M. BARBUT

Un exercice sur la génération des structures algébriques

Mathématiques et sciences humaines, tome 7 (1964), p. 11-27
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__7__11_0>

M. BARBUT

UN EXERCICE SUR LA GENERATION DES STRUCTURES ALGEBRIQUES

L'exercice proposé ici peut sembler un jeu gratuit. En fait, son seul intérêt est de donner un exemple de la richesse des procédés dont l'algèbre dispose pour construire des structures variées, et que l'on retrouve effectivement dans toute étude même sommaire d'une structure algèbrique.

A partir d'une certaine structure algebrique, on en fabrique d'autres par :

- passage au quotient au moyen de relations d'équivalence (par. I, II, III)
- produits directs (par. IV)
- construction de l'anneau des endomorphismes (par. V et VI)
- introduction de relations supplémentaires (par. VII).

Ici, j'ai choisi de prendre au départ un monoïde pour plusieurs raisons: d'abord, c'est une façon, qui complète celle adoptee dans l'article précédant celui-ci, d'attirer l'attention sur l'importance de cette structure en mathématiques; dans le même esprit, j'ai supposé certains éléments du monoïde étudié idempotents. En effet, dès qu'une opération est associative, des expressions telles que :

$$x^3 = (x^2)\,x = x\,(x^2),\ x^4,\ \text{etc...}$$

ont un sens. On peut alors faire deux grandes classes d'hypothèses : ou bien la répétition d'un même élément efface cet élément : $x^2 = 0$, et c'est le cas "involutif" traité dans l'article de Eytan et Guilbaud; ou bien la répétition ne créé pas d'élément nouveau : $x^2 = x$, c'est le cas idempotent.

L'autre raison qui m'a conduit à choisir de présenter cet exercice à propos d'un monoïde est que, cette structure étant moins familière à la plupart des étudiants que les structures numériques par exemple, le dépaysement qui en résultera leur permettra peut-être de mieux prendre conscience de ce qu'ils font constamment en algèbre. Une façon utile de compléter cet exercice serait par conséquent d'en reprendre les étapes principales à partir du groupe additif des entiers, ou de telle autre structure familière.

Note : Je remercie G.Th. Guilbaud et A. Revuz pour les suggestions qu'ils m'ont fournies à propos de cet exercice.

*

*   *

I – LE MONOIDE A DEUX GENERATEURS IDEMPOTENTS

Soient deux lettres a et b; on considère le monoïde* engendré par ces deux lettres, compte tenu des conditions:

$$aa = a^2 = a \qquad bb = b^2 = b$$

On constitue ainsi des <u>mots</u> tels que aba, babab, qui sont les éléments du monoïde; mais un mot tel que aababbaa se réduit, en raison des conditions imposées, à:

ababa

Ainsi, les éléments du monoïde étudié sont toutes les suites alternées formées avec deux signes (a et b ici), un même signe n'étant jamais répété deux fois de suite.

Si l'on classe les mots par longueurs (nombre de lettres qu'ils comportent) successives, on obtient le tableau:

Longueur	Mots	
1	a	b
2	ab	ba
3	aba	bab
4	abab	baba
5	ababa	babab
.	.	.
.	.	.
.	.	.

On remarque: pour chaque longueur, deux mots seulement, conjugués l'un de l'autre (remplacement $a \longleftrightarrow b$).

<u>Réalisation possible</u>: dans des tirages à pile ou face, on ne s'intéresse qu'aux changements d'état, et on oublie le nombre de coups passés dans un même état; une série telle que:

PPFFFPFPPF

sera résumée en:

P FP FP F

II – TABLE DE PYTHAGORE DU MONOIDE

L'opération entre les mots dont on vient de donner la liste est la juxtaposition; exemple:

$$(ababa)\ (aba) = ababa^2ba = abababa$$

C'est cette opération qui donne à l'ensemble de ces mots une structure de monoïde.

---

* Ou semi-groupe, parfois demi-groupe; angl., semi-group; all., halbgruppe; russe, système associatif, ou polou groupp (demi-groupe). On trouvera la définition générale d'un monoïde dans l'article de Eytan et Guilbaud.

Désignons par a(n) le mot de longueur n commençant par a, b(n) son conjugué (mot de longueur n commençant par b). Nous obtenons la table:

Second mot

		a(1)	b(1)	a(2)	b(2)	a(3)	b(3)	a(4)	b(4)	---
	a(1)	a(1)	a(2)	a(2)	a(3)	a(3)	a(4)	a(4)	a(5)	---
	b(1)	b(2)	b(1)	b(3)	b(2)	b(4)	b(3)	b(5)	b(4)	---
	a(2)	a(3)	a(2)	a(4)	a(3)	a(5)	a(4)	a(6)	a(5)	---
premier	b(2)	b(2)	b(3)	b(3)	b(4)	b(4)	b(5)	b(5)	b(6)	---
mot	a(3)	a(3)	a(4)	a(4)	a(5)	a(5)	a(6)	a(6)	a(7)	---
	b(3)	b(4)	b(3)	b(5)	b(4)	b(6)	---			
	a(4)	a(5)	a(4)	a(6)	a(5)	a(7)	---			
	b(4)	b(4)	b(5)	b(5)	b(6)	b(6)	---			
	.	.	.	.						
	.	.	.							
	.	.								

D'une façon générale, la règle arithmétique est:

	a (2p)	b (2p)	a (2p+1)	b (2p+1)
a (2n)	a (2(n+p))	a (2(n+p)-1)	a (2(n+p)+1)	a (2(n+p))
b (2n)	b (2(n+p)-1)	b (2(n+p))	b (2(n+p))	b (2(n+p)+1)
a (2n+1)	a (2(n+p))	a (2(n+p)+1)	a (2(n+p)+1)	a (2(n+p)+2)
b (2n+1)	b (2(n+p)+1)	b (2(n+p))	b (2(n+p)+2)	b (2(n+p)+1)

Cette règle est entièrement déterminée par la parité de la longueur de chaque mot composé, et par sa lettre initiale. Mais on aurait pu aussi caractériser les quatre classes de mots ainsi définies par la lettre initiale et la lettre finale, puisqu'un mot de forme a(2n) par exemple commence par a et finit par b.
De même:

a (2n+1)	est de forme	a ..... a
b (2n)	"	b ..... a
b (2n+1)	"	b ..... b

Désignons respectivement par AB, AA, BA, BB les quatre classes; la table de composition se réduit à:

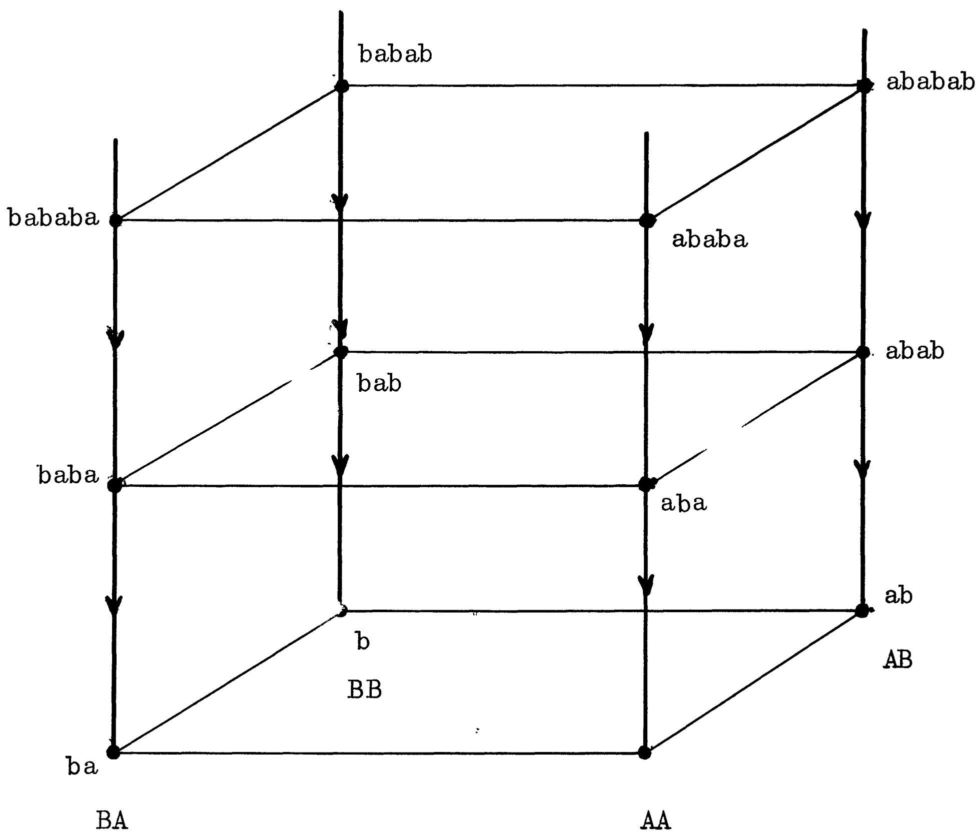
	AB	BA	AA	BB
AB	AB	AA	AA	AB
BA	BB	BA	BA	BB
AA	AB	AA	AA	AB
BB	BB	BA	BA	BB

S

On obtient un monoïde qui est le quotient du monoïde initial par la relation d'équivalence (entre mots): "avoir même lettre initiale et même lettre finale", qui peut encore s'énoncer: "avoir des longueurs de même parité et même lettre initiale".

S étant quotient du monoïde initial par une relation compatible avec (ou régulière par rapport à) la structure de celui-ci, lui est homomorphe, et est donc bien un monoïde.

On peut d'ailleurs schématiser la classification faite dans le monoïde initial et l'homomorphisme sur les classes par le diagramme suivant:



Remarque importante : le monoïde quotient S existe pour n'importe quel monoïde à deux générateurs, que ceux-ci soient idempotents ou non: en effet, la lettre initiale et la lettre finale d'un mot composé sont toujours respectivement la lettre initiale du premier mot entrant dans la composition, et la lettre finale du second mot.

Ce qui est spécifique du monoïde à deux générateurs idempotents, c'est la simplicité des classes obtenues, telles qu'elles sont figurées sur le diagramme.

III - ETUDE DU MONOIDE QUOTIENT S

On remarque que S n'est pas commutatif, mais il est idempotent:

$$(AA)^2 = AA \qquad (BA)^2 = BA \quad \text{etc....}$$

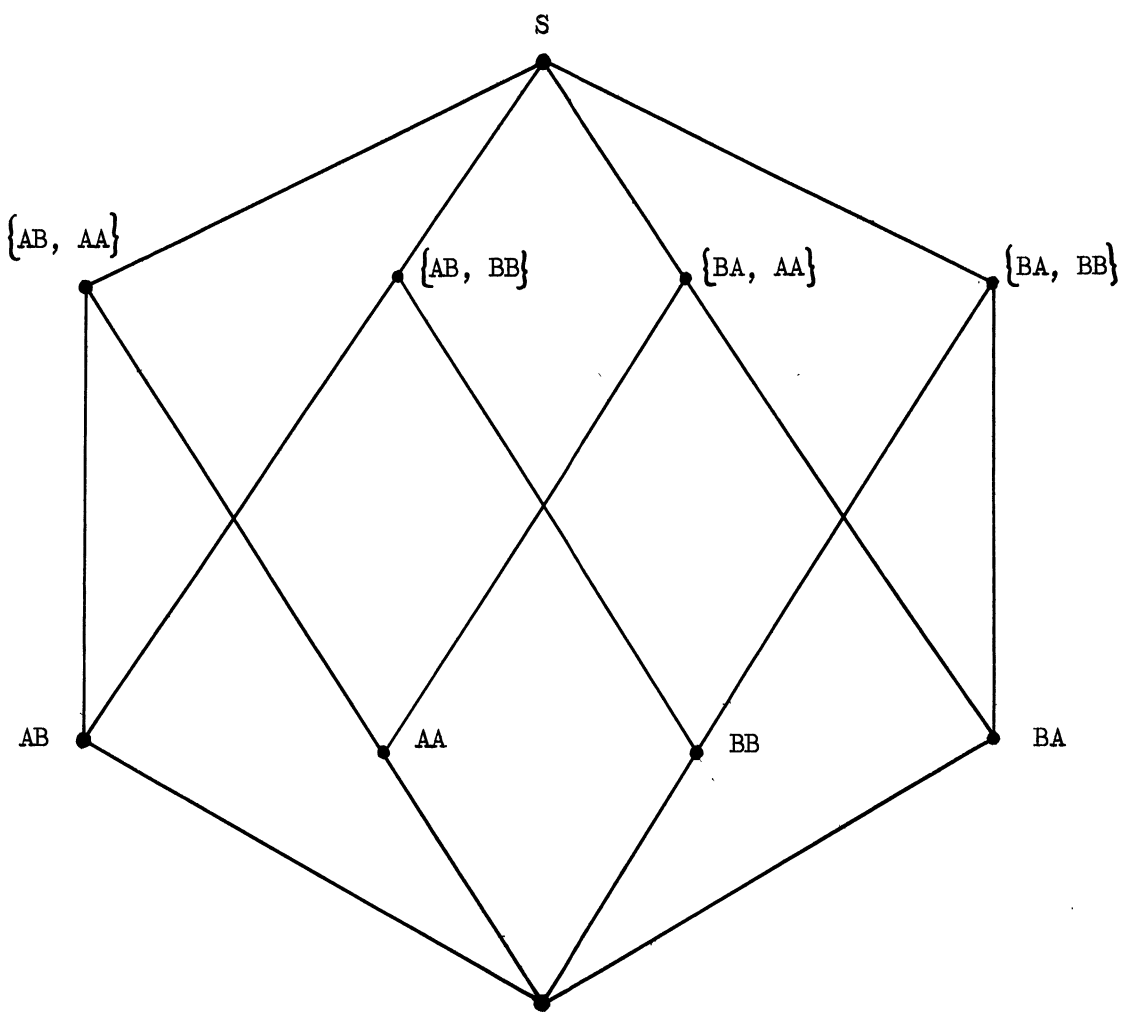
D'autre part:

$$\forall x \in S,\ (AB)\ x = (AA)\ x = \cancel{\{AB \text{ ou } AA\}}\ AB \text{ ou } AA$$

$$(BA)\ x = (BB)\ x = \cancel{\{BA \text{ ou } BB\}}\ BA \text{ ou } BB$$

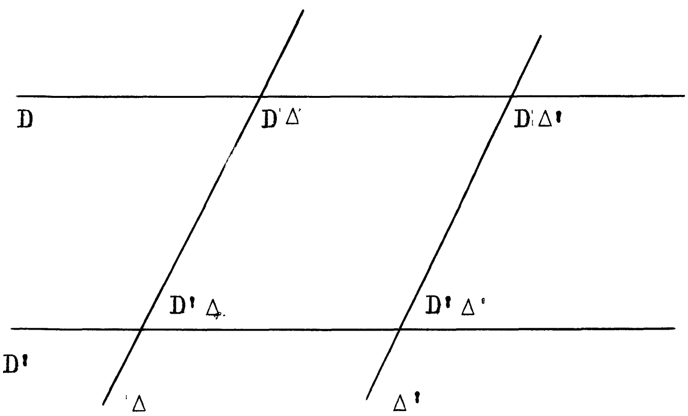
On dit que $\{AB, AA\}$ et $\{BA, BB\}$ sont des <u>parties absorbantes à gauche de S</u>; de même $\{AB, BB\}$ et $\{BA, AA\}$ sont des <u>parties absorbantes à droite</u>.

Il en résulte que ces quatre parties de S sont en particulier des <u>sous-monoïdes</u> de ce monoïde; comme autres sous-monoïdes propres (c'est-à-dire distincts de S), nous avons chacune des parties réduites à un seul élément (en raison de l'idempotence).

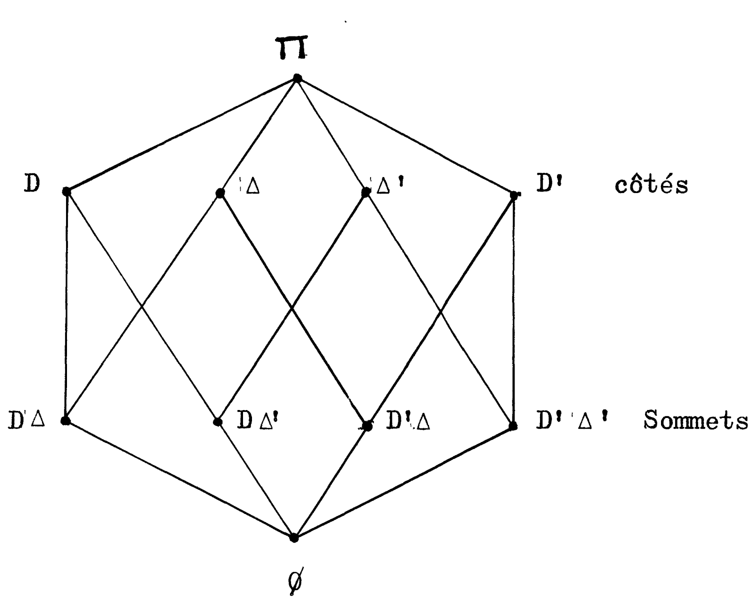


Si nous ordonnons S et ses sous-monoïdes par inclusion, nous obtenons le diagramme du <u>treillis des sous-monoïdes</u>; pour fermer le treillis, on a complété l'ensemble des sous-monoïdes par 0, qui peut s'interpréter soit comme la partie vide de S (partie qui n'est pas un sous-monoïde), soit comme un élément neutre e de S. Cet élément neutre ne joue aucune rôle; si on suppose son existence, S a 5 éléments, et e doit être adjoint à chacun de ses sous-monoïdes.

<u>Remarque</u> : L'architecture des sous-monoïdes de S est celle du parallélogramme en géométrie affine, ce qui permet de la mémoriser facilement. Soit en effet un parallélogramure Π, de côtés D, D', Δ, Δ' et de sommets DΔ, DΔ', D'Δ, D'Δ':



les inclusions sont représentées par le diagramme:



IV – PRODUITS DIRECTS

Reprenons la table de S, réordonnée

1er mot \ 2ème mot	AB	AA	BA	BB
AB	AB	AA	AA	AB
AA	AB	AA	AA	AB
BA	BA	BA	BA	BB
BB	BB	BA	BA	BB

On constate que les sous-monoïdes complémentaires et conjugués $\{AB, AA\}$ et $\{BA, BB\}$ sont <u>isomorphes</u> et déterminent dans S une algèbre de classes

	$\bar{a}$	$\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
$\bar{b}$	$\bar{b}$	$\bar{b}$

M

où:

$\bar{a} = \{AB, AA\}$ (mots commençant par a)

$\bar{b} = \{BA, BB\}$ (mots commençant par b)

M est le <u>quotient</u> : $S/_{\bar{a}} = S/_{\bar{b}}$, et on remarque que la règle de M: $\forall$ x, y, $xy = x$ est conjuguée de celle de $\{AB, AA\} = \bar{a}$: $\forall$ x, y, $xy = y$ (règles d'absorption à gauche et à droite respectivement).

Si S est partagé selon les classes

$\{AB, BB\} = \underline{b}$ (mots se terminant par b) $\{BA, AA\} = \underline{a}$ (mots se terminant par a)

qui forment des sous-monoïdes isomorphes (selon la règle de M: absorption à gauche), on obtient de même un monoïde quotient dont la règle est celle de l'absorption à droite.

Réciproquement, considérons deux systèmes à deux éléments:

1er \ 2ème	u'	v'
u'	u'	v'
v'	u'	v'

Absorbant à droite
N'

1er \ 2ème	u	v
u	u	u
v	v	v

Absorbant à gauche
N

Effectuons le produit direct $N' \times N$ de N' et N, c'est-à-dire l'ensemble produit cartésien de N' et N: $N' \times N = \{(x', x) : x' \in N', x \in N\}$, ou ensemble des couples d'éléments pris le premier dans N', le second dans N, muni de l'opération $(x', x)(y', y) = (x'y', xy)$, x' et y' étant composés selon la règle de N', x et y selon celle de N.

On a:

	u'	v'
u'	u'	v'
v'	u'	v'

X

	u	v
u	u	u
v	v	v

=

	(u', u)	(u', v)	(v', u)	(v', v)
(u', u)	(u', u)	(u', u)	(v', u)	(v', u)
(u', v)	(u', v)	(u', v)	(v', v)	(v', v)
(v', u)	(u', u)	(u', u)	(v', u)	(v', u)
(v', v)	(u', v)	(u', v)	(v', v)	(v', v)

Le second membre est S, aux notations près; en effectuant le produit direct dans l'ordre inverse, on aurait également obtenu S.

$$\boxed{N' \times N = S = N \times N'},$$

ou encore:

$$\boxed{\bar{a} \times M = S \quad \text{avec} \quad \bar{a} = S/_M}$$

Remarque importante: la procédure qui nous a servi pour reconstituer S comme produit direct de deux monoïdes plus simples est très générale, et s'emploie constamment en algèbre pour fabriquer des structures algébriques à partir de structure déjà connues. C'est ainsi que, si on sait additionner des nombres, on saura additionner des vecteurs à deux dimensions, c'est-à-dire des couples de nombres (chaque nombre du couple est l'une des coordonnées du vecteur) en posant:

$$(3, -2) + (3/2, 7) = (3 + 3/2, -2 + 7) = (9/2, 5)$$

on peut ensuite faire le produit direct de la structure obtenue par la structure initiale, etc...; ici, on obtiendra ainsi les vecteurs à 3, 4, etc... dimensions.

D'une façon générale, il est toujours recommandable, dès que les étudiants débutants sont en possession de deux structures algébriques, qui peuvent être distinctes: $(X, .)$, (Y, o), de leur en faire construire le produit direct: $(X \times Y, \Delta)$ où l'opération Δ sur les couples est définie par:

$$(x, y) \,\Delta\, (x', y') = (x.\,x', y \,o\, y')$$

$$x \in X, x' \in X; \quad y \in Y, \quad y' \in Y$$

$(X \times Y, \Delta)$ est une structure homomorphe à $(X, .)$ par la projection:

$$X \times Y \longrightarrow X$$
$$(x, y) \longmapsto x$$

et à Y par la projection:

$$X \times Y \longrightarrow Y$$
$$(x, y) \longmapsto y$$

V – LES ENDOMORPHISMES DE S

Abordons maintenant un autre procédé très riche de construction d'une structure algébrique à partir d'une structure donnée; celle de l'anneau des endomorphismes.

Les endomorphismes de S, ce sont les applications de S dans lui-même qui conservent sa structure en ce sens que, si End (S) désigne l'ensemble de ces applications:

$$f \in \mathrm{End}\ (S) \iff \Big(f : S \longrightarrow S \ \text{ et } \ \forall x, \forall y \in S,\ f(xy) = fx\ fy \Big)$$

Etudier les endomorphismes de S, c'est d'abord compléter l'étude de sa structure que nous a révélé le treillis de ses sous-monoïdes par la construction de toutes les façons possibles d'obtenir ces images de lui-même que sont précisément ses sous-monoïdes; comme ici le système S étudié est petit, faire la liste complète de tous ses endomorphismes (on en trouvera 16) n'est pas insurmontable.

D'autre part, faire la liste est insuffisant, car deux endomorphismes f et g de S étant trouvés, il est clair que le composé de f et g: gf (f suivi de g: $\forall x \in S$, gf (x) = g (fx))

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\,f"'] & & S \end{tikzcd}$$

est encore un endomorphisme:

$$gf\ (xy) = g\ \big[f\ (xy)\big] = g\ \big[fx\ fy\big] = gf\ (x)\ gf\ (y)$$

Il y a donc des relations entre endomorphismes, relations du type:

$$h = g\,f$$

dont on veut la liste; cette liste, elle est donné par la table des 16 endomorphismes selon la loi de composition "f suivi de g" qui munit End (S) (et, d'une façon générale, l'ensemble des endomorphismes d'une structure algébrique quelconque) d'une structure de monoïde, puisque cette loi est associative.

C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe; à partir de maintenant un changement de notations est commode pour désigner les éléments de S. Celles qui ont été utilisées jusqu'ici étaient parlantes pour révéler ce que nous avons vu de sa structure: les sous-monoïdes, les quotients, les produits directs; elles alourdiraient inutilement les écritures dans ce qui suit.

Nous posons:

$$AB = P \qquad BA = P'$$
$$AA = I \qquad BB = I'$$

1 – Cherchons d'abord les automorphismes (endomorphismes bijectifs) de S. Outre la transformation identique J, il y a évidemment parmi eux les permutations laissant invariants les sous-monoïdes de S.

$$\beta = \begin{pmatrix} P \longleftrightarrow I \\ P' \longleftrightarrow I' \end{pmatrix} \qquad \gamma = \begin{pmatrix} P \longleftrightarrow I' \\ P' \longleftrightarrow I \end{pmatrix}$$

Donc aussi:

$$\alpha = \beta\gamma = \gamma\beta = \begin{pmatrix} P \longleftrightarrow P' \\ I \longleftrightarrow I' \end{pmatrix}$$

$$(\alpha = (\beta \text{ suivi de } \gamma)\ ^{*}$$

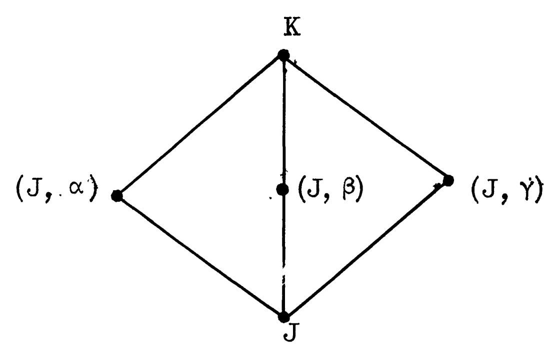
On s'assure qu'il n'y en a pas d'autre; par exemple, un contrôle rapide montre que:

$$(P \longleftrightarrow P') \Longrightarrow \begin{pmatrix} P \longleftrightarrow P' \\ I \longleftrightarrow I' \end{pmatrix}$$

ou que si un élément est invariant, les quatre le sont.

On a donc comme groupe** des automorphismes le groupe de Klein, dont sont figurés ici la table et le treillis de ses sous-groupes:

$$K = \begin{array}{c|cc:cc} & J & \alpha & \beta & \gamma \\ \hline J & J & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \alpha & J & \gamma & \beta \\ \hdashline \beta & \beta & \gamma & J & \alpha \\ \gamma & \gamma & \beta & \alpha & J \end{array}$$



Il est produit direct de deux sous-groupes cycliques d'ordre deux (voir l'article de Eytan et Guilbaud ci-dessus).

2 - Parmi les autres endomorphismes, il y a d'abord tous ceux qui appliquent S sur un seul élément:

$$p: S \longrightarrow P, \quad p': S \longrightarrow P', \quad i: S \longrightarrow I, \quad i': S \longrightarrow I'$$

qui constituent un système absorbant à gauche pour la composition, soit 1 :

---

*Attention : ici, la première permutation effectuée est notée à gauche dans l'écriture du produit.

** Les automorphismes d'une structure algébrique forment toujours un groupe par rapport à la composition car il y a un élément neutre, J, et chaque automorphisme a un inverse (qui ici est lui-même).

$1 =$

	p	p'	i	i'
p	p	p'	i	i'
p'	p	p'	i	i'
i	p	p'	i	i'
i'	p	p'	i	i'

Le treillis des sous -1, c'est-à-dire des sous-structures de 1, est d'ailleurs le simplexe S_4; pourquoi ?

3 - Nous avons enfin les endomorphismes appliquant S sur l'un de ses quatre sous -S. A chaque sous-S sont ainsi associés deux endomorphismes:

$$(m: S \longrightarrow (P,I)) = \begin{tikzcd} P \arrow[r, leftrightarrow] & I \\ P' \arrow[u] & I' \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (m': S \longrightarrow (P,I)) = \begin{tikzcd} P \arrow[r, leftrightarrow] & I \\ I' \arrow[u] & P' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

De même:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, leftrightarrow] & I' \\ P \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "n"] & I \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, leftrightarrow] & I' \\ I \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "n'"] & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, leftrightarrow] & I \\ P \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "u"] & I' \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P' \arrow[r, leftrightarrow] & I \\ I' \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "u'"] & P \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, leftrightarrow] & I' \\ P' \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "v"] & I \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, leftrightarrow] & I' \\ I \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "v'"] & P' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$M = \{m, m', n, n'\} \qquad \text{et} \qquad U = \{u, u', v, v'\}$$

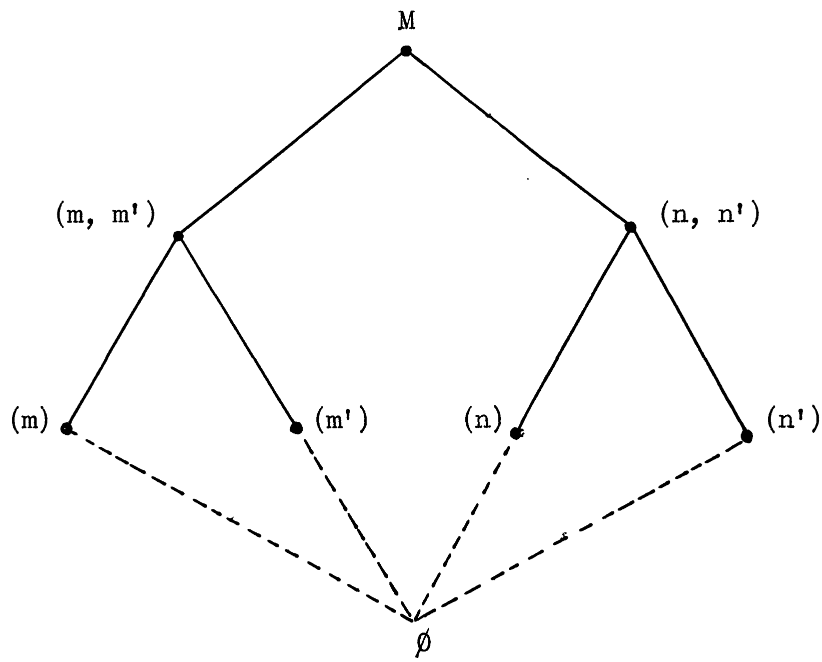
forment chacun un système clos pour la composition des endomorphismes, de tables:

$M =$

	m	m'	n	n'
m	m'	m	n'	n
m'	m	m'	n	n'
n	m'	m	n'	n
n'	m	m'	n	n'

U = la même table, aux notations près

Le treillis des sous-M (on reconnaît dans M des quotients de type absorbant à droite) est complété par $\emptyset$:



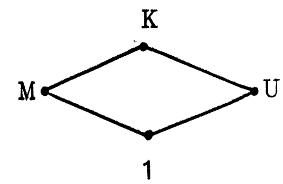
On peut enfin dresser la table complète de composition des 16 endomorphismes de S, qui présente bien des particularités intéressantes:

	J	α	β	γ	p	p'	i	i'	m	m'	n	n'	u	u'	v	v'
J	J	α	β	γ	p	p'	i	i'	m	m'	n	n'	u	u'	v	v'
α	α	J	γ	β	p	p'	i	i'	m'	m	n'	n	u'	u	v'	v
β	β	γ	J	α	p	p'	i	i'	m'	m	n'	n	u	u'	v	v'
γ	γ	β	α	J	p	p'	i	i'	m	m'	n	n'	u'	u	v'	v
p	p	p'	i	i'	p	p'	i	i'	i	p	p'	i'	p'	i	i'	p
p'	p'	p	i'	i	p	p'	i	i'	p	i	i'	p'	i	p'	p	i'
i	i	i'	p	p'	p	p'	i	i'	p	i	i'	p'	p'	i	i'	p
i'	i'	i	p'	p	p	p'	i	i'	i	p	p'	i'	i	p'	p	i'
m	m	n'	m'	n	p	p'	i	i'	m'	m	n'	n	p'	i	i'	p
m'	m'	n	m	n'	p	p'	i	i'	m	m'	n	n'	p'	i	i'	p
n	n	m'	n'	m	p	p'	i	i'	m'	m	n'	n	i	p'	p	i'
n'	n'	m	n	m'	p	p'	i	i'	m	m'	n	n'	i	p'	p	i'
u	u	v'	u'	v	p	p'	i	i'	p	i	i'	p'	u'	u	v'	v
u'	u'	v	u	v'	p	p'	i	i'	p	i	i'	p'	u	u'	v	v'
v	v	u'	v'	v	p	p'	i	i'	i	p	p'	i'	v'	v	v'	v
v'	v'	u	v	v'	p	p'	i	i'	i	p	p'	i'	v	v'	v	v'

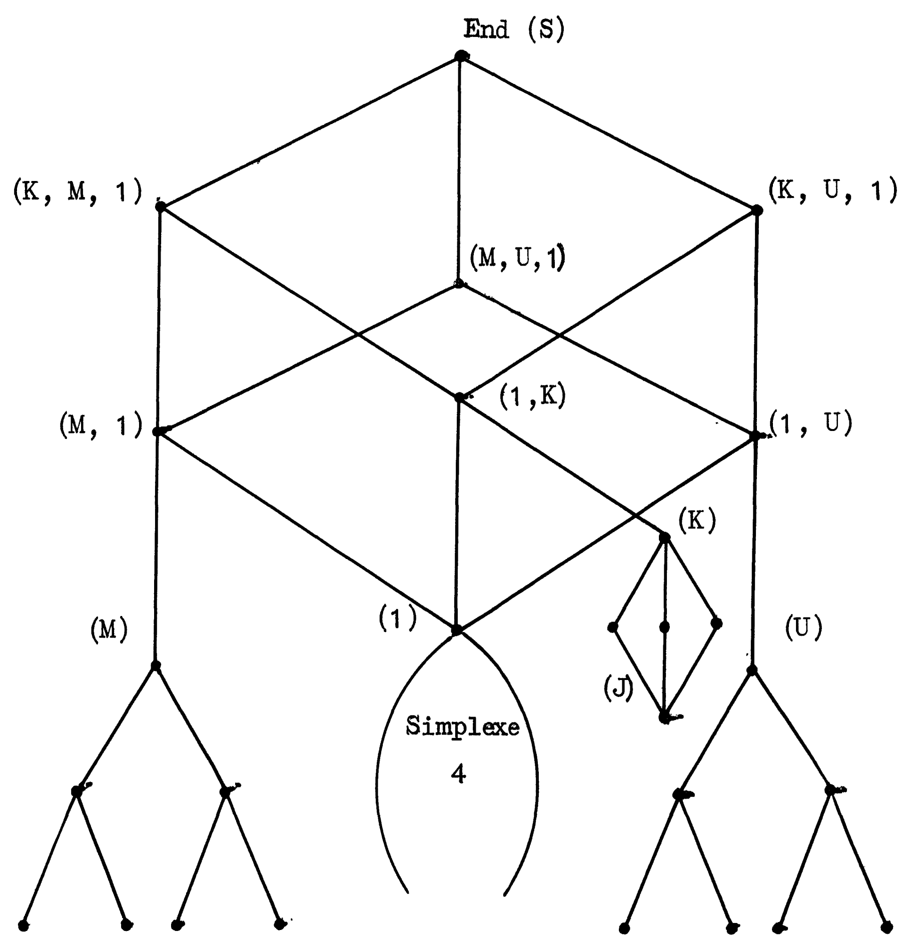
La plus remarquable de ces particularités est l'apparition d'un quotient:

	K	1	M	U
K	K	1	M	U
1	1	1	1	1
M	M	1	M	1
U	U	1	1	U

qui est le demi-treillis, figuré ci-contre, de maximum K, de minimum 1, par rapport à l'opération infimum (plus grand minorant commun): infimum (K, M) = M, infimum (M, U) = 1, etc....



D'où la structure complète du monoïde des endomorphismes de S, par rapport à la composition, figurée ici par le treillis des sous-monoïdes de End (S):



Ainsi, la seule étude du monoïde des endomorphismes de S nous a permis de voir en passant des structures aussi variées que: le groupe de Klein, les simplexes, les demi-treillis; la variété du paysage rencontré méritait que l'on fasse cette exploration.

VI – STRUCTURE HOMOMORPHE A S de l'ensemble DES ENDOMORPHISMES DE S

Dans l'ensemble des 16 endomorphismes de S, définissons l'opération $*$:

$$f * g = h \Longleftrightarrow x \in S,\ h(x) = f(x)\ g(x)$$

Le procédé employé pour définir $*$ est celui qui sert pour définir la somme de deux fonctions numériques, ou la somme de deux applications linéaires d'un espace vectoriel, etc...

Si $f, g \in$ End (S), $f * g \in$ End (S). En effet, la condition n. et s., sur un système binaire, pour qu'il en soit ainsi est qu'il satisfasse à la condition d'"échange des moyens":

$$\forall\ x, y, z, t:\ (xy)\ (zt) = (xz)\ (yt) \qquad \text{(le prouver).}$$

On a vu que S est un produit direct $N \times N'$ de deux systèmes "absorbants". Ceux-ci satisfont évidemment à la condition d'échange des moyens. Donc S aussi (pourquoi ?).

Par rapport à l'opération $*$, K, 1, M, U sont fermés, et sont munis d'une structure isomorphe à S.

1er \ 2eme	J	γ	α	β
J	J	J	β	β
γ	γ	γ	α	α
α	α	α	α	α
β	J	J	β	β

K, $*$

	m	m'	n	n'
m	m	m'	m	m'
m'	m	m'	m	m'
n	n	n'	n	n'
n'	n	n'	n	n'

M, $*$

	u	u'	v	v'
u	u	u	v	v
u'	u'	u'	v'	v'
v	u	u	v	v
v'	u'	u'	v'	v'

U, $*$

Pour 1, c'est évident: $(p * 1)\ (x) = P\ I,\ \forall\ x \in S$ etc...

Pour K, cela tient à ce que les projections du type

$$K \longrightarrow S\ :\ f \longrightarrow f\ (P) \qquad (f \in K)$$

sont bijectives entre K et S (Pourquoi ?)

Enfin, la table de End (S) par rapport à $*$ donne, réduite à son quotient:

	1	M	K	U
1	1	M	M	1
M	1	M	M	1
K	U	K	K	U
U	U	K	K	U

C'est, aux notations près, la table de S; ce qui signifie qu'avec la structure induite par $*$ End (S) est homomorphe à S.

Finalement, par rapport aux deux opérations de composition d'une part (V), $*$ d'autre part, End (S) forme un "anneau",* puisque l'on a la distributivité:

$$f\ (g * h) \; = \; (f g) * (f h)$$

"anneau" que l'on peut étudier sur le système quotient (1, K, M, U). En particulier, K, M, U, 1 sont des sous-anneaux.

Remarques:

1) Au terme de la construction présente, la structure, S, dont nous étions partis, apparaît comme plongée dans une structure beaucoup plus riche, l'anneau de ses endomorphismes; c'est cette dernière structure algébrique qui est le vrai sujet d'intérêt, car elle situe S dans une structure dont les possibilités de calcul sont bien plus puissantes. Faire la même construction à partir du groupe additif des entiers, par exemple, conduit à l'anneau Z de ces mêmes entiers par rapport à l'addition et à la multiplication.

2) C'est en raison de la généralité et de l'importance en mathématiques de cette construction, qui conduit toujours à un anneau, que cette dernière structure tient tant de place dans les manuels d'algèbre.

Exercices supplémentaires:

1) Construire la table complète de End(S) par rapport à $*$.

2) Rechercher les ideaux à gauche et à droite de l'anneau End(S); une partie J de End(S) est idéal à gauche (resp. à droite) si elle est fermée par rapport à $*$ et absorbante à gauche (resp. à droite) par rapport à la composition.

3) Construire le treillis de End(S) par rapport à $*$.

VII - **MONOIDE IDEMPOTENT A DEUX GENERATEURS**

On pourrait recommencer à partir de l'anneau End(S) la construction précédente: ses endomorphismes, etc... Cela aurait peu d'intérêt.

Revenons plutôt au monoïde initial, et imposons-lui maintenant outre les conditions:

$$a^2 = a \qquad\qquad b^2 = b$$

celle de satisfaire lui-même à la règle d'"échange des moyens".

$$\forall\ x, y, z, t : \;(x\,y)\,(z\,t) \;=\; (x\,z)\,(y\,t)$$

Ce que nous faisons ici, c'est, dans un cas particulier, un exemple d'un autre procédé pour engendrer de nouvelles structures à partir d'une structure donnée: introduire des liaisons (ou axiomes) supplémentaires.

* Le mot anneau est généralement réservé en algèbre aux structures munies de deux opérations, dont la première est une opération de groupe abélien (ici, c'est $*$ qui joue ce rôle) et la seconde associative et distributive par rapport à la première (ici, la composition). Ici, nous avons pris le mot dans un sens plus large, puisque $*$ ne munit pas End (S) d'une structure de groupe.

Ici, on obtient successivement les six mots distincts:

$$a \ , \ b \ , \ ab \ , \ ba \ , \ aba \ , \ bab$$

$$a\,b\,a\,b = a\,a\,b\,b = a^2\,b^2 = a\,b$$

$$b\,a\,b\,a = b^2\,a^2 = b\,a$$

$$(a\,b)\,(a\,b\,a) = a\,b^2\,a^2 = a\,b\,a = (a\,b\,a)\,(a\,b\,a)$$

Etc...

Pas de nouveau mot, et chaque mot est idempotent. On a donc un monoïde indempotent à deux générateurs:

	a	b	ab	ba	aba	bab
a	a	ab	ab	aba	aba	ab
b	ba	b	bab	ba	ba	bab
ab	aba	ab	ab	aba	aba	ab
ba	ba	bab	bab	ba	ba	ba
aba	aba	ab	ab	aba	aba	ab
bab	ba	bab	bab	ba	ba	bab

On pourra rechercher, à titre d'exercice, le treillis de ses 20 (21 si l'on complète par $\emptyset$) sous-monoïdes. On remarquera que parmi ceux-ci se trouve le monoïde $\{ab, ba, aba, bab\}$ qui est isomorphe à S précédemment étudié. Cela provient de ce que la condition d'"échange des moyens" entraîne que tout mot de forme P et de longueur $\geqslant 2$ dans le monoïde initial devient ab, et de même:

$$P' \longrightarrow ba, \quad I \longrightarrow aba, \quad I' \longrightarrow bab.$$

<u>Exercices supplémentaires:</u>

1) Montrer que pour un monoïde à deux générateurs, l'idempotence entraîne la condition d'échange des moyens.

2) Prouver que si un système binaire possède un <u>élément neutre</u>, et s'il satisfait à la condition d'échange des moyens, il est commutatif et associatif.

3) Trouver des systèmes binaires ne satisfaisant pas à cette condition.

4) Dans le monoïde, idempotent à 2 générateurs, on pose:

$$x \,'\!\geqslant y \Longleftrightarrow x\,y = x$$

$'\!\geqslant$ est un préordre (réflexif, transitif); on a:

$$\forall x, \forall y, \ x\,y \,'\!\geqslant y \qquad y\,x \,'\!\geqslant x \ ; \ \text{et :}$$

$$(z \,'\!\geqslant x \text{ et } z \,'\!\geqslant y) \Longleftrightarrow (z \,'\!\geqslant x\,y \text{ et } z \,'\!\geqslant y\,x)$$

Construire le graphique du préordre $'\geqslant$, et étudier de même le préordre conjugué $'\dot{\geqslant}$:

$$x \mathrel{'\dot{\geqslant}} y \Longleftrightarrow y\,x = x$$

5) A quoi le monoïde idempotent à deux générateurs a et b se réduit-il si l'on suppose en outre:

$$a\,b = b\,a\ ?$$

6) Considérer le treillis des sous-monoïdes de S (premier diagramme du paragraphe III) et construire toutes les structures algébriques ayant un nombre minimum d'éléments admettant ce treillis comme treillis de leurs sous-structures. On observera en particulier qu'elles ne sont pas toutes isomorphes entre elles.