MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

ALAIN GHOUILA-HOURI

Problèmes de pesées

Mathématiques et sciences humaines, tome 7 (1964), p. 29-39

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__7__29_0>

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (http://msh.revues.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ALAIN GHOUILA-HOURI

PROBLEMES DE PESEES

On connait les problèmes classiques de pesées.

Problème 1. On a N pièces de monnaie ($N \geq 2$) toutes de même poids, sauf l'une d'entre elles qui est plus légère. Quel est le nombre minimum $f(N)$ de pesées nécessaires pour être sûr de déceler la pièce défectueuse ?

Problème 2. On a N pièces de monnaie ($N \geq 3$) toutes de même poids sauf une. Quel est le nombre minimum $f(N)$ de pesées nécessaires pour être sûr de déceler la pièce défectueuse ?

Il existe d'ailleurs une autre variante du problème 2.

Problème 2bis. .... pour être sûr de déceler la pièce défectueuse et de savoir si elle est plus lourde ou plus légère que les autres ?

La solution du premier problème est bien connue: $f(N)$ est la partie entière par excès du logarithme de base 3 de N, ce que nous noterons $E\left[\log_3 N\right]$. (*).

En guise d'introduction, nous allons montrer comment on obtient cette solution.

Solution du problème I

Pour faire une pesée on met k pièces dans un plateau et k pièces dans l'autre ($k \leq \frac{N}{2}$). Deux cas peuvent se présenter alors:

1er cas. On obtient l'équilibre. La pièce défectueuse se trouve alors parmi les $N-2k$ pièces restantes, et le nombre ultérieur de pesées nécessaires est $f(N-2k)$.

2ème cas. On obtient un déséquilibre. La pièce défectueuse se trouve alors parmi les k pièces du plateau le plus léger, et le nombre ultérieur de pesées nécessaires est $f(k)$.

On voit ainsi que dans le pire des cas, le nombre de pesées ultérieures sera

$$\text{Max}\left[f(N-2k),\ f(k)\right]$$

On a donc la relation de récurrence

$$f(N) = 1 + \underset{k \leq \frac{N}{2}}{\text{Min}}\ \text{Max}\left[f(N-2k),\ f(k)\right] \qquad (1)$$

*Dans ce texte, la notation $E[x]$ représentera la partie entière par excès de x si $x \geq 0$; si $x < 0$, on posera $E[x] = 0$.

Cette relation, en tenant compte du fait que $f(1) = 0$, définit $f(N)$ de manière unique.

Ceci dit, on peut remarquer que $f(N)$ étant une fonction croissante de N, l'expression

$$\operatorname{Max}\left[f\,(N-2k),\ f\,(k)\right]$$

atteint son minimum pour $k = E\left[\frac{N}{3}\right]$. On peut donc remplacer la relation (1) par la relation

$$f\,(N) = 1 + f\left(E\left[\frac{N}{3}\right]\right) \qquad (2)$$

ce qui donne immédiatement la solution

$$f\,(N) = E\left[\log_3 N\right]$$

Les états du système

La solution des problèmes 2 et 2bis est plus délicate, pour une raison qui va apparaître immédiatement. En effet, pour résoudre ces problèmes, il faut tenir compte de toutes les situations qui peuvent se présenter à la suite des pesées successives: pour employer une terminologie classique en Programmation Dynamique, nous dirons qu'il faut tenir compte de tous les <u>états</u> possibles du système au cours des opérations successives. Or, si l'<u>état initial</u> du système est entièrement défini par le nombre N de pièces considérées, il en va autrement des états ultérieurs. En effet, sitôt que des pesées ont été effectuées, les N pièces se divisent en quatre catégories:

1 - les pièces qui ont sûrement un poids normal,

2 - les pièces qui sont susceptibles d'être trop légères, mais non trop lourdes,

3 - les pièces qui sont susceptibles d'être trop lourdes, mais non trop légères,

4 - les pièces sur lesquelles on ne sait rien.

Soient k_1, k_2, k_3, k_4 les nombres respectifs de pièces de ces quatre catégories: on a $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = N$. L'état du système est caractérisé par ces quatre nombres.

<u>Exemple</u>:

On a 40 pièces numérotées de 1 à 40 dont 39 ont le même poids, et il s'agit de déceler la pièce défectueuse en quatre pesées. Le problème est possible puisque $E\left[\log_3 80\right] = 4$. On procède de la manière indiquée sur le schéma des pages 32 et 33. Dans ce schéma, on utilise les abréviations suivantes:

C_1, C_2, C_3, C_4	:	Catégories 1, 2, 3, 4
E	:	Equilibre
D	:	Déséquilibre
Pl.	:	Plateau
1er Pl. L	:	Le premier plateau est plus lourd
2ème Pl. L	:	Le deuxième plateau est plus lourd.

Les décisions possibles

A chaque stade des opérations, autrement dit après chaque pesée, il faut prendre une décision. Cette décision consiste à déterminer les modalités de la pesée ultérieure. L'ensemble des décisions possibles dépend évidemment de l'état dans lequel se trouve le système. Nous allons examiner de plus près en quoi consiste une décision.

Lorsqu'on effectue une pesée, on met dans un plateau x_1 pièces de la première catégorie, x_2 de la seconde, x_3 de la troisième, x_4 de la quatrième; dans l'autre plateau, on met y_1, y_2, y_3, y_4 pièces des catégories 1, 2, 3, 4, de façon telle que

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} y_i$$

Posons

$$z_i = k_i - x_i - y_i \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4$$

Prendre une décision revient donc à choisir des nombres x_i, y_i, z_i $(i=1,2,3,4)$ vérifiant le système de conditions

$$\begin{aligned} & x_i,\ y_i,\ z_i \geqslant 0 \\ & x_i + y_i + z_i = k_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (3) \\ & \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} y_i \end{aligned}$$

Passage d'un état à un autre

Appelons k'_1, k'_2, k'_3, k'_4 les nombres de pièces des quatre catégories une fois que la pesée qu'on a décidée est effectuée. Trois cas peuvent se présenter.

1er cas -

Il y a équilibre. On a alors:

$$k'_1 = k_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i + \sum_{i=2}^{4} y_i$$

$$k'_i = z_i \quad \text{pour } i = 2, 3, 4$$

2ème cas -

La balance penche du côté du premier plateau. On a alors:

$$k'_1 = k_1 + \sum_{i=2}^{4} z_i + x_2 + y_3$$

$$k'_2 = y_2 + y_4$$

$$k'_3 = x_3 + x_4$$

$$k'_4 = 0$$

Solution explicite du problème 2 pour N = 40

40 pièces ds C_4

1) 1° Pl: 1 à 13
2° Pl: 14 à 26

E

27 à 40 ds C_4

2) 1° Pl: 27 à 31
2° Pl: 32 à 35, et 1

E

36 à 40 ds C_4

3) 1° Pl: 36, 37
2° Pl: 38, 1

D

27 à 31 ds C_2
32 à 35 ds C_3

3) 1° Pl: 27, 28, 32
2° Pl: 29, 30, 33

E

39, 40 ds C_4

D

36, 37 ds C_2
38 ds C_3
(ou vice versa)

4) 1° Pl: 39
2° Pl: 1

E

40

D

39

E

31 ds C_2
34, 35 ds C_3

1° Pl. L

29, 30 ds C_2
32 ds C_3

2° Pl. L

27, 28 ds C_2
33 ds C_3

Changement de
numérotation

4) 1° Pl. 37, 38
2° Pl: 1, 2

E

36

1° Pl. L

38

2° Pl. L

37

D

1 à 13 ds C_2
14 à 26 ds C_3
(ou vice versa)

2) 1°Pl: 1 à 5, 14 à 18
2°Pl: 6 à 9, 19 à 22, 39, 40

E	1°Pl. L	2°Pl. L
10 à 13 ds C_2	1 à 5 ds C_2	6 à 9 ds C_2
23 à 26 ds C_3	19 à 22 ds C_3	14 à 18 ds C_3

On considère 40
comme faisant partie de C_2

10 à 13 et 40 ds C_2
23 à 26 ds C_3.

Changement de
numérotation

3ème cas -

La balance penche du côté du second plateau. Il faut alors permuter les x et les y dans les formules précédentes.

Relation de récurrence

Notons $f(k_1, k_2, k_3, k_4)$ le nombre de pesées nécessaires pour obtenir la réponse au problème (que ce soit le problème 2, ou 2bis) lorsqu'on se trouve dans l'état défini par les quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4.

On a la relation de récurrence:

$$f(k_1,k_2,k_3,k_4) = 1+\text{Min Max} \left\{ \begin{array}{l} f\left(k_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i + \sum_{i=2}^{4} y_i,\ z_2,\ z_3,\ z_4\right) \\ f\left(k_1 + \sum_{i=2}^{4} z_i + x_2+y_3, y_2+y_4, x_3+x_4, 0\right. \\ f\left(k_1 + \sum_{i=2}^{4} z_i + y_2+x_3, x_2+x_4, y_3+y_4, 0\right. \end{array} \right\} \qquad (4)$$

Dans cette relation, l'opérateur Max porte sur les trois expressions écrites à sa droite: il indique que l'on envisage celui des trois cas qui est le plus défavorable. L'opérateur Min porte sur toutes les pesées possibles: il indique que l'on prend la meilleure décision possible.

Conditions aux limites

Dans ce qui précède, nous avons été amenés à reconnaître la nécessité de traiter les problèmes 2 et 2bis respectivement comme des cas particuliers des problèmes A et B suivants

PROBLÈME A.

Le système (de nos connaissances) se trouve dans l'état défini par les quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4. Quel est le nombre minimum $f_A(k_1, k_2, k_3, k_4)$ de pesées nécessaires pour déceler la pièce défectueuse?

PROBLÈME B.

Le système se trouve dans l'état défini par les quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4. Quel est le nombre minimum $f_B(k_1, k_2, k_3, k_4)$ de pesées nécessaires pour déceler la pièce défectueuse et pour savoir si elle est plus lourde ou plus légère?

Remarque 1. La solution du problème 2 est $f(N) = f_A(0, 0, 0, N)$
Celle du problème 2bis est $f(N) = f_B(0, 0, 0, N)$

Remarque 2. On a $f_A(k_1, k_2, k_3, 0) = f_B(k_1, k_2, k_3, 0)$

Remarque 3. On a $f_A(k_1, k_2, k_3, 0) = f_A(k_1, k_3, k_2, 0)$

Remarque 4. La solution du problème 1 est $f(N) = f_A(0, N, 0, 0)$

Jusqu'à présent, nous avons vu que les solutions du problème A et du problème B obéissent à une même relation de récurrence, la relation (4). Est-ce à dire qu'il n'y a pas de différence entre ces deux problèmes ? Certainement pas. La différence tient à un phénomène que nous avons omis de signaler, à savoir que la relation (4) n'est valable que si l'état (k_1, k_2, k_3, k_4) ne contient pas déjà l'information désirée.

Cas du problème A.

Dans ce cas, l'information désirée est atteinte lorsque l'on a $k_2 + k_3 + k_4 \leqslant 1$. La fonction $f_A(k_1, k_2, k_3, k_4)$ obéit à la relation (4) seulement pour $k_2 + k_3 + k_4 > 1$; elle est nulle pour $k_2 + k_3 + k_4 \leqslant 1$.

Cas du problème B.

Dans ce cas, l'information désirée est atteinte lorsqu'on à $k_4 = 0$ et $k_2 + k_3 \leqslant 1$, c'est-à-dire lorsque l'on a $k_2 + k_3 + 2k_4 \leqslant 1$. La fonction $f_B(k_1, k_2, k_3, k_4)$ obéit à la relation (4) seulement pour $k_2 + k_3 + 2k_4 > 1$; elle est nulle pour $k_2 + k_3 + 2k_4 \leqslant 1$.

Unicité des solutions

La question qui se pose maintenant est de savoir si les fonctions $f_A(k_1, k_2, k_3, k_4)$ et $f_B(k_1, k_2, k_3, k_4)$ sont définies de manière unique par les conditions que nous leur avons imposées. La réponse est affirmative, comme nous allons le montrer. Appelons S_o l'ensemble des états qui contiennent l'information désirée (pour le problème A, S_o est l'ensemble des états qui vérifient $k_2 + k_3 + k_4 \leqslant 1$; pour le problème B, c'est l'ensemble des états qui vérifient $k_2 + k_3 + 2k_4 \leqslant 1$). Soit $f(k_1, k_2, k_3, k_4)$ une fonction qui s'annule pour $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in S_o$, et qui vérifie la relation (4) pour $(k_1, k_2, k_3, k_4) \notin S_o$. Nous allons voir que le nombre de pesées nécessaires pour atteindre un état de S_o est $f(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

En effet, si on effectue une pesée, et si on appelle (k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) l'état obtenu après cette pesée, on a

$$1 + \mathrm{Max}\, f(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) \geqslant 1 + \mathrm{Min}\,\mathrm{Max}\, f(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) = f(k_1, k_2, k_3, k_4)$$

Si l'éventualité la plus défavorable se réalise, on aura donc

$$f(k_1, k_2, k_3, k_4) - f(k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) \leqslant 1$$

On voit ainsi que si on joue de malchance à chaque pesée, le nombre de pesées qu'il faudra pour aboutir à un état de S_o, c'est-à-dire à un état qui annule f, sera au moins égal à $f(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

Par ailleurs, si on choisit chaque fois la pesée qui réalise le minimum dans le second terme du second nombre de la relation (4), on aura alors, dans le cas le plus. défavorable

$$f\ (k_1, k_2, k_3, k_4) - f\ (k'_1, k'_2, k'_3, k'_4) = 1$$

On voit donc qu'avec cette politique le nombre de pesées qu'il faudra pour atteindre un état de S_0 sera, dans le pire des cas, égal à $f\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$.

En définitive $f\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$ est bien le minimum du nombre de pesées nécessaires.

Classes admissibles d'états

Appelons Σ l'ensemble de tous les états possibles. On appellera classe admissible d'états tout ensemble $S \subset \Sigma$ tel que si on part d'un état de S, et qu'on effectue une pesée, on aboutit dans tous les cas à un état de S. Les exemples les plus simples de classes admissibles sont Σ et S_0. Si on se donne un entier n, l'ensemble des états pour lesquels $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$ est une classe admissible; l'ensemble des états pour lesquels $k_1 \geqslant n$ est également une classe admissible. Citons aussi l'ensemble des états pour lesquels $k_4 = 0$.

Si on se donne une classe admissible, on peut chercher à connaître f_A et f_B pour les états de cette classe, et uniquement pour ceux-là. En donnant la solution du problème 1, nous avons résolu les problèmes A et B pour la classe des états qui vérifient $k_3 = k_4 = 0$ (ces deux problèmes ayant d'ailleurs la même solution pour cette classe d'états).

Intuitivement, on devine que les solutions $f_A\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$ et $f_B\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$ ne dépendront pas beaucoup de k_1. Le seul rôle qui semble réservé aux pièces de la première catégorie est un rôle d'appoint: elles permettront d'assurer l'égalité du nombre de pièces dans les deux plateaux. C'est ce qui nous conduit à rechercher, dans une première étape, la solution des deux problèmes dans des classes admissibles de la forme "k_1 assez grand".

Solution du problème B pour $k_1 \geqslant 1$

La forme de la solution du problème 1, et l'idée qu'une pièce de la catégorie 4 contient deux fois plus de mystère qu'une pièce de la catégorie 2 ou de la catégorie 3, nous conduisent à examiner l'hypothèse que la solution est

$$f_B\ (k_1, k_2, k_3, k_4) = E\left[\log_3 (k_2 + k_3 + 2\ k_4)\right]$$

On vérifie tout d'abord que cette fonction s'annule pour $k_2 + k_3 + 2\ k_4 \leqslant 1$. Par ailleurs, si on part d'un état vérifiant $k_2 + k_3 + 2\ k_4 > 1$ quelle que soit la décision prise, l'un des trois nombres $z_2 + z_3 + 2\ z_4$, $y_2 + x_3 + x_4 + y_4$, $x_2 + y_3 + x_4 + y_4$ sera au moins égal à

$$E\left[\frac{k_2 + k_3 + 2\ k_4}{3}\right]$$

(puisque leur somme est égale à $k_2 + k_3 + 2\ k_4$). D'autre part, si $k_1 \geqslant 1$, il est possible de choisir la pesée de telle manière que ces trois nombres soient inférieurs ou égaux à

$$E\left[\frac{k_2 + k_3 + 2\,k_4}{3}\right] \quad (*)$$

On a donc, pour $k_1 \geqslant 1$ et $k_2 + k_3 + 2\,k_4 > 1$,

$$E\left[\log_3 (k_2 + k_3 + 2k_4)\right] = 1 + \text{Min Max}\begin{Bmatrix} E\left[\log_3 (z_2 + z_3 + 2\,z_4)\right] \\ E\left[\log_3 (y_2 + x_3 + x_4 + y_4)\right] \\ E\left[\log_3 (x_2 + y_3 + x_4 + y_4)\right] \end{Bmatrix}$$

En définitive, on a bien $f_B\,(k_1, k_2, k_3, k_4) = E\left[\log_3 (k_2 + k_3 + 2k_4)\right]$ pour $k_1 \geqslant 1$

Solution du problème A pour $k_1 \geqslant 2$

Tout d'abord, on a

$$f_A\,(k_1, k_2, k_3, 0) = f_B\,(k_1, k_2, k_3, 0) = E\left[\log_3 (k_2 + k_3)\right] \text{ pour } k_1 \geqslant 1$$

D'autre part, $f_A\,(k_1, k_2, k_3, k_4)$ est définie pour $k_1 \geqslant 1$ et $k_4 > 0$ par la relation de récurrence suivante (valable pour $k_2 + k_3 + k_4 > 1$).

$$f_A\,(k_1, k_2, k_3, k_4) = 1 + \text{Min Max}\begin{Bmatrix} f_A\,(k_1 + \sum_{i=2}^{4} x_i + \sum_{i=2}^{4} y_i,\ z_2,\ z_3,\ z_4) \\ E\left[\log_3 (y_2 + x_3 + x_4 + y_4)\right] \\ E\left[\log_3 (x_2 + y_3 + x_4 + y_4)\right] \end{Bmatrix}$$

On vérifie alors facilement (*) que l'on a, pour $k_1 \geqslant 2$ et $k_4 > 0$,

$$f_A\,(k_1, k_2, k_3, k_4) = E\left[\log_3 (k_2 + k_3 + 2k_4 - 1)\right]$$

Des inégalités supplémentaires

Nous allons ici serrer de très près les valeurs de f_A et de f_B pour les états qui vérifient $k_1 \leqslant 1$. En effet, soit un état (k_1, k_2, k_3, k_4) avec $k_1 \leqslant 1$. Il est possible de faire une pesée de manière telle que, quel que soit le résultat,

---

* Pour vérifier cela, il faut examiner différents cas, suivant les valeurs des restes de la division par 3 des nombres k_2, k_3 et k_4.

le nouvel état (k_1', k_2', k_3', k_4'), vérifie $k_1' \geqslant 2$ et $k_2' + k_3' + 2k_4' < k_2 + k_3 + 2k_4$.

On a donc

$$f_A\ (k_1, k_2, k_3, k_4) \leqslant 1 + f_A\ (2, k_2, k_3, k_4)$$

et

$$f_B\ (k_1, k_2, k_3, k_4) \leqslant 1 + f_B\ (2, k_2+k_3, k_4)$$

Inversement, si on se trouve dans un état $(2, k_2, k_3, k_4)$, il est possible de faire toutes les pesées en laissant de côté une ou deux boules de la catégorie 1, et, mis à part cela, en prenant toutes les décisions de manière optimale. On a donc aussi

$$f_A\ (2, k_2, k_3, k_4) \leqslant f_A\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$$

et

$$f_B\ (2, k_2, k_3, k_4) \leqslant f_B\ (k_1, k_2, k_3, k_4)$$

Il est maintenant possible, par un examen exhaustif des situations possibles, de donner la solution générale des problèmes A et B. Mais nous nous limiterons ici à l'étude des problèmes 2 et 2bis.

Solution du problème 2bis ($N \geqslant 3$)

Soit $q > 1$ le plus petit entier tel que $2N \leqslant 3^q$. D'après ce qui précède, on a

$$f\ (N) = f_0\ (0, 0, 0, N) = q \text{ ou } q + 1$$

Pour faire la première pesée, on choisit des nombres $x_4, y_4, z_4 \geqslant 0$ tels que $x_4 = y_4$ et $x_4 + y_4 + z_4 = N$

Deux cas se présentent:

<u>1er cas</u> –

$2N = 3^q - 1$. On ne peut avoir à la fois $x_4 + y_4 \leqslant 3^{q-1}$ et $2z_4 \leqslant 3^{q-1}$, car cela entraînerait $x_4 = y_4 \leqslant \frac{3^{q-1}-1}{2}$ et $z_4 \leqslant \frac{3^{q-1}-1}{2}$, d'où $2N \leqslant 3^{q-1} - 3$.

on a donc $f(N) = q + 1$.

<u>2ème cas</u> –

$2N \leqslant 3^q - 3$ Prenons $x_4 = y_4 = E\left[\frac{N}{3}\right] \leqslant \frac{3^{q-1}-1}{2}$: on a $z_4 \leqslant \frac{3^{q-1}-1}{2}$

Le nombre de pesées ultérieures est dans tous les cas $\leqslant q-1$.

On a donc $f(N) = q$.

La solution du problème 2bis est donc

$$f\ (N) = E\ \log_3\ 2\ (N+1)$$

Solution du problème 2 ($N \geqslant 3$)

Soit $q > 1$ le plus petit entier tel que $2N-1 \leqslant 3^q$

On a

$$f(N) = f_1\ (0, 0, 0, N) = q \text{ ou } q+1$$

Deux cas se présentent:

1er cas -

$2N-1 = 3^q$. On ne peut avoir à la fois $x_4 + y_4 \leqslant 3^{q-1}$ et $2z_4-1 \leqslant 3^{q-1}$, car cela entraînerait $2N-1 = 4x_4 + 2z_4-1 \leqslant 2\,(3^{q-1} - 1) + 3^{q-1} \leqslant 3^q-2$

On a donc $f(N) = q+1$

2ème cas -

$2N < 3^q$. Prenons $x_4 = y_4 = E\left[\frac{N-1}{3}\right]$; on a $z_4-1 \leqslant E\left[\frac{N-1}{3}\right]$

Or on a

$$\frac{N-1}{3} = \frac{2N-2}{6} \leqslant \frac{3^q-3}{6} = \frac{3^{q-1}-1}{2}$$

d'où

$$x_4 + y_4 \leqslant 3^{q-1} - 1 \quad \text{et} \quad 2z_4 - 1 = 2\,(z_4-1) + 1 \leqslant (3^{q-1} - 1) + 1 = 3^{q-1}$$

Le nombre de pesées ultérieures est dans tous les cas $\leqslant q-1$.

On a donc $f(N) = q$

La solution du problème 2 est donc

$$\boxed{f(N) = E\left[\log_3 2N\right]}$$

Politique optimale

Du moment que l'on connait le nombre de pesées nécessaires $f(k_1,k_2,k_3,k_4)$ pour tous les états considérés, on a du même coup la politique optimale. En effet, il faut, chaque fois, choisir la pesée qui réalise le minimum dans le second terme du second membre de la relation (4).