MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

ERNEST COUMET

Les diagrammes de Venn

Mathématiques et sciences humaines, tome 10 (1965), p. 31-46
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1965__10__31_0>

Ernest COUMET

LES DIAGRAMMES DE VENN

Il est devenu d'usage courant, de faire appel, dans l'enseignement élémentaire de la théorie des ensembles, aux diagrammes dits d'Euler. Ceux qui trouvent que le nom de ce grand homme survit déjà à bien d'autres titres - et plus honorables - dans la toponymie mathématique, parlent de "diagrammes de Venn"; enfin, les timides qui ne veulent pas faire de jaloux compliquent l'expression en "diagrammes d'Euler-Venn". Comme il se targuait d'avoir découvert une procédure dépassant de loin en généralité celle de son prédécesseur, Venn n'aurait peut-être pas été très satisfait par ce double parrainage. Son invention n'ayant rien cependant d'extraordinaire, il s'agira moins pour nous de lui assurer son vrai nom de baptême que d'écouter la leçon - encore utile aujourd'hui - qui nous est donnée à ce propos: qui se met à illustrer une théorie par des diagrammes n'a pas tous les droits; les petits dessins n'ont pas toujours l'innocence qu'on leur prête, il leur arrive de mentir, ou, piège plus dangereux si on ne l'aperçoit pas, d'en dire plus qu'on ne voudrait leur faire dire .

La note qui suit est de nature strictement historique. Après avoir rappelé comment Euler avait trouvé dans certaines figures un "secours merveilleux", nous avons essayé de rapporter aussi fidèlement que possible, et <u>en conservant son propre langage,</u> la manière dont Venn expose sa découverte dans des textes dispersés et souvent prolixes (1).

LES EMBLEMES D'EULER

Les "<u>Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie</u>" (2) eurent un vif succès. "Le nom d'Euler, si grand dans les sciences, l'idée imposante que l'on se forme de ses ouvrages... donnent à ces lettres si simples, si faciles, un charme singulier: ceux qui n'ont pas étudié les mathématiques, étonnés, flattés peut-être de pouvoir entendre un ouvrage d'Euler, lui savent gré de s'être mis à leur portée". (3) Chaque lettre est assez brève, mais il y en a plus de deux cents, sur les sujets les plus divers,

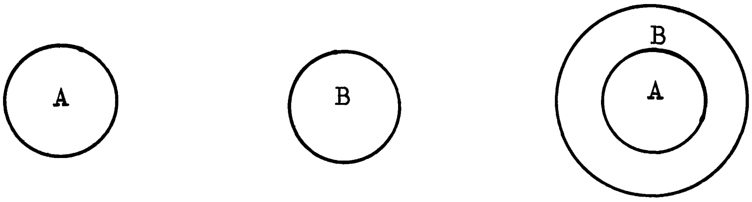
---

(1) John VENN (1834 - 1923), professeur à Cambridge, s'est surtout intéressé au cours de sa longue carrière à la Logique et à la Théorie des probabilités. Principaux ouvrages: <u>Logic of Chance</u> (1866); <u>Symbolic Logic</u> (1881); <u>The Principles of Empirical or Inductive Logic</u> (1889). En 1894, il donna une réédition revue et augmentée de <u>Symbolic Logic</u> (London, Macmillan and Co, VIII-XXXVIII-540 p.): c'est elle que nous citons plus bas.

(2) Publiées pour la première fois à St. Pétersbourg, de 1768 à 1772, en 3 volumes in-8°. Nous citons ici d'après l'édition d'Emile Saisset, Paris, Charpentier, 1843.

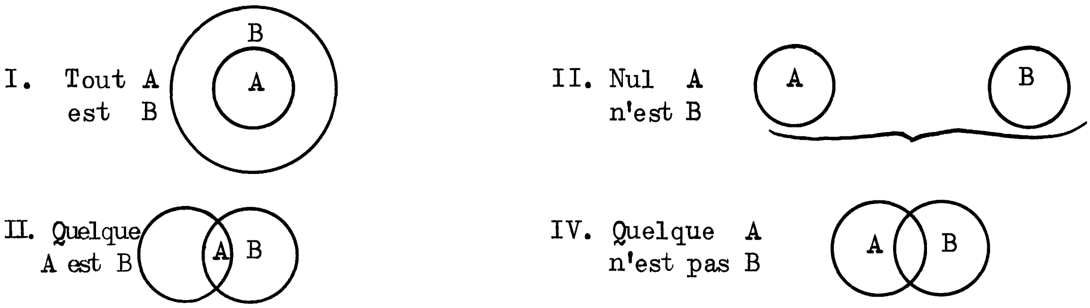
(3) Condorcet, "Eloge d'Euler", op. cit. p. 17.

des couleurs à l'aimantation, en passant par la lanterne magique et le système de l'harmonie préétablie. Après avoir parlé de l'abstraction et du langage, Euler rencontre naturellement la discipline qui tenait une si grande place dans l'enseignement traditionnel: la logique. Or, loin de tomber dans le défaut fréquent des vulgarisateurs qui est de dénaturer en simplifiant, il révèle au contraire, en l'exposant au regard le moins savant, la simplicité cachée des redoutables syllogismes. D'autres avant lui avaient utilisé des figures pour mieux faire comprendre des points particuliers; alors que dans les 7 lettres XXXIV à XL de la seconde partie, (qui s'échelonnent du 14 février 1761 au 7 mars 1761), c'est à une reconstruction complète de la théorie du syllogisme que se livre Euler, grâce à une représentation intuitive qui en conserve fidèlement la structure, et rend vaines et ridicules les appellations et les distinctions scolastiques. Quelques figures nous découvrent "tous les mystères dont on se vante dans la logique, et qu'on y démontre avec bien de la peine, pendant que, par le moyen de des figures, tout saute d'abord aux yeux". (1) Commençons par représenter chaque notion par un "espace": "Comme une notion générale renferme une infinité d'objets individus, on la regarde comme un espace dans lequel tous ces individus sont renfermés; ainsi, pour la notion d'homme, on fait un espace (A) dans lequel on conçoit que tous les hommes sont compris. Pour la notion de mortel, on fait aussi un espace (B), où l'on conçoit que tout ce qui est mortel est compris". (2) Or si l'on considère la proposition: "Tous les hommes sont mortels", cela revient à ce que la première figure est contenue dans la seconde".



Ainsi sera donc représentée une proposition affirmative universelle, "où l'espace A, qui représente le sujet de la proposition, est tout à fait renfermé dans l'espace B, qui représente le prédicat". (3)

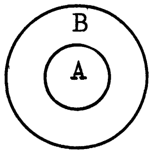
On pourra représenter de la même manière les autres espèces de propositions, car "un jugement n'est autre chose qu'une affirmation ou négation qu'une notion convient ou ne convient pas; et un jugement énoncé par des mots est ce qu'on nomme une proposition" (4). La "convenance ou la disconvenance des notions pourra toujours être représentée à l'aide des "espaces" correspondant à ces notions. Les quatre espèces de propositions reconnues par tous les logiciens auront chacune leur "emblème":



(1) Euler, op. cit., p. 261.
(2) Id. p. 260.
(3) PP. 260-261.
(4) P. 259.

Cependant, ces emblèmes ne sont pas aussi caractéristiques qu'il semblerait, et Euler le note aussitôt, anticipant ainsi des critiques auxquelles Venn les soumettra:

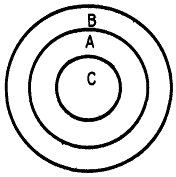
"Pour les deux derniers cas, qui représentent des propositions particulières, je remarque qu'ils renferment quelque doute, puisqu'il n'est pas décidé si c'est une grande partie de A qui est contenue ou qui n'est pas contenue en B. Il se pourrait même que la notion A renfermât la notion B tout entière..."



car ici il est aussi clair qu'une partie de l'espace A est dans l'espace B, et qu'une partie de A n'est pas en B". Dans le deuxième cas, "je puis aussi bien dire "Nul A n'est B" que "Nul B n'est A", et dans le troisième cas: "Quelque A est B", "Quelque B est A", "Quelque A n'est pas B", "Quelque B n'est pas A". (1)

"Cela peut suffire pour faire voir à votre Altesse comment toutes les propositions peuvent être représentées par des figures; mais le plus grand avantage se manifeste dans les raisonnements qui, étant énoncés par des mots, sont nommés syllogismes, où il s'agit de tirer une juste conclusion de quelques propositions données. Cette manière nous découvrira d'abord les justes formes de tous les syllogismes" (2). Voici, pour prendre l'exemple le plus simple comment se figure le syllogisme:

Tout A est B
Or, tout C est A
Donc tout C est B



Euler énumère les 19 formes différentes de syllogisme "qui conduisent à une conclusion sûre", et énonce avec une concision et une lucidité, que ses épigones oublieront bien pour la plupart, la raison pour laquelle il a "<u>démontré</u> par le moyen des espaces... la justesse de chacun de ces modes": (3)

"Le fondement de toutes ces formes se réduit à ces deux principes sur la nature du contenant et du contenu:

I. Tout ce qui est dans le contenu se trouve aussi dans le contenant.

II. Tout ce qui est hors du contenant est aussi hors du contenu". (4)

Comme certains logiciens ont semblé attacher une vertu particulière à la nature circulaire de leurs figures, il n'est pas inutile de relever sous la plume d'Euler la précision suivante: "les figures rondes, on plutôt ces espaces (car il n'importe quelle figure nous leur donnons)..."

---

(1) P. 262.

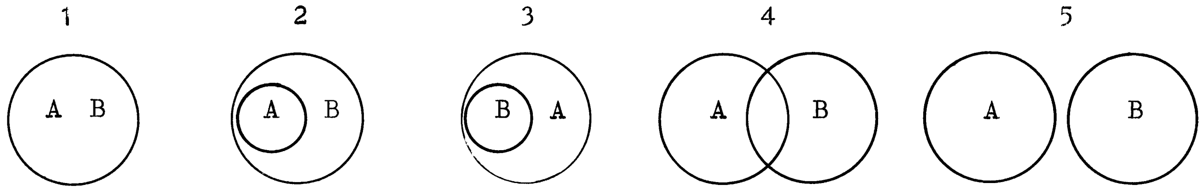
(2) P. 263.

(3) P. 277.

(4) P. 269.

CRITIQUE DES DIAGRAMMES EULERIENS

On prit vite l'habitude de recourir aux diagrammes d'Euler. Venn nous apprend que sur les soixante Traités de Logique qu'il a pu consulter, trente-quatre comportaient des diagrammes dont la plupart étaient de style eulérien. Mais on ne les considérait généralement qu'au titre d'illustrations commodes dont ni le rôle exact ni les limites d'application n'avaient besoin d'être précisés: insouciance dangereuse, car s'ils sont inaptes à satisfaire aux exigences de la Logique Symbolique, c'est déjà au mépris de la rigueur qu'on veut les faire servir à représenter les formes traditionnelles A, E, I, O. Celles-ci relèvent d'une théorie de la prédication où il s'agit essentiellement d'énoncer qu'un sujet possède ou non certains attributs (1), alors que les cercles eulériens conviennent tout naturellement à une interprétation <u>extensionnelle</u> où les propositions énoncent des rapports d'inclusion et d'exclusion entre classes. Faire appel aux dits cercles à propos de la première théorie, c'est courir le danger de mêler deux interprétations tout à fait différentes, et partant d'aboutir à des confusions et à des inconséquences. Pour rendre sa cohérence au rapport entre propositions et diagrammes, il faut s'en tenir à une théorie purement extensionnelle et partir de la question suivante: "une classe d'extension déterminée étant donnée, combien de types de relations différentes peut-il y avoir entre elle, et une seconde classe déterminée elle aussi quant à son extension ? Il y en a cinq: la seconde classe peut coïncider avec la première, elle peut l'inclure, elle peut être inclue en elle, elle peut l'inclure partiellement et l'exclure partiellement, ou enfin l'exclure entièrement" (2). Tels sont les seuls cas possibles qu'on peut représenter par les diagrammes suivants:



On remarquera immédiatement que la distinction entre sujet et prédicat à laquelle la logique traditionnelle attachait une si grande importance perd ici toute signification. C'est un pur accident grammatical si, dans l'énoncé verbal que nous donnons de la relation qui existe entre les classes A et B, A occupe la première place. Et à la seule vue d'un diagramme, on ne peut deviner quel cercle est censé représenter le sujet et quel cercle le prédicat (3).

Confrontons maintenant ces cinq diagrammes avec les quatre formes traditionnelles. Seul le n° 5 ne présente aucune ambiguïté et correspond de manière précise à l'universelle négative "Aucun A n'est B"; étant donné cette proposition, c'est ce seul diagramme que nous pourrions choisir pour la représenter. Mais dans les autres cas une telle correspondance n'existe pas. Etant donné "Tout A est B", nous ne pourrions que rester indécis entre (1) et (2). Donnons-nous en sens inverse le diagramme n° 4; nous ne saurons pas s'il faut le décrire comme "Quelque A est B" ou "Quelque A n'est pas B", car il convient à chacune de ces formula-

---

(1) Venn, Symbolic Logic (S.L.) p. 3.

(2) P. 6.

(3) P. 7.

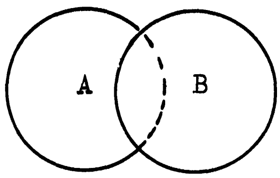
tions (1). Il n'est pas surprenant qu'on rencontre ensuite de nombreuses difficultés lorsqu'on s'avise de représenter des syllogismes à partir de bases aussi mal assurées.

Il est possible certes d'énoncer des propositions qui correspondent de manière claire et bien déterminée aux diagrammes précédents. Il suffit de convenir que le mot "Quelque" sera pris au sens de "Quelque mais non tout", dans les cinq énoncés suivants:

"Tout A est tout B", "Tout A est quelque B", "Quelque A est tout B", "Quelque A est quelque B", "Aucun A n'est aucun B".

Etant donné un de ces énoncés, on peut choisir un et un seul diagramme pour l'illustrer; étant donné un diagramme, on disposera parmi les cinq énoncés ci-dessus d'un et d'un seul énoncé qui en donne la description verbale exacte. Ainsi est écartée la première faute si grave de ceux qui n'aperçoivent pas que leurs illustrations spatiales impliquent une théorie propositionnelle sous-jacente (2).

Cependant, même après avoir été soumis à ces corrections, les diagrammes eulériens se révèlent tout à fait insuffisants lorsqu'on a à résoudre des problèmes un peu compliqués. La Logique traditionnelle s'est, il est vrai, si bien confinée dans la considération des syllogismes, qui ne font intervenir que trois termes, qu'à peine quelques tentatives avaient été faites pour représenter spatialement les combinaisons de quatre termes et au delà (3). Et si l'on s'aventure à traiter une suite de syllogismes à l'aide du procédé diagrammatique habituel, on se rendra compte bien vite qu'il perd alors ce qui fait son intérêt dans les cas simples: rien ne "saute" plus "aux yeux", mais tout s'embrouille, au contraire, bien plus que dans les énoncés verbaux. La raison en est simple: c'est qu'un diagramme eulérien a pour fonction de représenter d'emblée une proposition, c'est-à-dire la relation effective qui existe entre deux classes déterminées (4). Cela va très bien pour une proposition, mais lorsqu'il y en a plusieurs, il faudrait donner en une seule fois la figuration spatiale de ce qu'elles nous apprennent, tâche de plus en plus ardue lorsque leur nombre s'élève (5). Nous ne disposons pas ici du seul procédé qui permette d'aborder un problème complexe: en fragmenter la complexité en éléments plus simples (6). Lorsqu'une information nouvelle, tout en supprimant certaines possibilités, en laissant subsister d'autres, le dispositif eulérien ne nous donne aucun moyen simple d'exprimer notre ignorance relative. Ce serait une mauvaise échappatoire que d'utiliser, comme certains auteurs, des lignes pointillées: ainsi, "Quelque A n'est pas B" serait représenté par:



(1) pp. 7-8.

(2) p. 15 et pp. 16-17.

(3) p. 26, p. 513.

(4) p. 13.

(5) p. 125.

(6) Id.

la ligne pointillée signifiant ici que nous ne savons pas si la ligne A se trouve en partie à l'intérieur de B on l'inclut entièrement (1). La représentation eulérienne repose, sur le fait que des cercles se coupent ou ne se coupent pas; lorsque plusieurs diagrammes satisfont aux conditions d'un problème, il faut le dire franchement et les dessiner tous. Mais nous voilà ensuite bien embarrassés, car aucune règle simple ne nous est fournie, qui pourrait nous dire comment combiner entre elles les relations indiquées par différents diagrammes.

Ce que Venn reproche donc essentiellement à la méthode d'Euler c'est de n'être <u>ni assez générale</u>, <u>ni assez souple</u>: elle n'a d'intérêt que lorsque le nombre de termes auxquels on a affaire est très faible; si elle permet de visualiser des relations élémentaires, elle n'offre aucun moyen de résoudre pas à pas des problèmes plus difficiles.

LA REPRESENTATION DES TERMES

Si Boole a réussi à fonder la Logique Symbolique, c'est précisément parce qu'il a élaboré une méthode symbolique générale permettant de tenir compte d'autant de termes qu'on voudra, et défini des procédures de réduction, de simplification et d'élimination qui facilitent la résolution des équations logiques (2). Or existe-t-il un système diagrammatique qui ait le même ordre de généralité ? C'est à cette question que Venn a voulu répondre (3): il a cherché ce qu'il appelle lui-même la "contrepartie" diagrammatique de la Logique Symbolique.

On pourrait ne voir dans sa découverte qu'une simple retranscription de la méthode de Boole. Il s'en est défendu lui-même en soulignant que Boole n'avait pas employé de diagrammes, et qu'il n'avait donné dans ses oeuvres, aucune indication à ce sujet (4). Et il est vrai qu'en exposant son propre point de vue, celui des "compartiments" (the compartment view), Venn a été conduit à mieux mettre en lumière le trait par lequel le procédé du "développement" qui est l'essentiel du calcul booléen rompait le plus nettement avec les conceptions traditionnelles. Ce procédé n'est rien d'autre au fond qu'une systématisation de la division dichotomique, familière depuis longtemps aux logiciens (5), et dont de Morgan avait renouvelé la fécondité en introduisant la notion d'"univers du discours". Pour prendre un exemple très simple, étant donné deux attributs X et Y, l'univers du discours symbolisé par 1, pourra être divisé en quatre classes disjointes, selon que les choses comprises dans cet univers possèdent ou non l'attribut X, et possèdent ou non l'attribut Y; x, y désignant respectivement les classes des choses qui possèdent les attributs X, Y, et $\overline{x}$, $\overline{y}$ désignant

(1) p. 13.

(2) p. 171.

(3) p. 24.

(4) p. 114, note 1.

(5) p. 111.

les classes 1-x, 1-y; xy désignant l'intersection des classes x, y et x+y leur somme logique, on a:

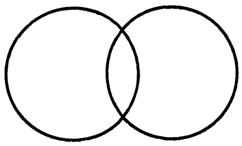
$$1 = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$$

Ce qui vient d'être réalisé avec deux classes peut l'être tout aussi bien avec un nombre quelconque de classes: avant même d'aborder un problème particulier où les classes considérées, auront entre elles telles ou telles relations déterminées, on peut établir la liste complète de leurs relations possibles, en particulier, on dénombrera toutes les subdivisions élémentaires selon lesquelles peut se partager l'univers du discours.

L'idée est simple et l'innovation de Venn n'a consisté en un sens qu'à la traduire en diagrammes. Mais pour que cette traduction fût possible, encore fallait-il transformer en conséquence l'idée qu'on se faisait jusque là de l'usage de ces derniers. Leur fonction sera toute différente, si prenant en quelque sorte du recul par rapport aux propositions, on commence par représenter un ensemble de possibilités où elles viendront s'inscrire ultérieurement comme cas particuliers (1). Ainsi, c'est la formule

$$1 = xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \overline{xy}$$

qu'on représentera par le diagramme:



Que ce diagramme soit apparemment semblable à celui qui sert à exprimer "quelque x est y" dans la représentation eulérienne, ne fait que mieux mettre en lumière la différence entre celle-ci et celle qu'introduit Venn. La première représente, comme on l'a vu plus haut, une proposition qui énonce une relation déterminée entre deux classes; pour la seconde, le diagramme représente la subdivision de l'univers du discours en quatre "cases" désignées par xy, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$, $\overline{xy}$ et fournit une sorte de cadre (Framework) à l'intérieur duquel on pourra ensuite exprimer des propositions.

Ainsi s'impose une distinction originale entre la représentation des termes et celle des propositions, la seconde supposant la première.

L'exemple élémentaire concernant deux termes x, y nous permet de formuler le problème général que nous avons à résoudre: établir "un cadre" de figures géométriques qui correspondront à la table des combinaisons de x, y, z, etc... Il n'est besoin de rien faire d'autre, pour atteindre ce but, que de décrire une série de figures closes, de quelque nature qu'elles soient, telle que chacune, prise l'une après l'autre, intersectera tous les compartiments déjà produits et doublera leur nombre" (2).

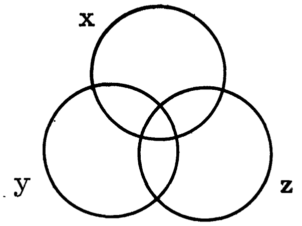
Pour deux termes, nous avons vu que le diagramme indique les quatre combinaisons xy, $x\bar{y}$, $\bar{x}y$, $\overline{xy}$. Introduisons un troisième terme z. Dessinons un troisième

---

(1) Venn répète ainsi sur un autre plan le mouvement de pensée par lequel Boole, dans "The Mathematical Analysis of Logic", décroche en quelque sorte la Logique Symbolique de la Syllogistique. Lui aussi commence en effet par chercher directement un équivalent symbolique pour chaque type fondamental de proposition, considéré comme canonique.

(2) p. 113.

cercle qui coupe les deux cercles précédents. "Chaque cercle est ainsi divisé en quatre parties, de sorte qu'en comptant la partie extérieure aux trois cercles, on obtient les huit compartiments correspondant aux huit combinaisons données par les symboles littéraux xyz, $xy\bar{z}$, $x\bar{y}z$, $x\bar{y}z$, $\bar{x}yz$, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}z$, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Mettez le doigt sur un compartiment quelconque, un nom se trouve prêt pour le désigner; prononcez le nom, aucun doute n'est permis quant au compartiment auquel il se réfère" (1)



"Les deux schèmes, celui des lettres et celui des aires concordent en ce que leurs éléments s'excluent mutuellement et sont tous représentés (mutually exclusive and collectively exhaustive). Aucun des éléments derniers n'empiète sur le domaine de l'autre; et pris ensemble, ils rendent compte de toutes les possibilités. Chacun des deux schèmes peut donc être considéré comme valablement représentatif de l'autre" (2).

"Théoriquement, ce procédé est susceptible de s'étendre à un nombre quelconque de termes. Le seul inconvénient que rencontre son extension indéfinie est que, au délà de trois termes, il n'est plus possible d'utiliser des figures aussi simples que des cercles; car quatre cercles ne peuvent se couper entre eux de la manière requise. En employant des figures plus compliquées, nous pourrions poursuivre indéfiniment. Il suffit de remplir la condition suivante: dessiner une figure continue qui coupera une fois, et une fois seulement, toute subdivision existante. Le nouveau contour doit être tracé de manière à partager en deux chacun des compartiments déjà existants, et à doubler ainsi leur nombre. Il est clair qu'aucune raison ne s'oppose à la poursuite indéfinie de ce procédé.

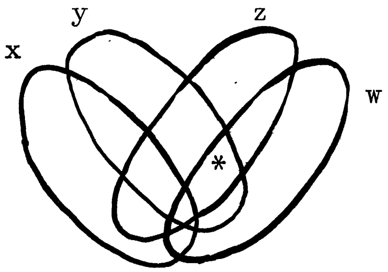
Pour quatre termes, il me semble que le diagramme le plus simple et le plus symétrique est celui qui est obtenu en faisant se couper entre elles quatre ellipses de la manière désirée: (3).

---

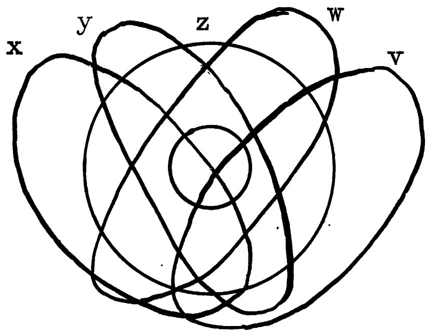
(1) p. 115. On aura déjà remarqué que Venn n'assigne pas de limites définies à l'"univers du discours". Lewis Carroll, dans sa Symbolic Logic, note avec une fierté amusée: "ma méthode diagrammatique... diffère de celle de M. Venn, en ce que j'attribue à l'univers du discours un domaine fini, si bien que la classe qui, sous le régime libéral de Venn, parcourait à son gré l'infini spatial, a la désagréable surprise de se retrouver "assignée à résidence" dans une cellule bien délimitée, comme n'importe quelle classe". (Appendix, § 7). En réalité, la négligence de Venn est calculée et veut signifier que l'extension réelle de l'univers du discours n'est à prendre en considération que lorsqu'on "applique" les formules du calcul symbolique à un problème particulier. Lorsque "je trace un cercle pour représenter X, tout ce qui est à l'extérieur de ce cercle représente non -X, mais les limites de cet extérieur sont tout ce que je choisis de considérer. Elles peuvent comprendre l'ensemble de la feuille de papier, ou se contracter de manière définie, si on trace un autre cercle pour représenter la limite de l'Univers; ou mieux encore, nous pouvons nous contenter de dire vaguement que les limites de l'Univers sont quelque part en dehors de la figure, mais qu'il n'y a pas la moindre raison de principe ou de commodité qui nous induise à les indiquer". (S.L., pp. 252-253).

(2) p. 115.

(3) pp. 115-116.



..."Pour cinq termes, nous ne pouvons plus utiliser d'ellipses, au moins sous la forme simple ci-dessus. Il ne serait pas difficile de tracer des figures en forme de fer à cheval qui répondent à nos besoins, mais alors toute configuration qui n'est pas très simple et facile à suivre cesse complètement de remplir sa destination essentielle: être une aide pour les yeux. Il faut que nous soyons capable d'identifier en un moment un compartiment déterminé. Ainsi, on voit instantanément que le compartiment marqué d'un astérisque est celui qui est appelé $\bar{x}$yzw. Le diagramme le plus simple que je puisse suggérer pour 5 termes est analogue à celui qui est ci-dessous, (la petite ellipse qui est au centre doit être considérée comme une partie de l'extérieur de z; c'est-à-dire que les quatre parties qui la composent sont à l'intérieur de y et de w, mais ne font pas partie de z)" (1).



Venn admet avec regret qu'un tel diagramme n'est pas aussi simple qu'on pourrait le désirer. Mais, dit-il, il est bien plus compliqué d'énumer les 32 combinaisons correspondantes. Il s'en rapporte à sa propre expérience: il a traité ainsi des centaines d'exemples, ce qui lui a permis de gagner du temps, et d'éviter erreurs et omissions. Par le peu d'intérêt qu'il attache aux tentatives qui avaient été faites à son époque pour construire des machines logiques, il montre bien qu'il ne voyait pas du tout l'intérêt que pouvait présenter la mécanisation du raisonnement logique (2). La pratique ne nous offre pas d'elle même des exemples compliqués et "c'est nous qui cherchons de tels exemples pour illustrer nos règles et nos méthodes" (3). Il n'en reste pas moins que sur ce terrain, Venn ne peut se vanter d'être allé beaucoup plus loin qu'Euler: il se plait à souligner la "perfection théorique" de son système, mais en pratique, il doit renoncer très vite au secours principal qu'il en attendait, ce

---

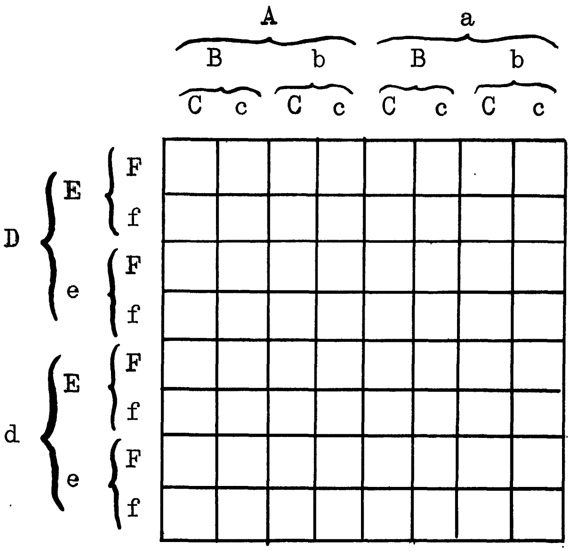
(1) pp. 116-117.

(2) p. 134.

(3) p. 133.

qu'il appelle lui-même, en empruntant l'expression au français, le "coup d'oeil" (1).

Dans sa seconde édition, il cite (2) (et utilise lui-même dans certains exemples (3)) la méthode de Marquand (3) qui est "quelque chose d'intermédiaire entre ce qu'on considérerait communément comme symbolique et comme diagrammatique".



LA REPRESENTATION DES PROPOSITIONS

Ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, la représentation des propositions est subordonnée à celle des termes et présuppose la construction d'un "Framework" qui n'est rien d'autre qu'une pure classification. Bien que le vocabulaire de Venn soit assez flottant, qu'il se permette lui-même des abus de langage par rapport à ses propres définitions, et qu'aux yeux d'un logicien moderne sa doctrine fourmille de confusions, on peut essayer de résumer ainsi sa position sur ce point.

Une fois qu'on a circonscrit les limites de l'univers du discours et énuméré les attributs dont nous aurons ultérieurement à tenir compte, nous pouvons diviser cet univers, indépendamment de toute autre donnée, en "compartiments". Selon un test dont la nature n'intéresse pas le logicien, nous pouvons décider quelles sont les choses qui existent "matériellement" dans cet univers (4). Par opposition, les compartiments ont une existence "formelle" (5) et figurent l'ensemble des possibilités qui résultent du fait que, un attribut étant posé, une

---

(1) p. 117, note 1.

(2) p. 139.

(3) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 1885.

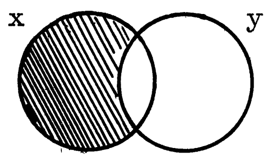
(4) p. 142.

(5) p. 165.

chose le possède ou, sinon, possède l'attribut contraire (1). Tant que nous nous en tenons, en un premier temps, au seul framework, nous ne savons pas si tel compartiment est ou non occupé. Ce sera précisément la fonction fondamentale des propositions que de formuler ce type d'information. Les propositions expriment les data en termes d'occupation ou de non-occupation des compartiments. Lorsque nous saurons que le compartiment dénoté par le symbole $xy\bar{z}$ est occupé, nous dirons que la classe $xy\bar{z}$ existe.

Que deviennent transposées dans ce langage les formes traditionnelles: "Tous les X sont Y" et "Quelques X sont Y"? Venn rencontre ici un problème qui a beaucoup préoccupé les logiciens de la fin du siècle dernier: celui de la portée existentielle de ces formes. Il choisit, non sans la justifier par de très longues analyses, la solution qui nous est depuis devenue familière, mais qui rompait trop nettement avec les positions traditionnelles pour ne pas avoir eu longtemps un air de paradoxe: elle efface en effet la distinction entre Catégoriques et Hypothétiques et surtout rejette comme illégitimes des modes d'inférence qu'on considérait comme fondamentaux. Retenons simplement ici la formulation intuitive qu'en a donnée Venn et l'application qu'il en a faite à ses diagrammes. Eu égard à ce qu'elle affirme, la proposition "tout x est y" ne peut être considérée que comme conditionnelle: elle ne nous dit rien en effet sur l'existence des x ou des y, car son sens véritable est "s'il existe des x, ils sont y"; elle ne nous apprend rien sur l'occupation des compartiments de notre "framework" (2). Mais nous pouvons la transformer en une proposition négative "aucun x n'est non y", ou $x\bar{y} = 0$; sous cette forme, elle est "absolue" (3) elle nous assure que le compartiment $x\bar{y}$ n'est pas occupé, elle énonce "la non-existence d'une certaine combinaison, à savoir de choses qui sont la combinaison de x et de non-y" (4). Certes elle ne nous dit pas que les autres compartiments sont occupés, mais en éliminant une possibilité, elle diminue le nombre des possibilités restantes.

Rien n'est plus aisé que de représenter sur un diagramme cette élimination: il suffira d'ombrer le compartiment correspondant (5). Ainsi pour "Tout x est y"



Il n'est pas moins facile de combiner autant de propositions universelles qu'on voudra, car ce procédé purement mécanique ne simplifie pas seulement la résolution des syllogismes, mais des suites de propositions où se mêlent Catégories, Disjonctives et Hypothétiques (6).

---

(1) p. 166.

(2) p. 158.

(3) p. 159.

(4) Id.

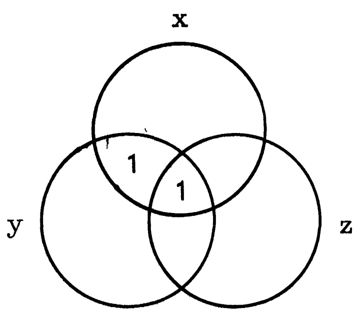
(5) p. 122.

(6) p. 126-127.

Quant aux propositions particulières, elles ont un caractère "existentiel". Après avoir adopté dans sa première édition la symbolisation de Boole ($xy = v$); Venn a préféré dans sa seconde édition la formule: $xy > 0$ interprétée comme négation de $xy = 0$, et signifiant "xy est quelque chose", "c'est-à-dire n'est pas rien" (1). Pour une particulière négative, nous aurons "$x\bar{y} > 0$" qui en termes familiers voudra dire "Il y a des choses telles que x's qui ne sont pas y" (2). A la différence des universelles, les particulières indiquent donc que des compartiments sont occupés, mais précisément à cause de cela, leur représentation diagrammatique entraine une "perte d'élégance et de simplicité". Venn en est si marri qu'il cherche à déprécier ces trouble-fête en affirmant qu'ils n'ont qu'une importance usurpée en logique, et une place encore beaucoup plus humble dans la vie réelle et surtout en science" (3). Toujours est-il que le mérite de ses diagrammes n'en sera que plus grand s'il arrive à les y intégrer! Il suffirait pour cela d'introduire un troisième procédé outre ceux qui consistaient à ombrer ou à laisser les cases en blanc; mais alors que l'effet d'une universelle est de "détruire ou de ne pas détruire" un compartiment, celui d'une particulière est de "préserver ou de ne pas préserver" des compartiments. Quand x est détruit, cela entraine la destruction de ses constituants élémentaires xyz, $xy\bar{z}$. Mais quand il faut "sauver x", tout ce que nous savons est qu'un ou plusieurs de ses constituants élémentaires doit ou doivent être "sauvés": l'information a ici un caractère disjonctif.

Pour la représenter, "le meilleur moyen est peut-être d'utiliser des chiffres dont on marquera les compartiments" de la manière suivante: un chiffre étant assigné à une proposition particulière déterminée, on portera ce chiffre dans les compartiments qui sont tels, selon ce que nous apprend cette proposition, que l'un d'entre eux, au moins doit être occupé.

Sur le diagramme correspondant aux trois termes x, y, z, la proposition n° 1 "Quelque x est y" sera représentée par:



Nous pouvons maintenant résumer comme suit les avantages et les mérites que Venn prête à sa propre méthode:

a) Elle respecte la condition fondamentale que doit remplir tout système diagrammatique valable: il existe entre elle et le système symbolique qu'elle figure une stricte correspondance. Il n'y a pas de combinaison de symboles qui

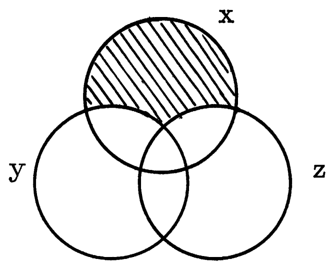
(1) pp. 184-185.

(2) p. 185.

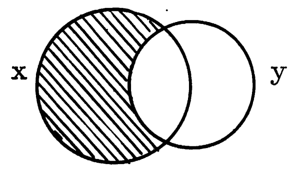
(3) p. 131.

ne puisse être rendue sensible aux yeux par une construction diagrammatique convenable (1).

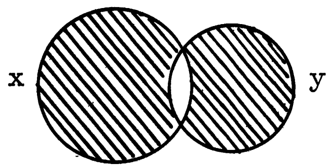
b) Elle déborde considérablement, au même titre que la Logique Symbolique, les frontières étroites de la Logique aristotélicienne, puisque, théoriquement, elle reste valable pour un nombre quelconque de termes. Elle permet par ailleurs de représenter simplement les Disjonctives dont le traitement paraissait si difficile qu'on n'avait que très rarement cherché des figures pour les illustrer (2). Ainsi "Tout x est ou y ou z" sera représenté par:



c) Elle évite l'utilisation de diagrammes multiples. Lorsque nous avons représenté "Tout x est y" par:



et que nous voulons représenter "Tout x est tout y", il suffira d'ombrer $\bar{x}y$.



Alors qu'avec la procédure eulérienne, il aurait fallu à chaque fois dessiner une nouvelle figure (3).

d) Elle permet d'utiliser les informations nouvelles au fur et à mesure qu'elles se présentent (4). Cet avantage - qui est le plus important apparait déjà avec l'exemple élémentaire précédent; il est possible d'inscrire dans le diagramme sans ambiguïté ni déperdition de connaissance, tout ce qu'exprime une proposition déterminée.

---

(1) p. 118 et p. 139.

(2) p. 124.

(3) p. 122.

(4) p. 123 et p. 125.

LE "COMPARTMENT VIEW" ET LA LOGIQUE SYMBOLIQUE

D'une certaine manière, Venn a eu devant le Calcul Logique de Boole, une attitude analogue à celle d'Euler devant la Logique aristotélicienne. Il en a donné ce qu'il appelle lui-même une "interprétation", une représentation visuelle dont il se plait à souligner, toujours à la manière d'Euler, qu'elle enlève leur "mystère" aux formules hérissées de symboles qui avaient effrayé les logiciens d'obédience scolastique. Elle lui a permis effectivement d'atténuer ce que pouvait avoir de dangereux la référence, permanente chez Boole, à la "Science du Nombre", et de mieux éclairer certaines conventions nouvelles qui ont eu beaucoup de mal à se faire admettre des philosophes.

a) si Venn a eu assurément le mérite de chercher une représentation qui soit en "complète harmonie" avec le calcul de Boole, il ne s'est guère interrogé sur les raisons de cette "harmonie". Ce qu'il a cherché c'était "un système de diagrammes, au sens ordinaire du mot: en fait quelque chose de géométrique, où l'inclusion et l'exclusion seraient représentées, de manière évidente par les figures" (1), mais pourquoi et comment y a-t-il une "représentation géométrique" des opérations logiques ? Venn a entrevu le problème dans une page qu'il nous semble bon de citer par l'amorce qui s'y trouve de considérations topologiques (2).

"Le lecteur logicien pourra penser à un certain nombre de déductions qu'on lui laisse le soin de développer en détail. On peut en indiquer brièvement quelques unes. Par exemple, deux compartiments quelconques entre lesquels nous pouvons communiquer en traversant une seule ligne, ne peuvent différer que par l'affirmation et la négation d'un seul terme général, ainsi $xyzw$ et $xy\bar{z}w$. En conséquence, lorsque les deux termes correspondant à deux compartiments tels que ceux-ci sont unis, ou comme nous pouvons le dire, "ajoutés" l'un à l'autre, le résultat peut être simplifié en omettant le terme z; car les deux ensembles forment xyw. Deux compartiments quelconques entre lesquels nous ne pouvons communiquer qu'en traversant deux frontières, par exemple, $xy\bar{z}w$ et $x\bar{y}zw$, doivent différer à deux égards: il faudrait quatre compartiments semblables pour que soit possible la simplification qui résulterait du fait qu'on aurait le droit de laisser tomber deux termes. Par exemple, $xy\bar{z}w$, $x\bar{y}zw$, $xyzw$, $x\bar{y}\bar{z}w$, pris ensemble, donnent simplement xw. Lorsqu'on parle ainsi de traverser des frontières, il faut se souvenir qu'il est équivalent de traverser deux fois la même, ou de ne pas la traverser du tout, et qu'il revient au même de la traverser trois fois ou de la traverser une fois seulement, cela nous conduit à l'extérieur si nous étions auparavant à l'intérieur. On verra que ces considérations ont une grande importance lorsque nous en viendrons au problème de l'élimination" (3).

---

(1) p. 139

(2) Il est curieux de noter qu'après avoir réduit les syllogismes à des rapports d'"espaces", Euler en tire la conclusion suivante: "... dès qu'un syllogisme se trouve dans une de nos dix-neuf formes, on peut être assuré que si les deux prémisses sont vraies, la conclusion est toujours indubitablement vraie. D'où Votre Altesse comprend comment de quelques vérités connues on arrive à des vérités nouvelles, et que tous les raisonnements par lesquels on démontre tant de vérités dans la géométrie se laissent réduire à des syllogismes formels". (Lettres, XXXVII, p. 273).

(3) p. 119.

b) On sait toutes les discussions auxquelles a donné lieu la notion d'"implication matérielle", et les efforts qu'à du encore faire Russell pour écarter les malentendus auxquels donne lieu l'emploi en ce cas du mot "implication". Venn en donne une définition exacte; il n'a pas ici le mérite de l'originalité, et il cite lui-même à ce propos Mc Coll, Frege et C.S. Peirce (1); mais il analyse bien les raisons pour lesquelles cette définition, qui constitue "une perversion par rapport au point de vue ordinaire", se trouve en accord avec les présupposés de la Logique Symbolique et en dérive naturellement. La source de toutes les difficultés c'est que celle-ci est tenue d'envisager des "cas limites" que, jusque là, on oubliait d'envisager. Ainsi, depuis que Boole l'a introduit pour "interpréter logiquement" le symbole 0, symbole numérique, le concept "Rien" (Nothing), y joue un rôle capital (2). Les mathématiciens, nous dit Venn, sont habitués à ce qu'une quantité inconnue se révèle, au terme d'un raisonnement, être égale à zéro (3) et ceux qui ne dépassent pas les limites de la "logique ordinaire" ne voient pas qu'il en va de même dans le Calcul Logique, où il faut être prêt à admettre qu'à une combinaison de termes comme $xy\bar{z}$ ne correspond "aucune chose qui soit leur sujet" (4). La remarque pourra sembler étrange; elle témoigne bien de la perturbation que provoqua en logique la prise en considération de la classe nulle. Et si Venn n'a pas été trop troublé dans le maniement de cette notion délicate, c'est qu'il se laissait guider par son imagerie d'occupation et de non-occupation de compartiments.

c) Quoiqu'il en ait, Venn reste profondément attaché à la Logique traditionnelle, par sa méfiance à l'égard du formalisme, par le souci qu'il a en particulier de trouver une "interprétation logique" aux symboles que Boole avait déclarés non interprétables. Mais en revanche, la simplicité de son "formal framework" et des lois qui gouvernent son utilisation, l'a conduit selon nous à apercevoir, mieux que d'autres auteurs plus éminents, qui s'en tenaient aux "interprétations" de nature philosophique imposées par la tradition, la multiplicité des "interprétations" qu'on pouvait donner de "l'antithèse formelle" qui lui sert de fondement. Qu'on choisisse le couple "existe-n'existe pas", "est-n'est pas" (5), "crédibilité-non crédibilité" (pour les témoignages) (6), "présent-absent" (pour les "qualités" d'un objet) (7), on a affaire à un même système symbolique, obéissant à des lois identiques. "A vrai dire, si nous poussons assez loin l'abstraction, nous pouvons dire aussi qu'il y a seulement une et même interprétation pour tous ces cas, car en chacun d'eux, nous avons affaire aux différentes combinaisons, auxquelles

---

(1) p. 242.

(2) cf. Boole, An Investigation of the Laws of Thought, rééd. Dover Public., p. 47.

(3) Venn, S.L., p. 162.

(4) p. 163.

(5) p. 434.

(6) p. 433.

(7) p. 446.

donnent lieu des affirmations et des négations. A la structure formelle construite à partir de x et de $\overline{x}$, ainsi que des termes semblables, correspond la structure verbale construite à partir de OUI et de NON combinés et appliqués de différentes manières. Aussi bien symboliquement et verbalement, il y a dans chaque cas un schème premier et nécessaire de possibilités qui est limité par les conditions expérimentales et matérielles fournies par les data". (1)

- - - - - - - - -

(1) p. 433.