans ce cas particulier la lecture est moins aisée avec la seconde représentation. Nous verrons qu'il n'en est pas toujours ainsi, et dans la pratique, il est bon de recourir lorsque c'est possible aux deux représentations duales: il y a souvent d'agréables surprises.

Bien qu'il s'agisse d'une opération un peu plus complexe que la simple correspondance de deux ensembles, la "matrice de découverte" est proche parente du tableau à double entrée qui vient d'être décrit:

On élabore la collection d'été des "Tricots savoisiens".

Les membres de l'équipe de sélection ne parviennent à se mettre d'accord:

- ce tricot à grosses côtes est voué au plus large succès pour peu que la saison soit fraîche, comme ces dernières années;
- pour ma part, j'estime que tout l'effort doit porter sur ce ras-de-cou: un rayon de soleil et la collection s'envole ...

Le chef des ventes, resté jusqu'ici silencieux, trace sur un papier le tableau suivant (fig. 13).

Quels que soient les modèles choisis, l'été peut être sec ou humide, doux ou froid.

La discussion qui allait s'enliser s'établit désormais sur des bases solides. Chaque article sera confronté avec chaque type de saison, et c'est au vu de l'ensemble des conséquences des décisions possibles que sera arrêté le choix.

Le développement de ce problème fait l'objet d'un chapitre de la théorie des jeux qui repose en grande partie sur l'étude de telles matrices.

B - Représentation d'un ensemble divisé en classes et d'un ensemble ordonné ou mesurable

Alors que la mise en correspondance de deux ensembles divisés en classes conduisait au tableau, l'introduction d'un ensemble ordonné conduit à la représentation graphique proprement dite.

Le plus souvent l'ensemble ordonné est également mesurable. Ce genre de représentations graphiques est très fréquent dans les entreprises: chiffre d'affaires réalisé par les agences, nombre de clients par département, etc..

Soit par exemple, à représenter les données du tableau suivant:

Agence	Région Parisienne	Nord	Centre	Ouest	Est	Midi
Chiffre d'affaires	3.741	1.732	1.264	1.521	2.221	1.125

La représentation la plus simple est donnée par des bâtons (fig. 14).

Une telle représentation est correcte à condition de faire apparaître le zéro de l'échelle des ordonnées.

Cette condition doit être remplie, car le chiffre d'affaires étant mesurable, la comparaison des longueurs a un sens: l'activité de l'agence Est est, à peu de chose près, double de celle du Midi, les deux bâtons correspondants doivent avoir des longueurs dans ce même rapport de 2 à 1.

Il peut arriver que le maintien du zéro ne soit pas possible lorsque tous les chiffres à représenter sont très voisins d'une même valeur. Si les chiffres des agences étaient les suivants:

3.741 3.529 3.512 3.641 3.701 3.631

le respect de la règle énoncée ci-dessus rendrait illisibles les écarts entre agences. Il faut alors attirer l'attention du lecteur (1) du graphique par un artifice, pour éviter une erreur d'interprétation (fig. 15).

(1) ... même quand ce lecteur est l'auteur du graphique lui-même.

La représentation en bâtons peut être remplacée par des tuyaux d'orgues, soit jointifs (fig. 16) soit séparés (fig. 17).

La signification est évidemment la même ainsi que les précautions à prendre, si l'échelle ne peut être représentée en entier; il faut faire apparaître une brisure entre le zéro et la partie utile (fig. 18 et 19).

Le choix entre ces différents modes d'expression est une pure affaire de goût.

L'esthétique n'étant pas étrangère à la facilité avec laquelle on appréhende une information, on peut être amené à varier les représentations pour éviter la monotomie.

Remarque.- L'ensemble représenté en abscisses (ici les agences) étant composé de classes, c'est-à-dire de sous-ensembles disjoints les uns des autres et non ordonnés entre eux, la représentation qui joindrait le sommet des bâtons (sur la fig. 14) pour faire un tracé en ligne brisée est dépourvue de signification; on ne peut se trouver à mi-chemin entre l'agence du Nord et celle du Centre avec un chiffre d'affaires de:

$$\frac{1732 \times 1264}{2} = 1.498$$

On peut s'attacher particulièrement aux valeurs prises par chaque classe. Ces valeurs constituent un ensemble totalement ordonné. Il est alors possible de donner une représentation simplifiée, déjà vue précédemment à propos de la représentation d'un ensemble ordonné.

La représentation de la fig. 20 est donc équivalente aux précédentes, mais rencontre les limites signalées à propos de la fig. 11.

On a fréquemment à associer à un ensemble divisé en classes deux ou trois ensembles mesurables, par exemple: on exprime graphiquement non seulement le chiffre d'affaires des agences, mais aussi le tonnage vendu.

Une représentation correcte en est donnée sous chacune des formes déjà vues en fig. 21.

Si l'on est amené à faire une coupure entre le zéro des ordonnées et la partie utile du graphique, les précautions à prendre se multiplient.

Les fig. 22 à 24 illustrent le danger de représentations incorrectes. Elles donnent différentes représentations des données suivantes:

	Nord	Sud	Est	Ouest
Chiffre d'affaires	25	25	29	26
Tonnes	44	45	51	50

Sur la fig. 22 "Nord", semble avoir particulièrement lâché les prix puisque le tuyau d'orgue "tonnage" est plus haut que celui du chiffre d'affaires. "Est", au contraire, a un chiffre d'affaires élevé au regard du tonnage: l'ordre de classement des "bonnes affaires" (1) est donc: Est, Sud, Ouest, Nord. Mais la représentation de la fig. 23 obtenue avec les mêmes chiffres, donne une impression toute différente, cette fois c'est "Sud" qui vient en tête avec un chiffre d'affaires dépassant de beaucoup le tonnage; puis, Nord, Est, et, enfin, Ouest.

(1) Ordre de classement correspondant apparemment aux meilleurs prix de vente moyens.

La fig. 24 est correcte: les deux échelles des francs et des tonnages apparaissent entièrement avec leur zéro. Désormais, l'ordre de classement est: Est, Sud, Nord, Ouest.

Il correspond effectivement au prix moyen de vente à la tonne:

Est	0,570
Sud	0,558
Nord	0,523
Ouest	0,520

Où est l'explication?

Les fig. 25 et 26 rétablissent les fig. 22 et 23 en totalité. Il a suffi que les zéros des deux échelles, tonnage et chiffre d'affaires ne coïncident pas pour permettre d'obtenir une représentation favorable à n'importe quelle thèse!

Des erreurs de cet ordre sont fréquentes, même dans des publications sérieuses, et il faut toujours être très méfiant lorsqu'un graphique comprend plusieurs échelles en ordonnées. Cela peut être la source, non seulement d'erreurs, mais éventuellement de trucages.

Remarque.- Il n'est pas aisé de comparer, même sur le graphique correct, les situations relatives entre Nord et Ouest. En effet, il faudrait mettre en évidence le rapport entre valeur et tonnage; il serait souhaitable de trouver une échelle telle qu'un écart de 10 % par exemple, entre les tonnages de deux agences, ait la même valeur qu'un écart de 10 % entre les chiffres d'affaires. Nous verrons plus loin à propos du choix des échelles qu'une telle représentation est possible et qu'il est souhaitable de se familiariser avec elle pour y recourir lorsque c'est nécessaire.

C - Représentation de deux ensembles ordonnés ou mesurables

On est fréquemment amené à décrire la valeur prise par une grandeur lorsqu'une autre atteint une valeur donnée; c'est l'un des cas les plus banaux de la représentation graphique.

REPRÉSENTATION D'UNE FONCTION LIANT DEUX GRANDEURS NUMÉRIQUES

Le coût d'usinage d'une série de pièces comprend une dépense fixe de mise en route (mise en place des outils, réglage, etc..), puis une dépense proportionnelle au nombre de pièces exécutées (matière consommée, main-d'oeuvre directe).

Ainsi, le coût d'une série de x pièces, dont les frais fixes sont de 10 et les coûts proportionnels de 0,5, peut s'écrire:

$$C = 10 + 0,5\ x.$$

La représentation graphique de ce coût est donnée sur la fig. 27.

Si l'on s'attache au coût unitaire des pièces fabriquées en fonction de la série lancée, cette valeur c vaut:

$$c = \frac{10 + 0,5\ x}{x} = \frac{10}{x} + 0,5$$

et l'on obtient une branche d'hyperbole (fig. 28).

Chaque point de la courbe, dans un cas comme dans l'autre, met en correspondance (les flèches pointillées) un point de l'ensemble des abscisses (importance de la série) avec un point de l'ensemble des ordonnées (coût correspondant).

Que pourrait nous apporter la représentation duale? L'exemple précédent sur les ouvriers et les fonctions n'avait guère été encourageant.

Nous obtenons deux échelles parallèles (fig. 29) et chaque point de la droite F_3 de la fig. 27 (mettant en correspondance par exemple le point d'abscisse 10 avec le point d'ordonnée 15) devient une des droites, dont un certain nombre ont été représentées.

L'intérêt semble encore médiocre. Pourtant, une propriété de géométrie élémentaire (le théorème de Thalès) nous permet de constater que toutes ces droites passent par un point fixe (fig. 30).

On pourra donc lire cet "abaque à points alignés" à l'aide d'une règle en joignant ce point fixe A avec le nombre de pièces (échelle C) pour lire sur l'échelle B le coût de la série, ou inversement le nombre de pièces obtenues avec une dépense totale fixée.

Que se passe-t-il si le coût fixe varie?

Sur la première représentation, la droite F_3 se déplace parallèlement à elle-même et l'on est conduit, si l'on veut un abaque à lecture directe, à tracer un faisceau de droites parallèles pour différentes valeurs des frais fixes (fig. 31). Si les frais fixes ont une valeur intermédiaire entre celles qui sont portées sur l'abaque, il faut interpoler au mieux.

Que devient la représentation duale?

Le théorème de Thalès nous apprend que si les frais fixes varient, le point A de la fig. 30 se déplace sur une parallele aux droites B et C (fig. 32). Il suffit d'étalonner l'échelle A avec une graduation double de celle des échelles B et C pour trouver par simple alignement, le coût d'une série quelconque à la seule condition que le coût proportionnel vale 0,5. On peut s'affranchir de ce dernier point, mais nous n'aborderons pas ce problème ici.

Continuons à exploiter la représentation duale. Si nous prenons pour l'échelle C une graduation deux fois plus resserrée que celle de l'échelle B, les droites joignant les points homologues deviennent parallèles (fig. 33). Il n'y a plus alors qu'à fusionner les deux échelles pour obtenir un abaque à lecture directe (fig.34).

Mais une telle représentation est très rigide; elle n'est valable que pour un coût fixe de 10 et un coût proportionnel de 0,5.

On s'affranchit aisément de la première condition en réalisant une règle à calcul (fig. 35). On lit directement le coût d'une série d'un nombre quelconque de pièces par les opérations suivantes:

1. amener le zéro de l'échelle des pièces en face de la graduation de l'échelle des coûts correspondant aux frais fixes;

2. lire en face du nombre de pièces de la série le coût correspondant.

Nous avons donc trois représentations équivalentes: l'abaque cartésien de la fig. 31; l'abaque à points alignés de la fig. 32 et la règle à calcul de la fig. 35.

La facilité avec laquelle une telle règle à calcul peut être réalisée avec un peu de carton et de papier millimétré devrait inciter tous ceux qui ont des calculs répétitifs où la rigueur comptable n'est pas exigée, à rechercher la création d'un tel auxiliaire.

CONNAISSANCE EXPERIMENTALE DE LA CORRESPONDANCE DE DEUX ENSEMBLES ORDONNES OU MESURABLES

Nous venons de décrire la mise en correspondance de deux ensembles à l'aide d'une fonction mathématique.

S'il n'est pas rare de rencontrer de tels problèmes dans une activité professionnelle, il est plus fréquent encore d'avoir à consigner des résultats constatés.

Ainsi, en 3 h.40 de travail, le 17 avril au matin, il a été fabriqué sur telle chaîne 53 postes radio, et, en 4 h.05 l'après-midi du même jour, 67, etc...

Chaque point expérimental met en correspondance l'ensemble "temps passé" avec l'ensemble "quantité fabriquée".

La représentation cartésienne conduit à la fig. 36.

1°- il n'existe pas une fonction au sens mathématique du mot liant temps et quantité produite; on ne peut définir une quantité en ne connaissant que le temps passé, et réciproquement;

2°- les points ne sont cependant pas disposés au hasard et, connaissant le temps ou la quantité, il est possible d'avoir une idée approchée de la valeur de la grandeur inconnue;

3°- lorsque, dans un nuage établi sur une période passée, les trente derniers jours par exemple, on place le point représentatif de la dernière demi-journée de production, il est possible de porter un jugement de valeur sur le rendement de cette demi-journée selon la position de ce point dans le nuage.

La Statistique mathématique permet de préciser le sens de ces remarques.

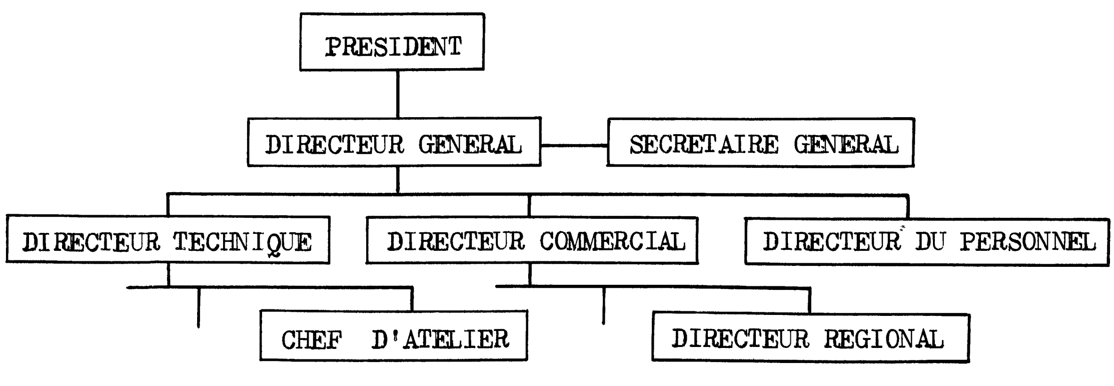


FIG. 1 - ORGANIGRAMME

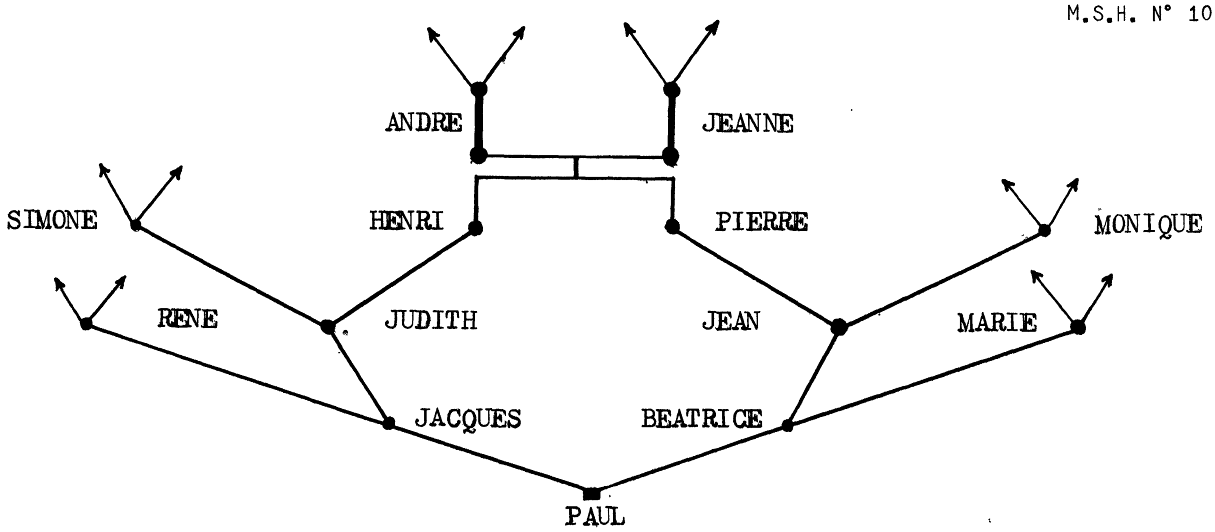


FIG. 2 - ARBRE GENEALOGIQUE RENVERSE

A chaque génération, le nombre des ascendants est multiplié par deux, sauf lorsqu'interviennent des mariages consanguins.

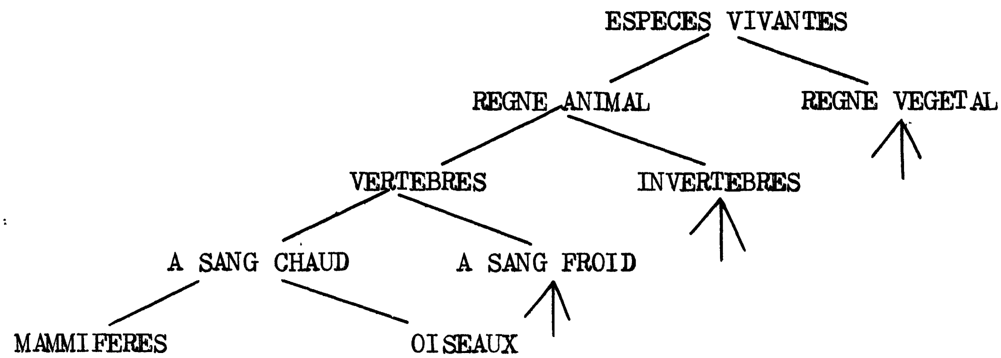


FIG. 3 - CLASSIFICATION DES ESPECES VIVANTES

	DE REVOLUTION		NON DE REVOLUTION	
	PERCEES	NON PERCEES	NON PERCEES	PERCEES
FERREUSES				
CUIVREUSES				
AUTRES				

FIG. 4

Classement de pièces d'après trois critères de classement prenant l'un, trois valeurs (ferreuses, cuivreuses, autres), les deux autres, deux valeurs (de révolution, non de révolution; perçées, non percées).

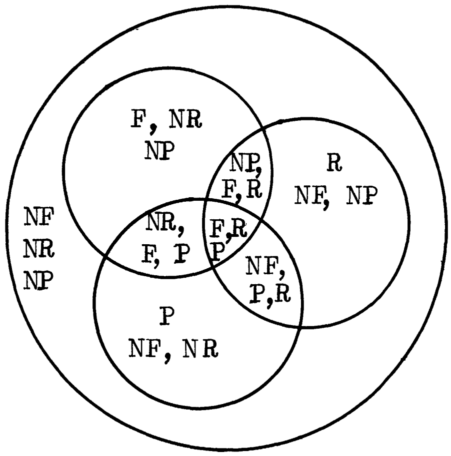


FIG. 5

Limites de la représentation d'Euler, trois critères prenant deux valeurs:
matière: ferreuse (F); non ferreuse (NF)
forme : de révolution (R); non de révolution (NR)
perçage: perçées (P); non percées (NP).

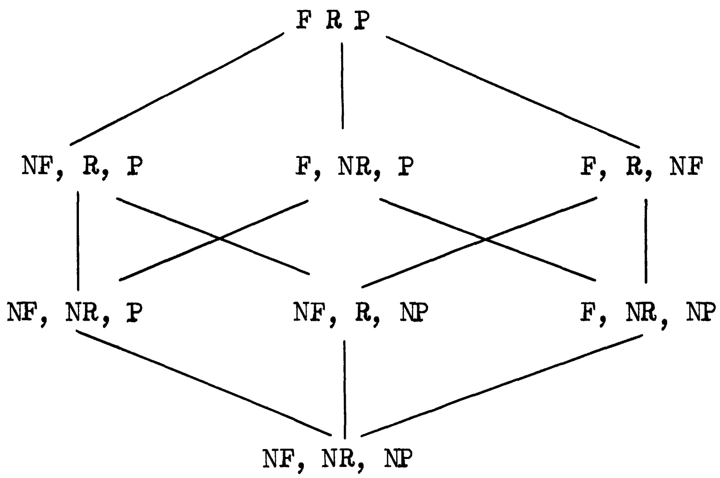


FIG. 6

Représentation du classement de la figure 11 en mettant en évidence la structure de simplexe d'ordre 3.

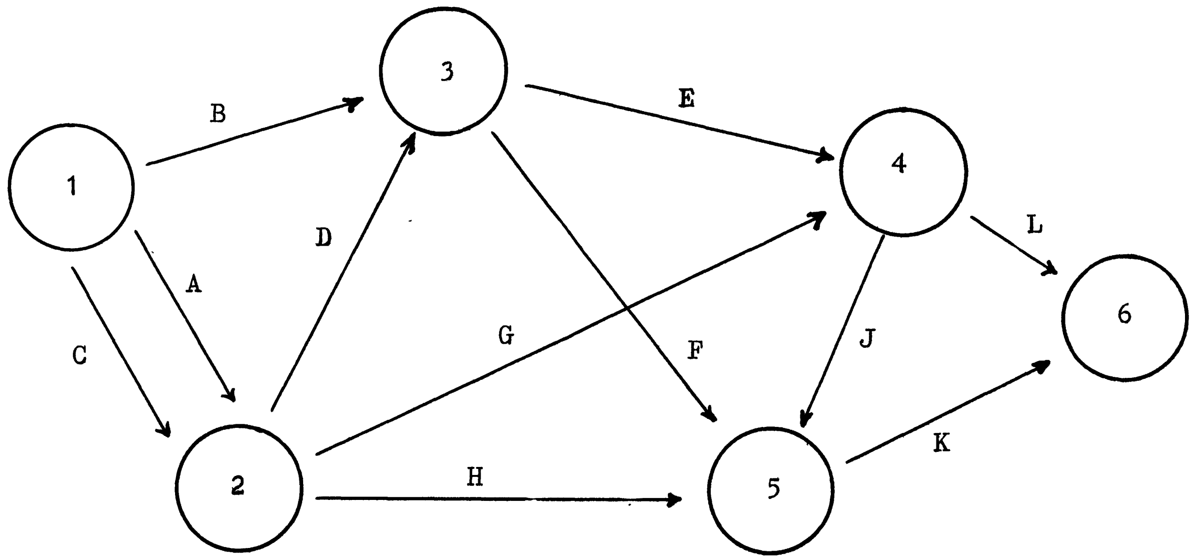


FIG. 7

Réseau PERT indiquant les successions entre chaque opération. Chaque cercle numéroté représente une étape (époque suivant certaines opérations et en précédant d'autres) et chaque flèche représente une opération.

Il s'agit d'un schéma très simplifié de la construction d'une maison.

A : fondation, gros oeuvre
B : préparationdes huisseries en atelier
C : préparation de la charpente
D : cloisons
E : pose des huisseries
F : pose des-canalisations
G : branchements
H : couverture
J : sanitaires
K : peintures
L : mise en état des abords.

Le réseau met en évidence la succession des opérations.

Fonction / Nom	Cisaille	Rabot	Perceuse	Tour	Fraiseuse		Total
Bertrand	×		×				3
Gérard		×		×	×		7
Mallet				×			2
Bertin	×	×	×				3
Joulier				×	×		4
Firmat	×		×				3
Ruban		×		×			5
Total	7	6	8	5	5		

FIG. 8 - TABLEAU DES QUALIFICATIONS DU PERSONNEL.

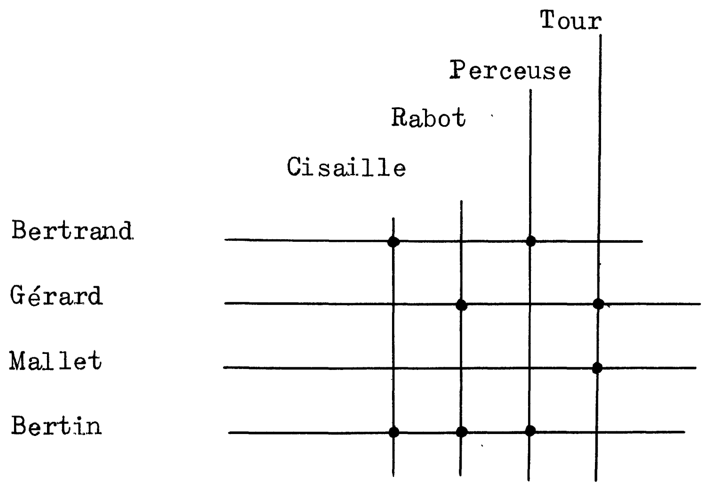


FIG. 9

Qualification du personnel: représentation de la qualification par un point à l'intersection de deux droites.

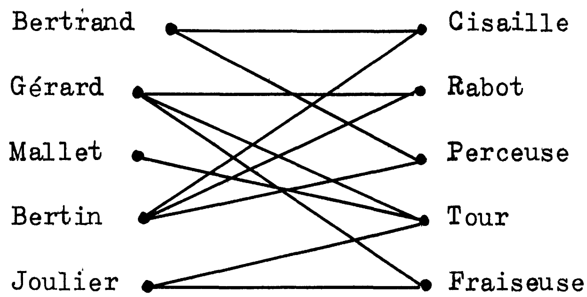


FIG. 10

Qualification du personnel. Représentation duale: la qualification est représentée par une droite joignant deux points.

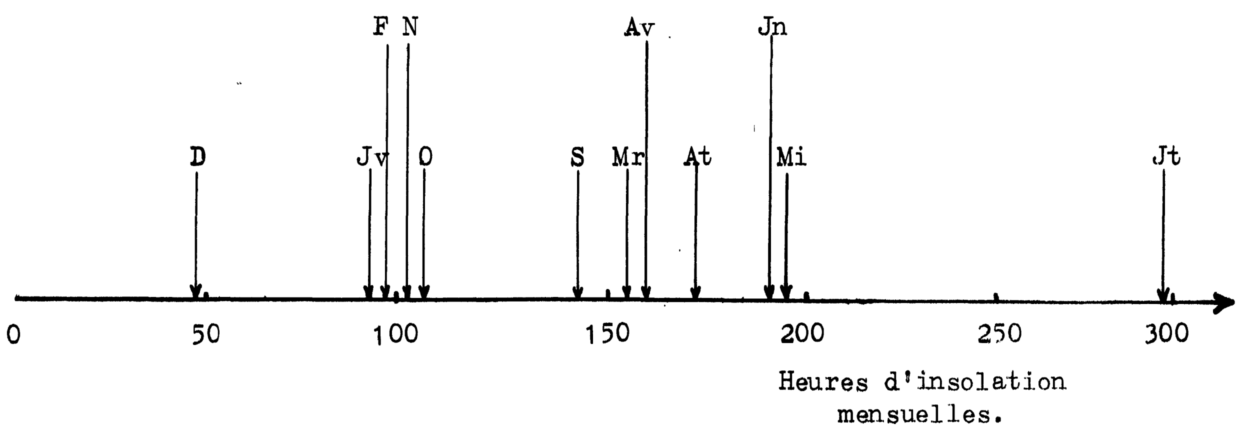


FIG. 11

Durée totale d'insolation mensuelle - Observatoire de Paris - Montsouris - 1963.

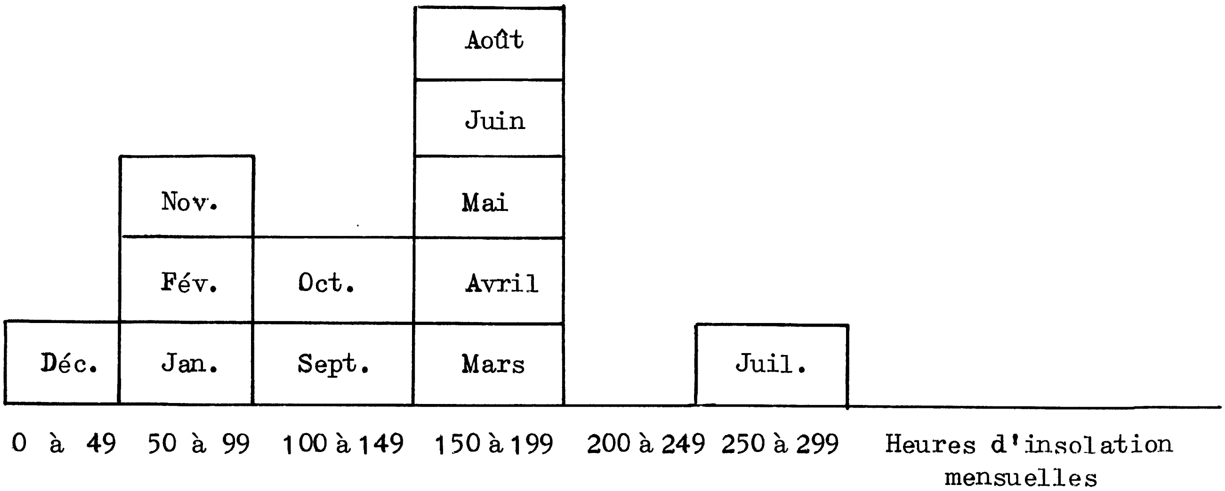


FIG. 12

Histogramme des durées d'insolation mensuelle - Observatoire de Paris - Montsouris - 1963.

	Temps sec et chaud	Temps chaud avec averses	Temps moyens	Temps froid
Tricot à grosses côtes	20	25	150	300
Ras du cou sans manche	450	200	100	0
Pull manches longues	10	50	250	200

FIG. 13

L'analyse de la collection d'été de tricots Savoisiens: Dans chaque case est porté le nombre estimé de tricots vendus, pour chaque hypothèse de température. Lorsque cela est possible, on porte dans ces cases une estimation de l'objectif poursuivi (chiffre d'affaires, marge brute, etc..).

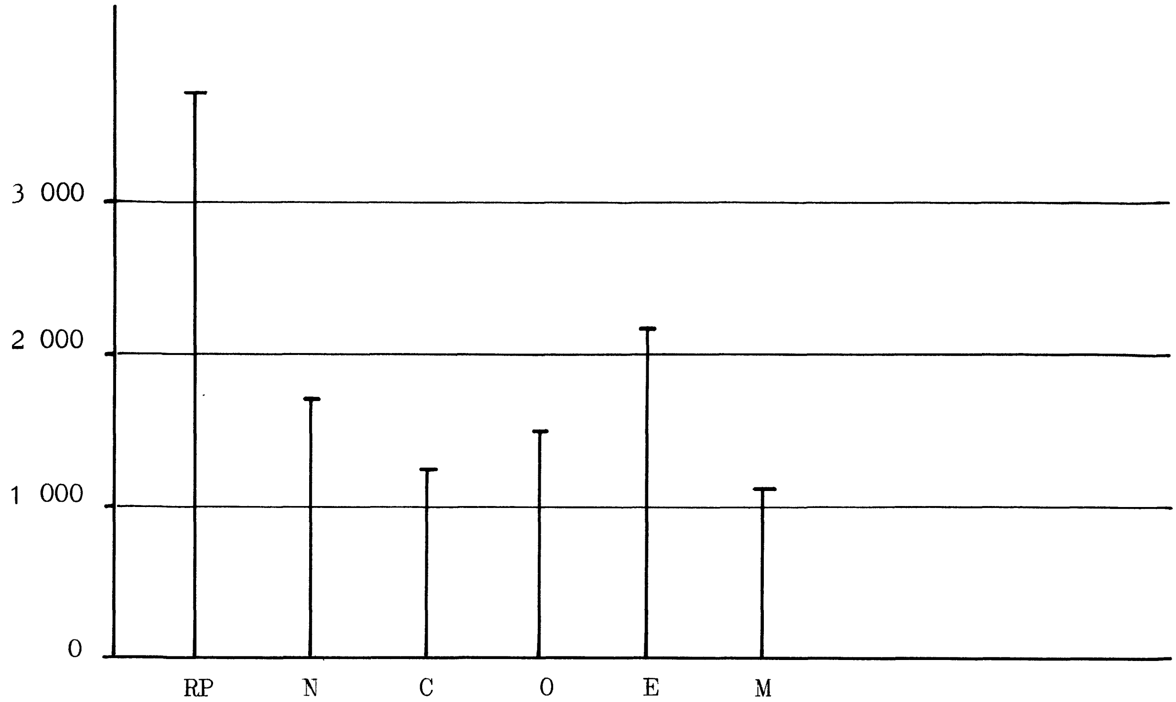


FIG. 14 - Chiffre d'affaires des agences: représentation en bâtons.

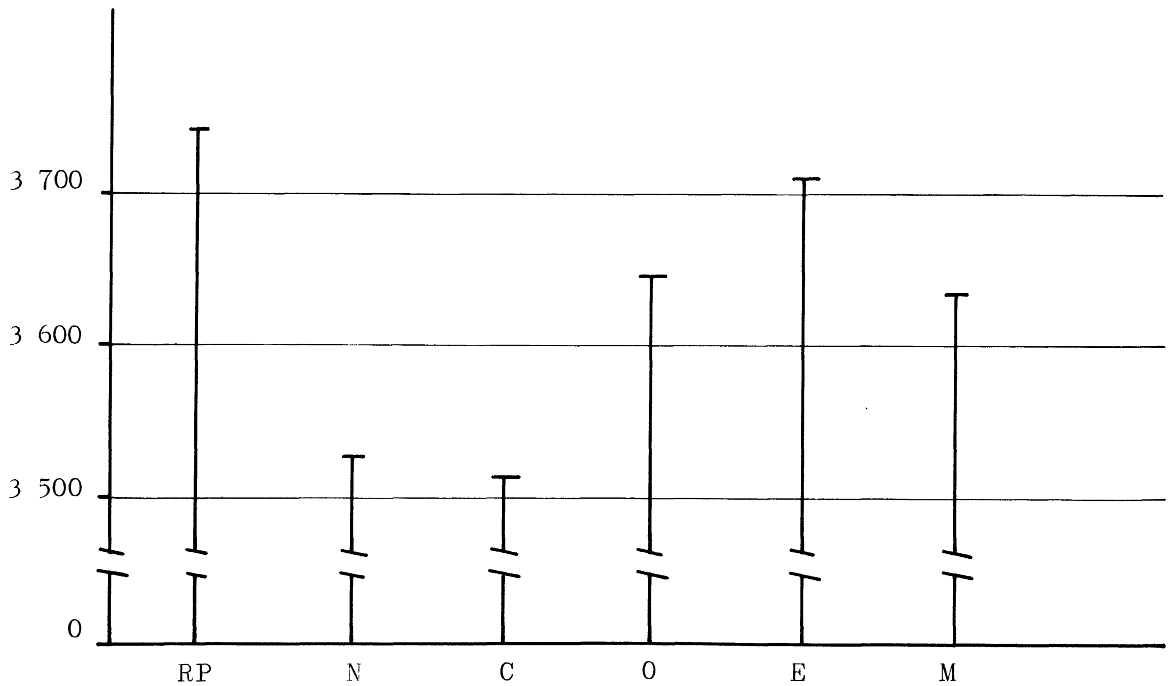


FIG. 15 - Chiffre d'affaires très voisins - il est nécessaire de faire une coupure dans l'échelle des valeurs. Pour éviter des erreurs d'interprétation, cette coupure doit être très visible.

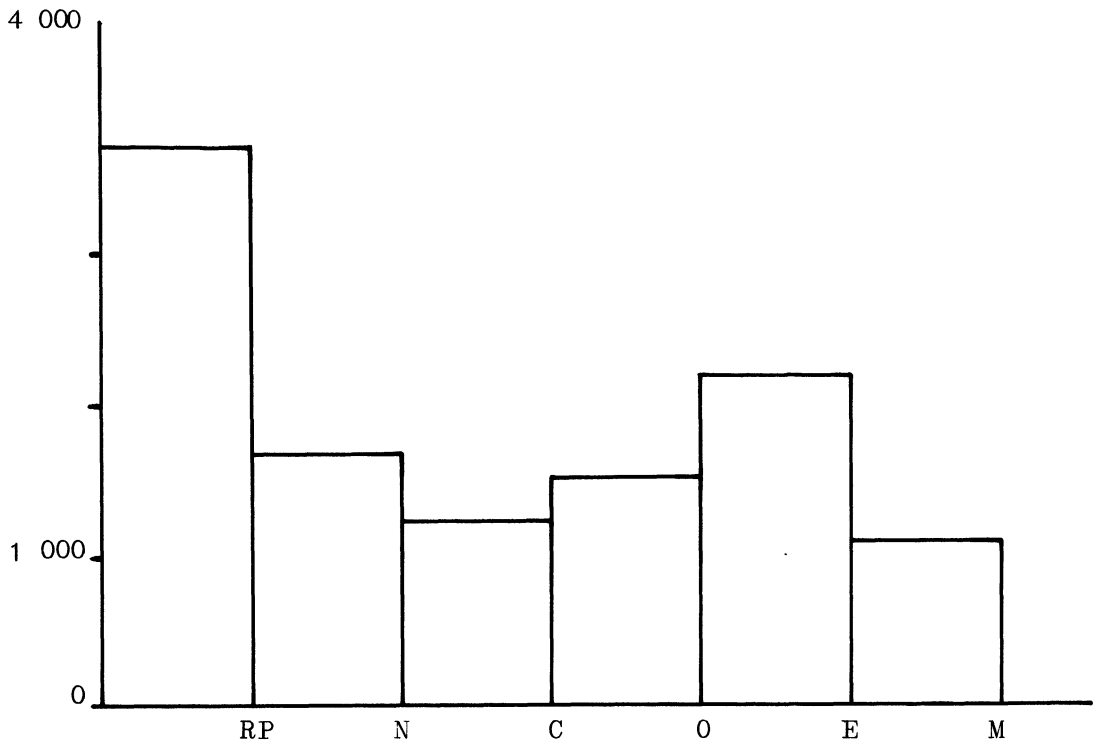


FIG. 16 - Mêmes données que celles de la figure 20: représentation en tuyaux d'orgues jointifs.

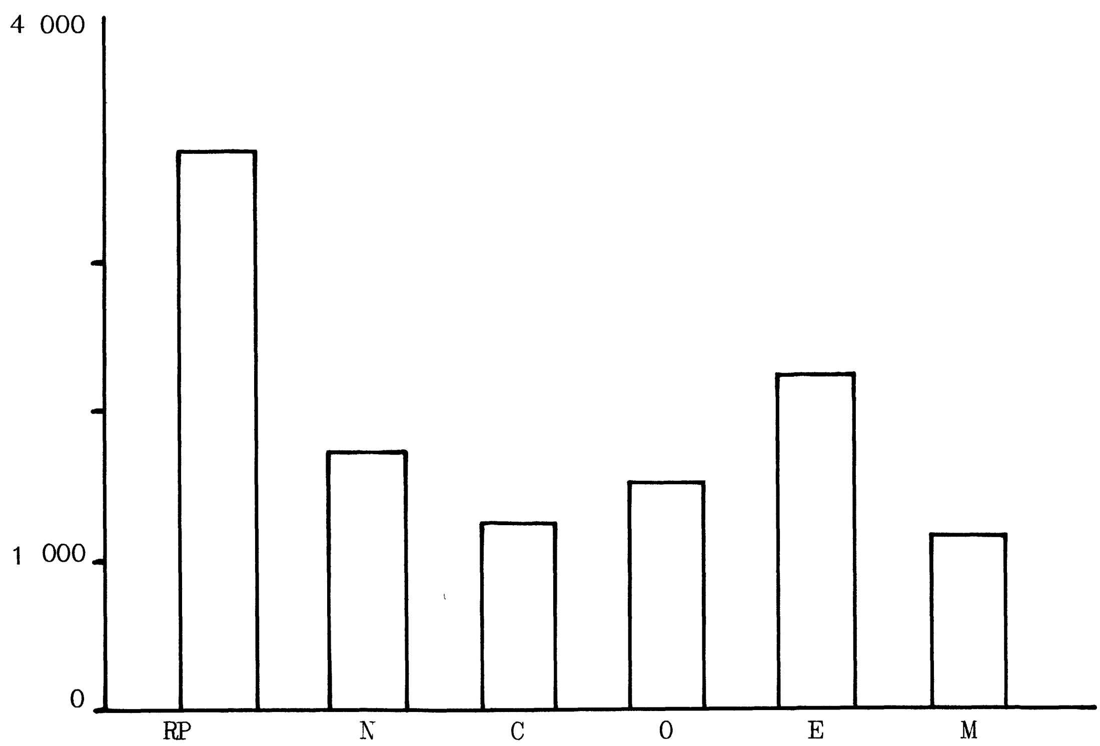


FIG. 17 - Mêmes données que celles de la figure 20: représentation en tuyaux d'orgues séparés.

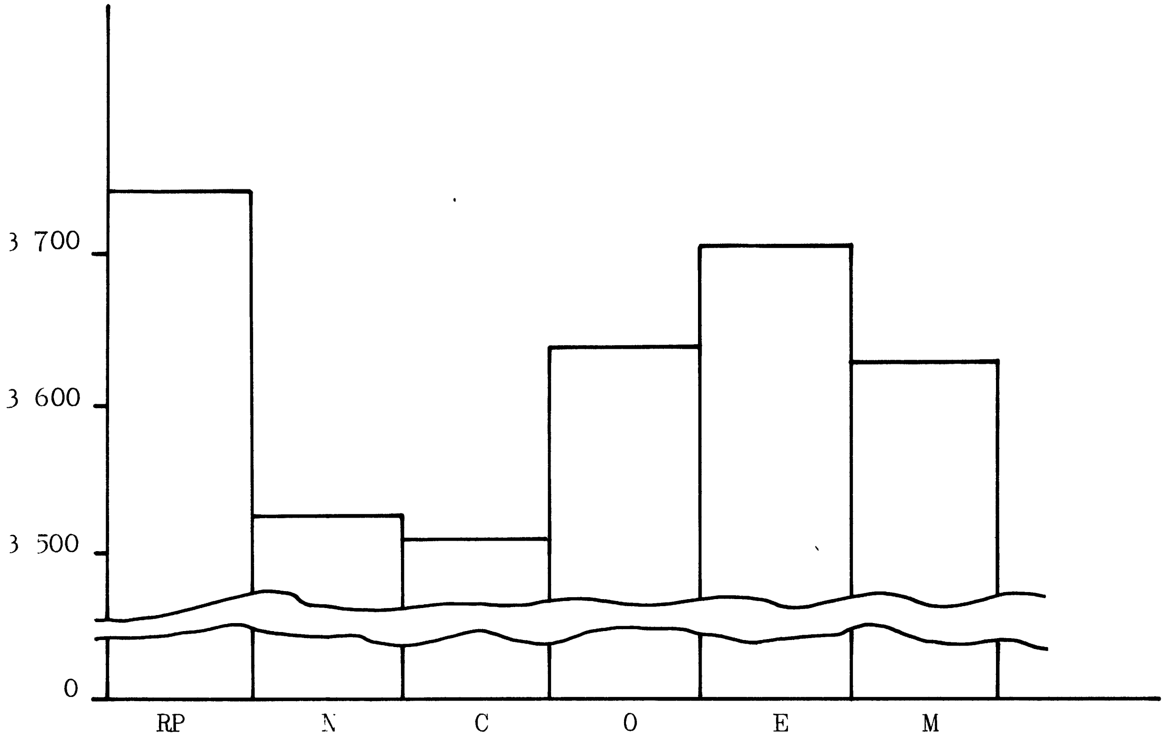


FIG. 18 - Représentation des données de la figure 21: en tuyaux d'orgues jointifs.

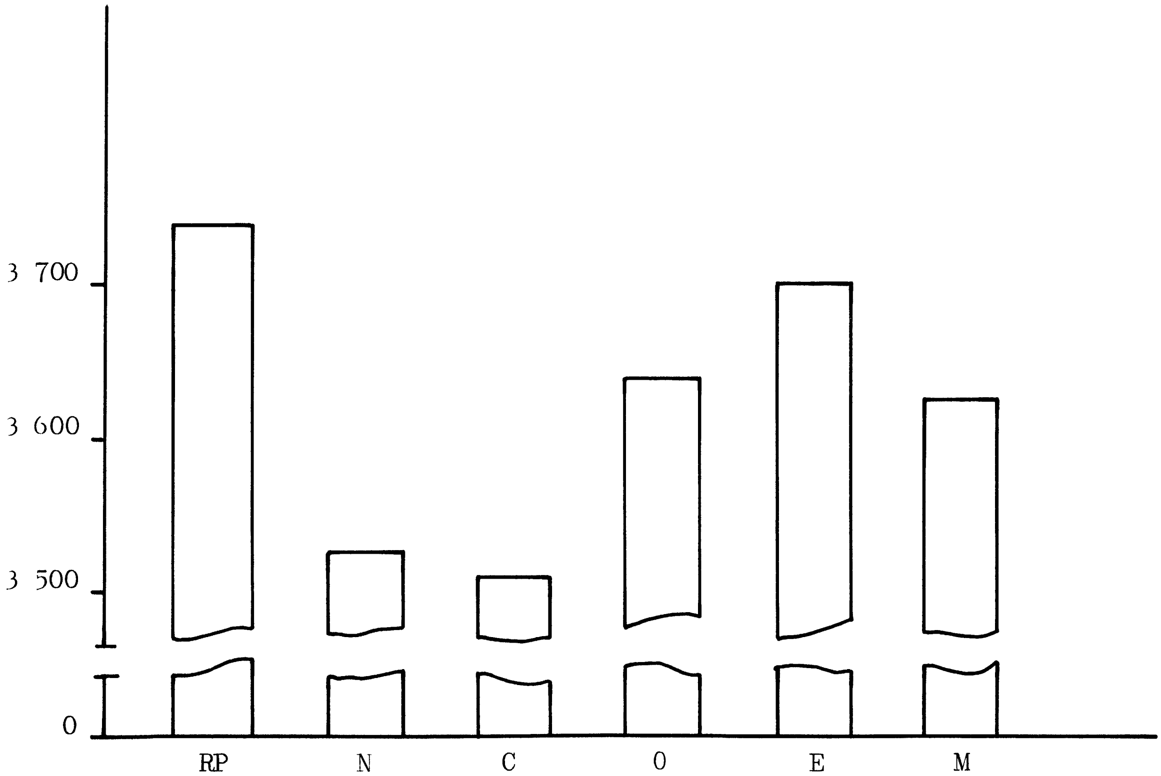


FIG. 19 - Représentation des données de la figure 21: en tuyaux d'orgues séparés.

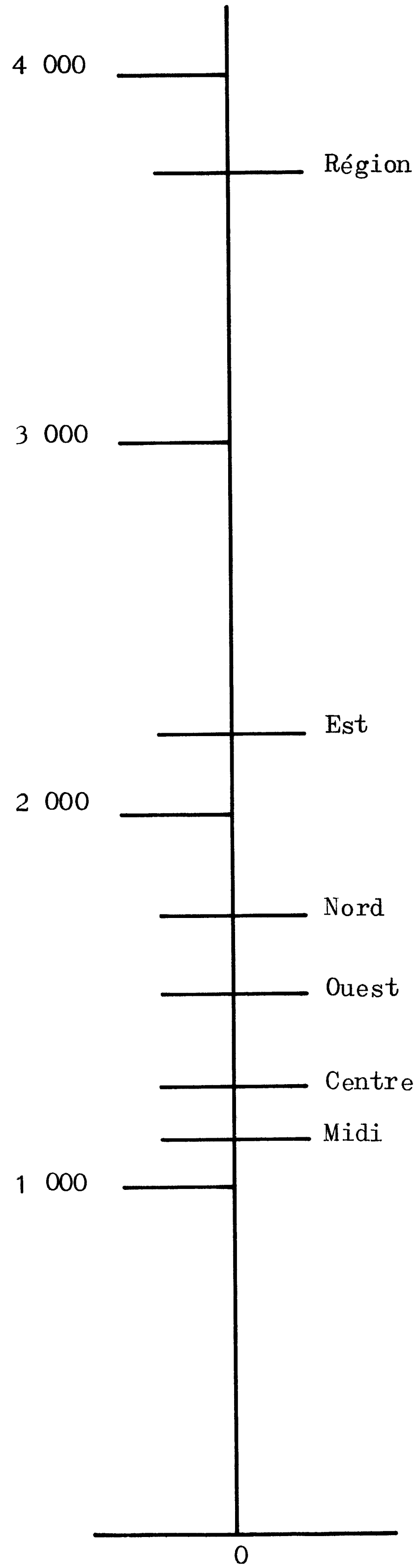
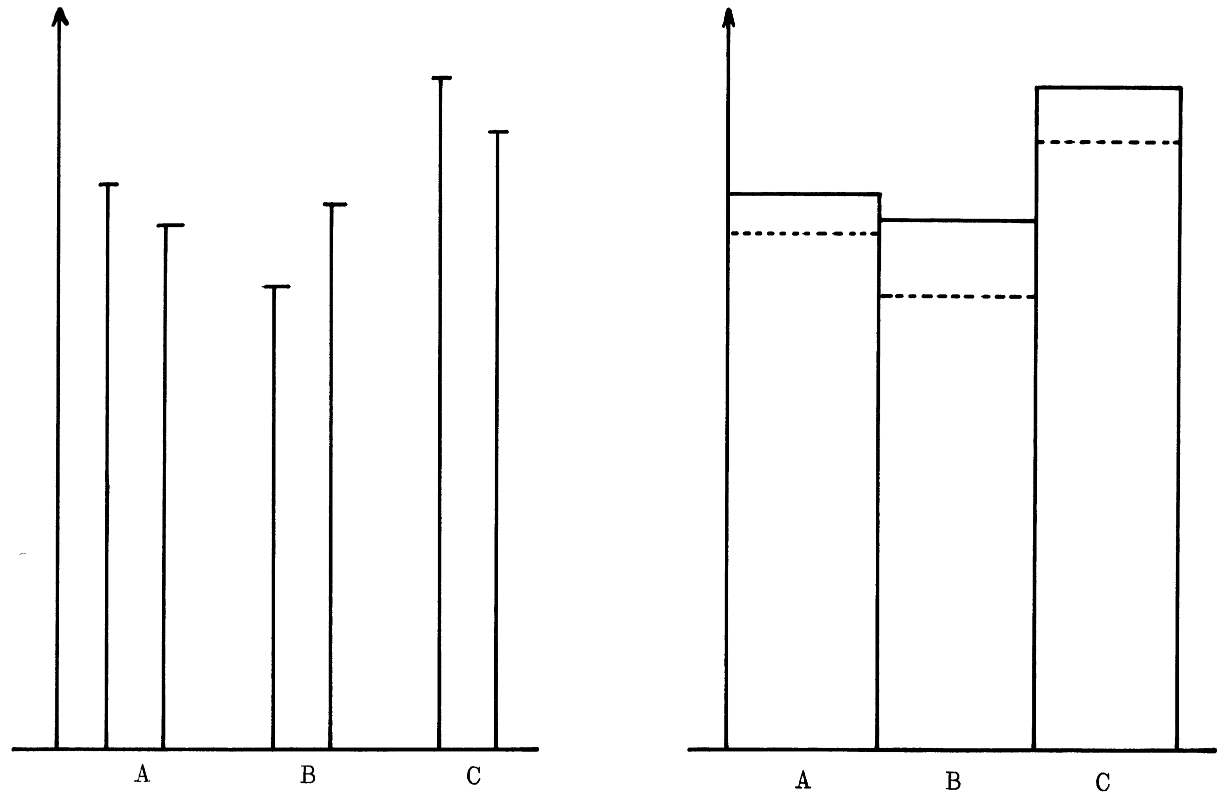


FIG. 20 - Données de la figure 20 cendensées
sur une simple échelle.



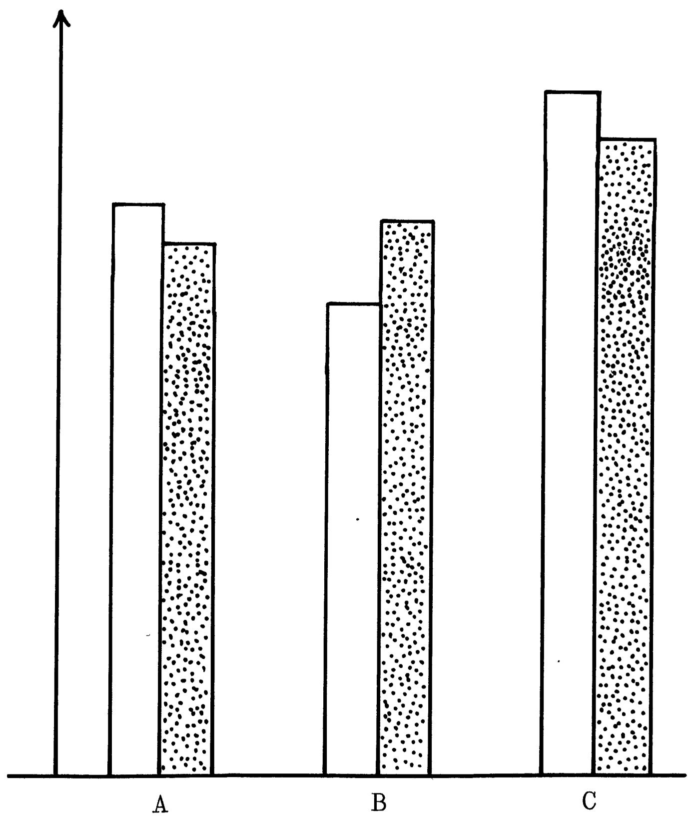


FIG. 21 - Trois représentations équivalentes d'un ensemble ordonné auquel sont liés deux ensembles mesurables

Ce qu'il ne faut pas faire

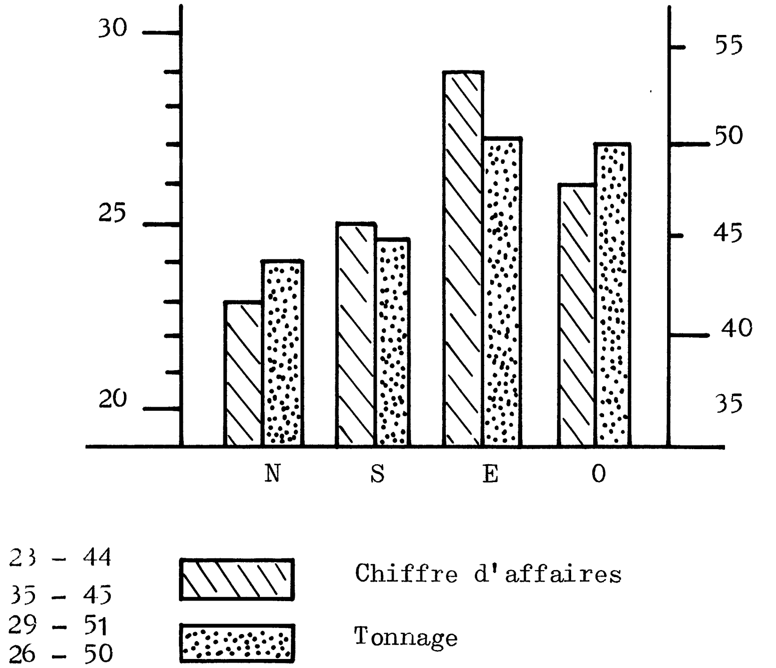


FIG. 22

(Légende commune aux deux figures)

Il est fréquent de présenter des graphiques groupés où sont représentés, simultanément, plusieurs éléments mesurables affectés à certaines classes. Cette représentation, qui incite à faire des comparaisons, est particulièrement trompeuse: les prix à la tonne apparents sont différents sur les deux figures, dont les données numériques sont les mêmes.

Ce qu'il ne faut pas faire

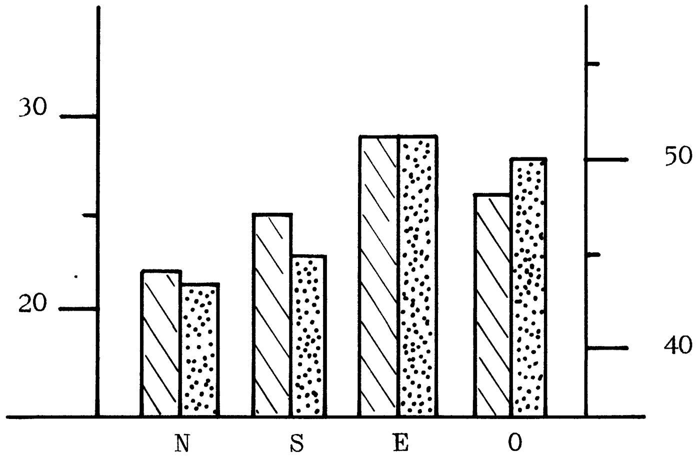


FIG. 23

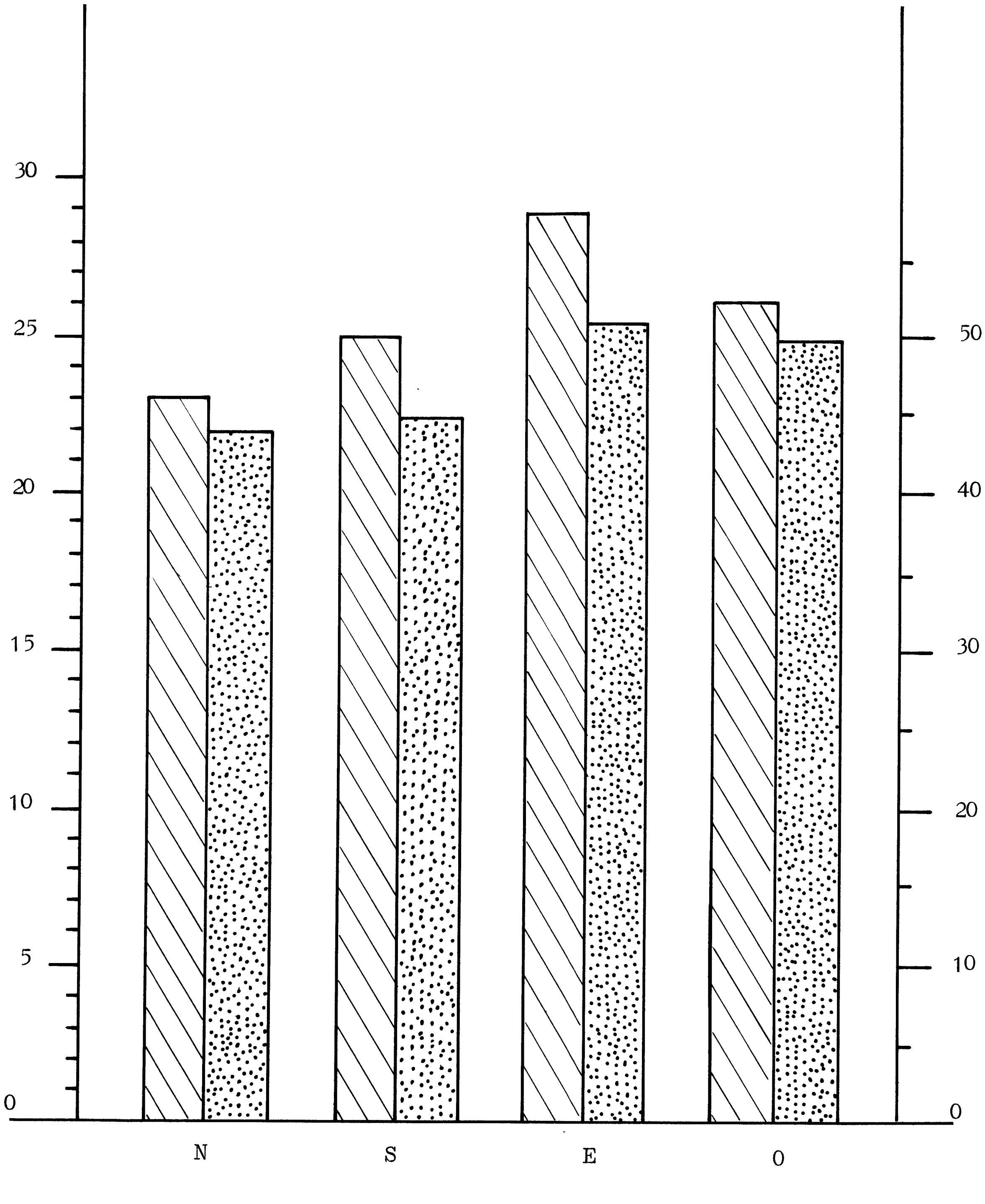


FIG. 24 - Représentation correcte : on a dessiné les échelles en entier, ainsi qu'il doit être de règle pour des grandeurs mesurables. Ce n'est qu'après la réalisation du graphique complet qu'on peut faire une coupure de l'échelle si la présentation l'exige.

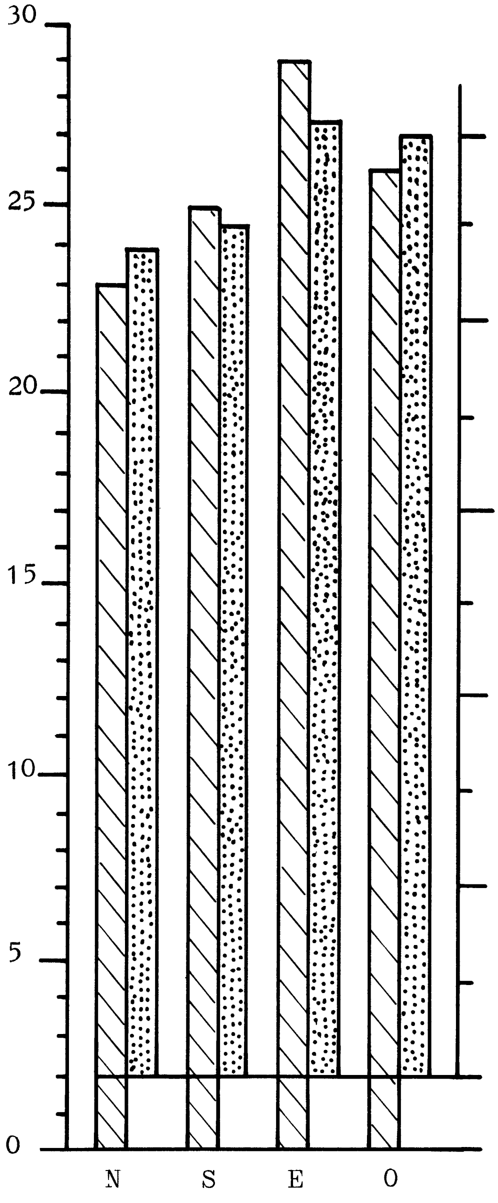


FIG. 25

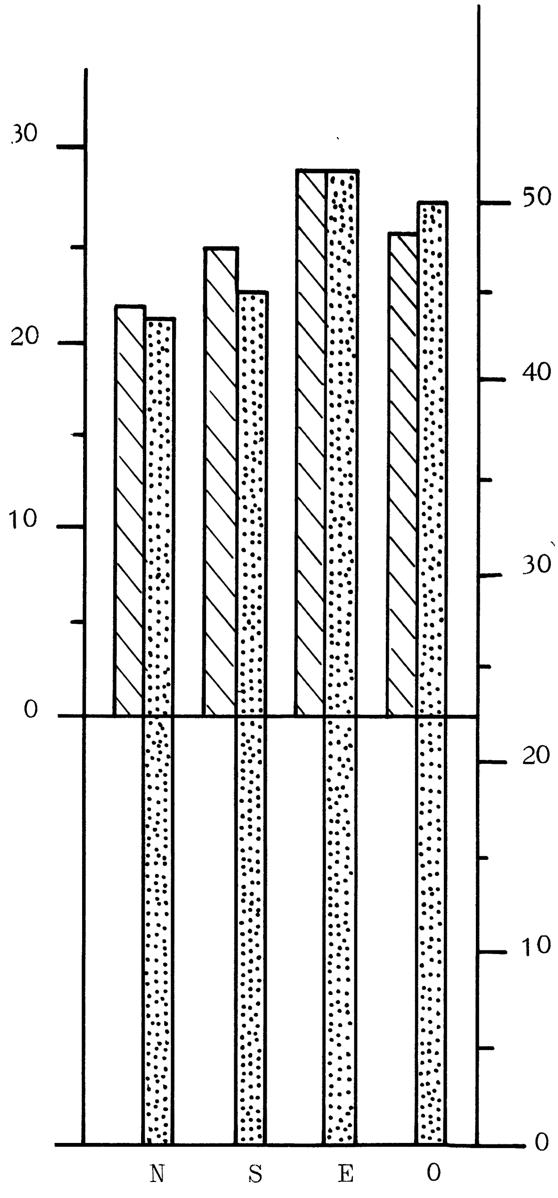


FIG. 26

(Légende commune aux deux figures)

Ces deux figures sont les figures 26 et 27 complétées jusqu'au zéro de leur échelle. Cette précaution indispensable n'étant pas toujours prise par les auteurs de graphiques, il est nécessaire, lorsqu'on examine un graphique tronqué comportant deux échelles, d'assurer que les valeurs situées sur une même horizontale sont proportionnelles dans un rapport constant (dans ce cas, les zéros des deux échelles coïncident).

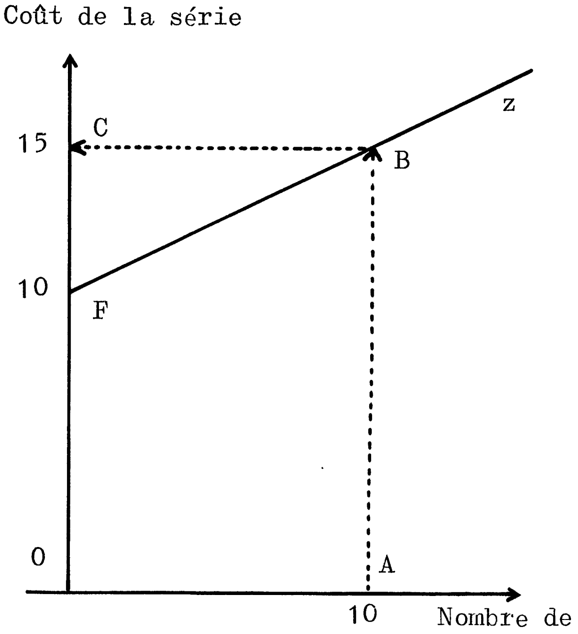


FIG. 27

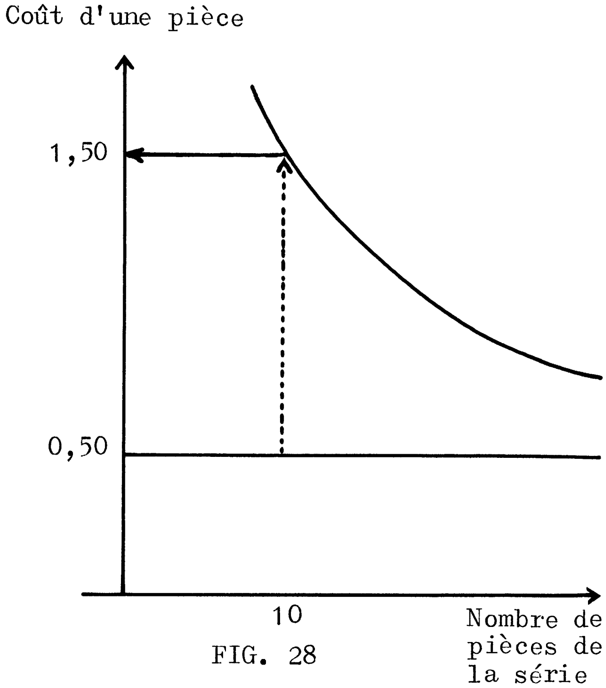


FIG. 28

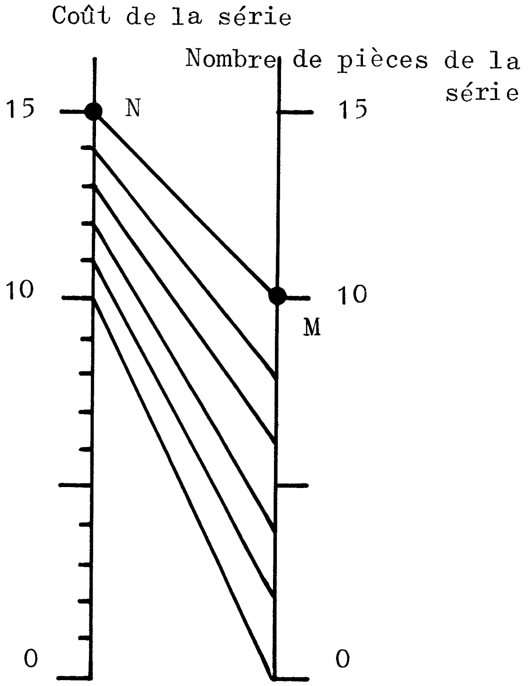


FIG. 29

Représentation duale de la figure 31. La droite AB devient le point M, la droite BC, le point N, et le point B, intersection des deux droites de la fig. 31,, devient le segment MN, joignant les deux points de la fig. 33.

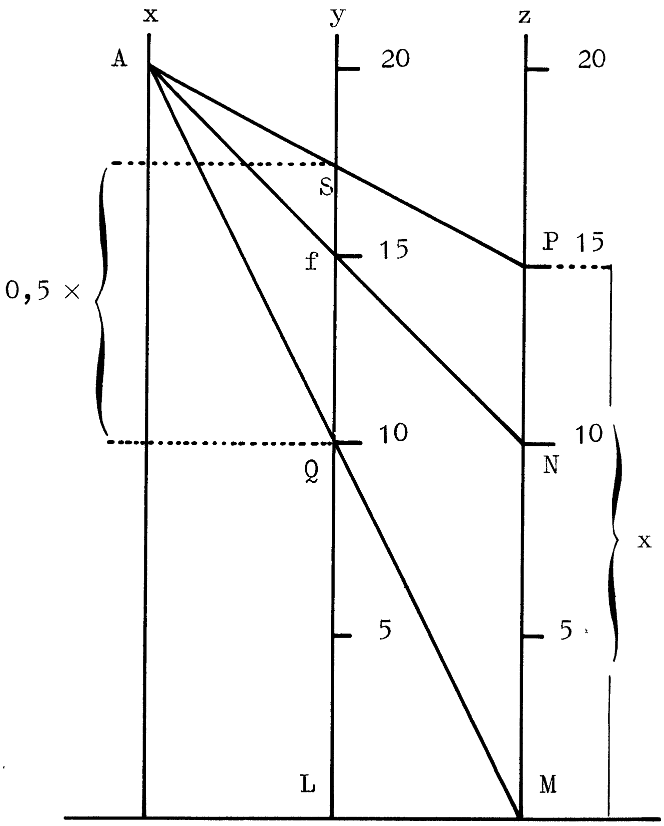


FIG. 30

Application du théorème de Thalès: les segments déterminés sur les droites Ly et Mz pour deux droites passant par A sont proportionnels, dans le rapport 1 à 2

Ainsi: $QR = \frac{1}{2}\ MN$

et: $LR = 10 + \frac{1}{2}\ MN$

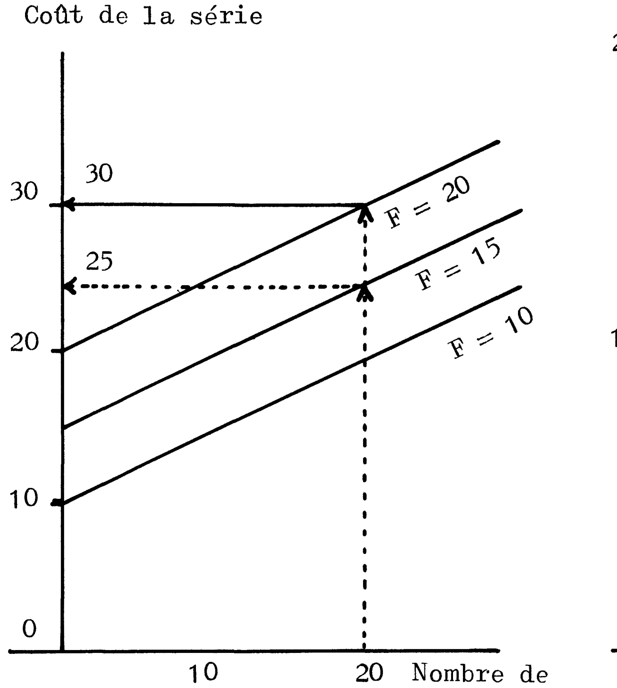


FIG. 31

Le coût d'une série de 20 pièces, si les frais fixes s'élèvent à 15, et le coût marginal à 0,5, est de 25. Ce coût atteint 30 si les frais fixes s'élèvent à 20.

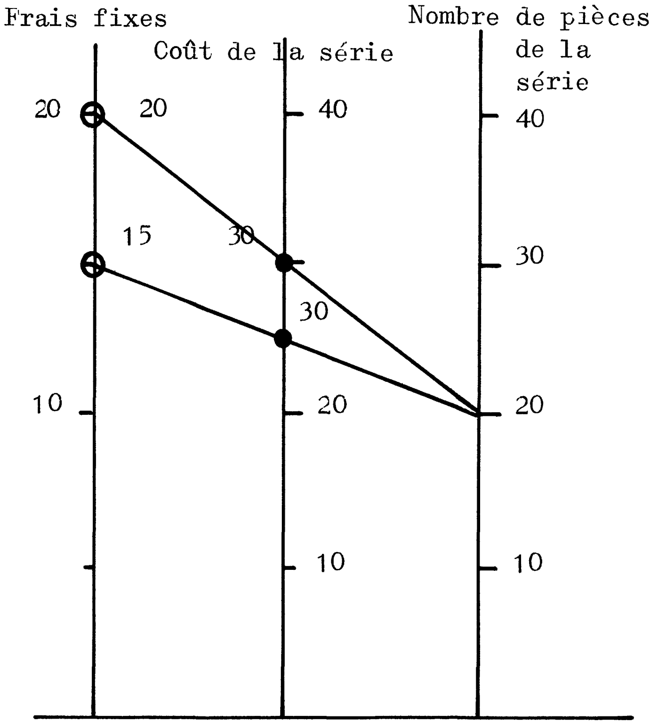


FIG. 32

Attaque à points alignés; le coût de la série se lit à l'intersection de l'échelle du milieu avec la droite joignant le nombre de pièces au montant des frais fixes

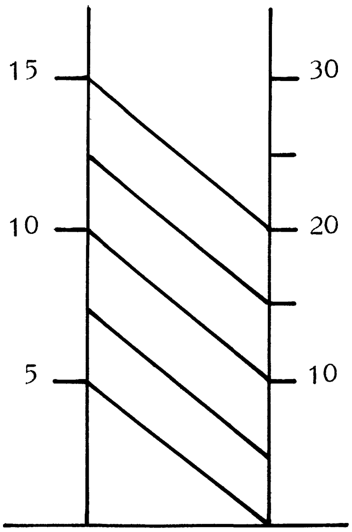


FIG. 33

En choisissant correctement les échelles du nombre de pièces et des coûts, on peut rendre parallèles les droites joignant l'échelle des pièces à l'échelle des coûts.

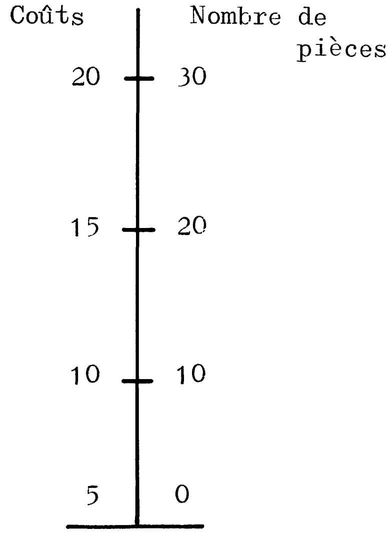


FIG. 34

La superposition des deux échelles devient possible, et l'on obtient un graphique à lecture directe.

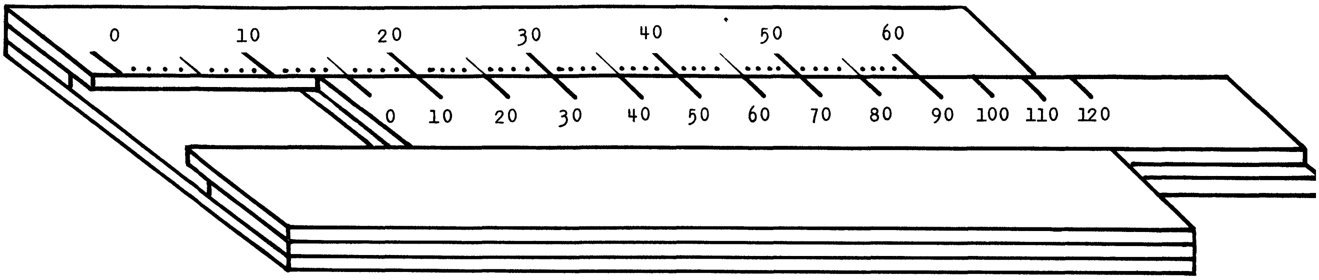


FIG. 35

Règle à calcul donnant le coût d'une série en fonction des frais fixes et du nombre de pièces, pour un coût marginal de 0,5 F.
Sur la figure, on peut voir que; une série de 50 pièces coûte 40 F, si les frais fixes s'élèvent à 15 F. Dans les mêmes conditions, une série de 80 pièces coûte 55 F.

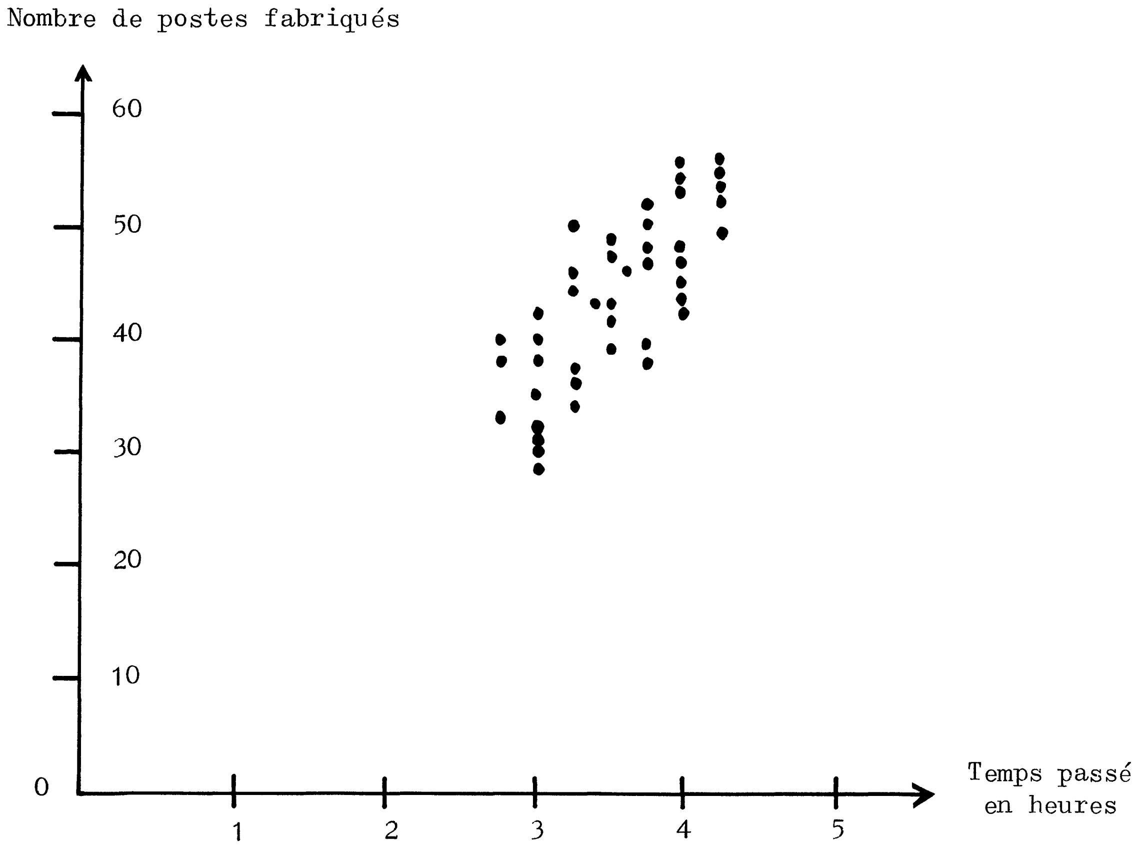


FIG. 36 - Enregistrement des quantités fabriquées au cours de 46 demi-journées d'un mois en fonction du temps passé.