

H. ROUANET

Les modèles stochastiques de l'apprentissage

Mathématiques et sciences humaines, tome 6 (1964), p. 3-22

http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__6__3_0

© Centre d'analyse et de mathématiques sociales de l'EHESS, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mathématiques et sciences humaines » (<http://msh.revues.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

H . ROUANET

LES MODELES STOCHASTIQUES DE L'APPRENTISSAGE

(La première partie de ce texte a été publiée dans le N° 5, Janvier 1964)

III - Particularisations du modèle général

Nous allons maintenant particulariser le modèle général précédent, de manière à obtenir des modèles ayant été l'objet d'investigations nombreuses, à la fois théoriques et expérimentales. Nous avons déjà fait allusion, dans la première partie, au modèle simple de Bower (Bower, 1961). De nombreux modèles, plus ou moins complexes, ont été mis au point par Bush, Mosteller, Luce etc... et il n'est pas question d'en faire ici une revue complète. Nous nous contenterons de présenter sommairement, à titre d'exemples, deux modèles d'Estes et de Suppes, et deux modèles de Falmagne. (Pour de plus amples détails sur ces modèles, on se reportera aux publications de ces auteurs signalées dans la bibliographie). Dans la quatrième partie, nous présenterons des applications de ces modèles à des données expérimentales.

Nous allons maintenant envisager deux classes de modèles obtenues en particularisant le modèle général, présenté dans la deuxième partie.

Dans la première classe de modèles, nous supposons le stimulus constant. Il suffit alors de se donner les espaces

$$\begin{aligned} & (A, \alpha) \\ & (E, \xi) \\ & (Z, \zeta) \end{aligned}$$

et les probabilités de passage $P_a(z, .)$ de Z dans A

$$P_z(z, a, e, .) \text{ de } Z \times A \times E \text{ dans } Z$$

$$P_e(a, .) \text{ de } A \text{ dans } E.$$

Le processus de terme $X_n = (z_n, a_n, e_n)$ est markovien ainsi que les processus de terme (z_n, a_n) , (z_n, e_n) et (z_n) .

Dans la deuxième classe de modèles, nous supposerons le renforcement constant. Il suffit alors de se donner les espaces

$$\begin{aligned} & (S, \mathcal{J}) \\ & (A, \alpha) \\ & (Z, \zeta) \end{aligned}$$

et les probabilités de passage

$$P_a(z, s, .) \text{ de } Z \times S \text{ dans } A$$

$$P_z(z, s, a, .) \text{ de } Z \times S \times A \text{ dans } Z$$

$$P_s(s, a, .) \text{ de } S \times A \text{ dans } S$$

ce processus de terme $x_n = (z_n, s_n, a_n)$ est markovien ainsi que le processus de terme (z_n, s_n) .

A - MODÈLES À STIMULUS CONSTANT : DEUX MODÈLES D'ESTES ET SUPPES

Les modèles à stimulus constant sont les plus nombreux à avoir été étudiés et il en existe de nombreuses variétés. Reprenons le modèle général.

Si l'application $z \rightarrow p_a(z, \cdot)$ est injective, on peut identifier Z avec une partie de l'ensemble $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$ des mesures de probabilité sur (A, \mathcal{A}) . Cet ensemble est un ensemble très "vaste". Dans certaines classes de modèles, on se contente de prendre pour Z une partie très restreinte de $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$. Dans d'autres classes de modèles où on prend $Z = \mathcal{M}(A, \mathcal{A})$, on fait des hypothèses très simplificatrices sur les conditions (R_i) , en particulier sur (R_2) .

Une autre restriction concerne les espaces observables (A, \mathcal{A}) et (E, \mathcal{E}) . Dans bien des cas il est possible d'identifier ces deux espaces. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit où nous supposons

$$(A, \mathcal{A}) = (E, \mathcal{E})$$

Ce cas correspond à la situation expérimentale dite "de prédiction" à laquelle nous nous limiterons dans la suite de cette section. A chaque essai, le sujet doit prédire quel événement, élément d'un ensemble E bien défini d'événements, va se produire; puis l'expérimentateur indique au sujet quel événement de cet ensemble E se produit.

Pratiquement, on fait des hypothèses encore plus restrictives et les deux seuls cas qui aient été bien étudiés sont les suivants :

- a) A (ou E) est un ensemble fini (on a alors $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$).
- b) A (ou E) est la droite réelle \mathbb{R} (\mathcal{A} la algèbre des boréliens de \mathbb{R}).

Pour ces deux cas, Estes et Suppes ont développé plusieurs modèles, les deux principaux étant les suivants :

- Le modèle linéaire (cf. Estes et Suppes, a)).
- Le modèle "à un élément" (cas particulier des modèles d'"Echantillonnage du stimulus" - cf. Estes et Suppes b)).

Nous présenterons ces deux modèles, dans le cas où A (et E) ne comportent que deux éléments a, a' (l'extension au cas fini général est immédiate) en particulier les conditions (R_i) .

Le modèle linéaire d'Estes-Suppes, pour $A = E = \{a, a'\}$

On prend $Z = [0, 1]$ (Si à chaque probabilité α sur (A, \mathcal{A}) on associe l'élément $z = \alpha(\{1\})$ de $[0, 1]$, on définit une application biunivoque de $\mathcal{M}(A, \mathcal{A})$ sur $[0, 1]$ au nom de laquelle on peut identifier ces deux ensembles).

(R_0) $z_0 = p_0$ où p_0 est un paramètre tel que $0 \leq p_0 \leq 1$ (c'est-à-dire: on se donne un état initial).

(R_1) $P[a_n = a | z_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}] = z_n$

(R'_2) $z_{n+1} = f(z_n, e_n)$ avec $f(z, e) = (1 - \theta)z + \theta 1_{\{a\}}(e)$

où θ est un paramètre tel que $0 < \theta \leq 1$.

(R'_2) exprime que l'état du sujet à l'essai $n + 1$ est déterminé par l'état du

sujet à l'essai n et le renforcement à l'essai n . Il est facile de voir que (R'_2) revient, dans la formulation générale, à prendre

$$P_Z(z; a, e, \Delta) = 1_{\Delta} [f(z, e)]$$

Le modèle à un élément d'Estes-Suppes, pour $A = E = \{a, a'\}$

On prend $Z = \{z, z'\}$

$$(R_0) P(z_0 = z) = p_0 \text{ (probabilité sur les états initiaux)}$$

$$(0 \leq p_0 < 1)$$

$$(R_1) P(a_n = a | z_n, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_1(z_n, a)$$

$$P_1(z, a) = \beta$$

$$P_1(z', a) = \beta'$$

où β et β' sont deux paramètres, $0 \leq \beta, \beta' \leq 1$ (le plus souvent, on prend $\beta=1$ $\beta'=0$)

$$(R_2) P(z_{n+1} = z | z_n, a_n, e_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_2(z_n, e_n, z)$$

avec $P_2(z_n, e_n, z) = (1-c) 1_{\{z\}}(z_n) + c 1_{\{a\}}(e_n)$ où c est un paramètre tel que $0 < c \leq 1$.

Renforcement indépendant

Lorsqu'on se donne une règle de renforcement, les deux modèles précédents conduisent, pour des valeurs données des paramètres, à des prédictions théoriques obtenues à partir de l'étude des processus (a_n, e_n) et (a'_n) . Nous illustrerons les procédés utilisés, pour le modèle linéaire, lorsque le renforcement est indépendant.

Dans le cas où $A = E = \{a, a'\}$, le renforcement indépendant est défini par la donnée d'un paramètre π , $0 \leq \pi \leq 1$ choisi par l'expérimentateur et tel que

$$(R_3) P(e_n = a | z_n, a_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \pi$$

Modèle linéaire, pour $A = E = \{a, a'\}$ et renforcement indépendant

Puisque z_n est une variable aléatoire, à valeur dans $[0, 1]$, on peut définir ses moments, le moment d'ordre U étant défini par :

$$E(z_n^U) = \int z_n^U P^{(z)} dP^{(z)} = \int z_n^U dP$$

Les axiomes du modèle permettent d'obtenir des équations de récurrence sur les moments. Indiquons comment on obtient l'équation de récurrence pour le premier moment $E(z_n)$.

$$E(z_{n+1} | z_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \pi [(1-\theta)z_n + \theta] + (1-\pi)(1-\theta)z_n$$

$$= (1-\theta)z_n + \theta\pi$$

On en déduit

$$E(z_{n+1}) = (1-\theta) E(z_n) + \theta \pi$$

Asymptotiquement

$$E(z_n) \rightarrow \pi$$

On obtiendrait de façon analogue une équation de récurrence pour le moment d'ordre 2 $E(z_n^2)$, etc...

Asymptotiquement,

$$E(z_n^2) \rightarrow \pi^2 + \frac{\theta}{2-\theta} \pi(1-\pi)$$

Les équations sur les moments de z_n une fois connues, on en dérive les prédictions théoriques concernant les processus (a_n, e_n) et (a_n) . Tout d'abord, on a la probabilité moyenne de la réponse a à l'essai n .

$$P(a_n = a) = \int_{\Omega} P(a_n = a | z_n) dP = \int_{\Omega} z_n dP = E(z_n)$$

On a donc l'équation de récurrence :

$$(1) \quad P(a_{n+1} = a) = (1-\theta) P(a_n = a) + \theta \pi$$

et asymptotiquement

$$(1a) \quad P(a_n = a) \rightarrow \pi$$

On a ensuite toutes les probabilités séquentielles, c'est-à-dire toutes les probabilités de la forme

$$\begin{aligned} &P(a_n = a | e_n) \\ &P(a_{n+1} = a | e_n, a_n) \\ &P(a_{n+1} = a | e_n, a_n, e_{n-1}) \\ &P(a_{n+1} = a | e_n, a_n, e_{n-1}, a_{n-1}) \text{ etc...} \end{aligned}$$

(noter que ces probabilités sont différentes, car le processus (a_n, e_n) n'est pas markovien).

Pratiquement, on s'intéresse surtout aux probabilités du type $P(a_{n+1} | e_n)$ et $P(a_{n+1} | e_n, a_n)$. On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned} P(a_{n+1} = a | e_n = a) &= (1-\theta) E(z_n) + \theta \\ P(a_{n+1} = a | e_n = a') &= (1-\theta) E(z_n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(2) \quad \begin{cases} P(a_{n+1} = a | e_n = a) = (1-\theta) P(a_n = a) + \theta \\ P(a_{n+1} = a | e_n = a') = (1-\theta) P(a_n = a) \end{cases}$$

Asymptotiquement,

$$(2a) \quad \begin{aligned} P(a_{n+1} = a \mid e_n = a) &\longrightarrow (1-\theta) \pi + \theta \\ P(a_{n+1} = a \mid e_n = a') &\longrightarrow (1-\theta) \pi \end{aligned}$$

Pour les probabilités du type $P(a_{n+1} \mid a_n, e_n)$, la connaissance du 2ème moment $E(z_n^2)$ est nécessaire. Indiquons comment on obtient $P(a_{n+1}=a \mid e_n=a, a_n=a)$. On commence par évaluer la probabilité composée :

$$\begin{aligned} P(a_{n+1} = a, e_n = a, a_n = a) &= \int_{\Omega} P(a_{n+1} = a \mid e_n = a, a_n = a, z_n) \\ &\quad P(e_n = a) P(a_n = a \mid z_n) dP \\ &= \int_{\Omega} [(1-\theta) z_n + \theta] \pi z_n dP \\ &= \pi [(1-\theta) E(z_n^2) + \theta E(z_n)] \\ P[e_n=a, a_n=a] &= P(e_n=a \mid a_n=a) P(a_n=a) \\ &= \pi E(z_n), \end{aligned}$$

on a finalement :

$$P(a_{n+1} = a \mid e_n = a, a_n = a) = (1-\theta) \frac{E(z_n^2)}{E(z_n)} + \theta$$

Modèle à un élément, pour $A = \{a, a'\}$ et renforcement indépendant

Nous prendrons la formulation du modèle pour laquelle $\beta = 1, \beta' = 0$.

La démarche est analogue et nous nous contenterons d'énoncer les résultats correspondant à ceux déjà donnés pour le modèle linéaire. On obtient facilement l'équation de récurrence pour les états.

$$P(z_{n+1} = z) = (1-c) P(z_n = z) + c \pi$$

c'est-à-dire :

$$(1') \quad P(a_{n+1} = a) = (1-c) P(a_n = a) + c \pi$$

analogue à (1).

Asymptotiquement

$$(1a') \quad P(a_n = a) \longrightarrow \pi$$

Pour les probabilités séquentielles on peut démontrer les formules suivantes:

$$(2') \quad \begin{cases} P(a_{n+1} = a \mid e_n = a) = (1-c) P(a_n = a) + c \\ P(a_{n+1} = a \mid e_n = a') = (1-c) P(a_n = a) \end{cases}$$

et asymptotiquement

$$(2a') \quad \begin{cases} P(a_{n+1} = a \mid e_n = a) \rightarrow (1-c)\pi + c \\ P(a_{n+1} = a \mid e_n = a') \rightarrow (1-c)\pi \end{cases}$$

Enfin nous donnerons l'analogue de (3)

$$(3') \quad P(a_{n+1} = a \mid e_n = a, a_n = a) = 1$$

La comparaison des résultats fournis par le modèle linéaire et le modèle à un élément appelle les commentaires suivants :

a) Si on identifie les paramètres θ et c des deux modèles, les deux modèles conduisent à des prédictions identiques en ce qui concerne les probabilités :

$$\begin{aligned} P(a_n = a) \\ P(a_n = a \mid e_n = a) \end{aligned}$$

Ils conduisent à des prédictions divergentes en ce qui concerne les probabilités :

$$P(a_{n+1} = a \mid e_n = a, a_n = a) \text{ etc..}$$

Ce résultat est aisément généralisable. On peut montrer que les probabilités séquentielles ne faisant intervenir que les renforcements antérieurs sont les mêmes dans les deux modèles, alors que les probabilités séquentielles faisant intervenir des réponses antérieures diffèrent dans les deux modèles.

b) Le résultat asymptotique, commun aux deux modèles,

$$P(a_n = a) \rightarrow \pi$$

revêt une importance particulière, car il s'agit d'une prédiction qui ne met en jeu aucune estimation de paramètre, et d'autre part qui est susceptible d'une interprétation très simple. Ce résultat exprime en effet que la probabilité d'une réponse tend à s'ajuster à la fréquence du renforcement correspondant. C'est la loi de l'ajustement déjà signalée dans la première partie.

Extension au cas d'un ensemble de réponses continu ($A = E = R$)

Les deux modèles - linéaire et à un élément - ont été étendus par P. Suppes (1959) au cas où $A = E = R$ où R désigne la droite réelle. Nous exposons brièvement les axiomes de Suppes et renvoyons pour les détails aux articles de Suppes cités en bibliographie.

Le Modèle linéaire de Suppes, pour $A = E = R$

On prend pour Z l'ensemble des fonctions de répartition sur R (isomorphe à l'ensemble des mesures de probabilité sur R). On a alors :

$$(R_0) \quad Z_0 = P_0 \quad (\text{où } P_0 \text{ est une fonction de répartition, c'est-à-dire on se donne un état initial}).$$

$$(R_1) \quad P[a_n < a \mid Z_n, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}] = Z_n(a) \quad \forall a \in R.$$

$$(R'_2) \quad Z_{n+1}(a) = (1-\theta) Z_n(a) + \theta K(a - e_n)$$

où K est une fonction de répartition, telle que

$$\int_{\mathbb{R}} u \, dK(u) = 0$$

Le Modèle à un élément de Suppes, pour $A = E = \mathbb{R}$

On prend

$$Z = \mathbb{R}$$

$$(R_0) \quad P(z_0 < z) = P_0(z)$$

(où P_0 est une fonction de répartition).

$$(R_1) \quad P(a_n < a | z_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = K(a - z_n)$$

où K est une fonction de répartition telle que $\int_{\mathbb{R}} u \, dK(u) = 0$

$$(R_2) \quad P(z_{n+1} < z' | z_n, a_n, e_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \\ = (1-c) H(z' - z_n) + c H(z' - e_n)$$

où H est la fonction échelon-unité

$$H(\alpha) = 0 \quad \text{si } \alpha \in [-\alpha, 0]$$

$$H(\alpha) = 1 \quad \text{si } \alpha \in [0, +\alpha]$$

On voit que les modèles continus de Suppes sont la généralisation immédiate des modèles exposés précédemment. La seule complication concerne la fonction de répartition K appelée "répartition d'étallement" (smearing distribution); intuitivement, elle exprime que l'effet du renforcement e_n est non pas concentré au point e_n mais s'étale sur les points voisins. K est une distribution hypothétique; donc en principe le modèle comporte autant de paramètres qu'il faut de paramètres pour définir une distribution*. Pratiquement, comme nous le verrons, un paramètre (variance) est suffisant pour les applications.

B. - MODÈLES À RENFORCEMENT CONSTANT - DEUX MODÈLES DE FALMAGNE

Les modèles à renforcement constant ont été beaucoup moins utilisés que les précédents. Nous décrirons rapidement deux modèles de FALMAGNE (1962, 1964) conçus pour la situation suivante, dite de temps de réaction de choix. A chaque essai, on présente au sujet un stimulus pris parmi k stimuli; à chaque stimulus correspond une clef, le sujet doit à la présentation d'un stimulus, appuyer aussi vite que possible sur la clef correspondante. On note le temps mis par le sujet pour répondre (temps de réaction).

Nous appellerons S l'ensemble des stimuli, comme dans le modèle général. L'ensemble A des réponses (temps de réaction) peut être identifié avec \mathbb{R}^+ , ensemble des nombres positifs. Dans les deux modèles de FALMAGNE, on postule deux distributions

* En tenant compte naturellement de la contrainte $\int_{\mathbb{R}} u \, dk(u) = 0$.

sur \mathbb{R}^+ : H et K. L'espérance de H est supérieure à celle de K. Intuitivement, H est une distribution de temps "longs", K est une distribution de temps "courts".

Le modèle "linéaire" de FALMAGNE

On prend $Z = [0, 1]^S$ où $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$

(A l'essai n , $z_n = (z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,k})$ où $0 \leq z_{n,i} \leq 1$)

(R₀) $z_0 = P_0$ où $P_0 = (p_{0,1}, p_{0,2}, \dots, p_{0,k})$ avec $0 \leq p_{0,i} \leq 1$

(R₁) $P(a_n \in \Gamma | z_n, s_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = (1 - z_{n,s_n}) H(r) + z_{n,s_n} K(r)$

où z_{n,s_n} est la s_n ième composante de z_n .

$$(R_2) \begin{cases} z_{n+1, s_n} = (1-\theta) z_{n, s_n} + \theta \\ z_{n+1, s} = (1-\theta') z_{n, s} \end{cases} \quad \text{pour } s \neq s_n$$

Le modèle "à un élément" de FALMAGNE

On prend $Z = \{0, 1\}^S$

(A l'essai n , $z_n = (z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,k})$ avec $z_{n,i} = 0$ ou 1)

(R₀) $P(z = z) = q_0$ où q_0 est une probabilité sur (Z, z)

(R₁) $P(a_n \in \Gamma | z_n, s_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \begin{cases} H(r) & \text{si } z_{n, s_n} = 0 \\ K(r) & \text{si } z_{n, s_n} = 1 \end{cases}$

(R₂) $P(z_{n+1, s_n} = 1 | z_n, s_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P_2(z_{n, s_n})$

$$\text{avec } P_2(z_{n, s_n}) = (1-c) 1\{1\}(z_{n, s_n}) + c$$

$P(z_{n+1, s} = 1 | z_n, s_n; X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = P'_2(z_{n, s})$ pour $s \neq s_n$

$$\text{avec } P'_2(z_{n, s}) = (1-c') 1\{1\}(z_{n, s})$$

On note les analogies entre chacun des deux modèles d'Estes-Suppes et chacun des deux modèles de Falmagne, c'est pourquoi nous avons utilisé pour ceux-ci des dénominations identiques.

Lorsqu'on se donne une règle de présentation des stimuli, les deux modèles précédents conduisent, pour des valeurs données des paramètres, à des prédictions théoriques. Nous calculerons quelques-unes de ces prédictions dans le cas où les stimuli sont présentés de façon indépendante, c'est-à-dire où l'expérimentateur se donne k probabilités $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ avec $\sum \pi_i = 1$ telles que :

$$P(s_n = i | X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) = \pi_i \quad \forall n, \forall i$$

Pour obtenir les prédictions théoriques correspondant aux modèles précédents, on raisonnera comme nous l'avons fait pour les modèles d'Estes-Suppes. Nous indiquerons simplement quelques résultats, communs aux deux modèles (pour le modèle à un élément, lire $\left\{ \begin{smallmatrix} c \\ \theta \end{smallmatrix} \right.$ au lieu de $\left\{ \begin{smallmatrix} \theta \\ \theta \end{smallmatrix} \right.$)

- Distribution asymptotique moyenne des temps de réaction lorsque le signal i est présenté :

$$P_i = \frac{(1-\pi_i) \theta' H + \pi_i \theta K}{(1-\pi_i) \theta' + \pi_i \theta}$$

- Distribution asymptotique conditionnelle $P_{i.l}$ des temps de réaction après l répétitions du stimulus i , c'est-à-dire lorsque le stimulus i est présenté après avoir été présenté précédemment lors de l essais consécutifs :

$$P_{i.l} = (1-\theta)^l (P_i - K) + K, \quad l = 1, 2 \dots$$

- Distribution asymptotique conditionnelle $Q_{i.m}$ des temps de réaction lorsque le stimulus i est présenté après un intervalle de m essais, c'est-à-dire lorsque le stimulus i est présenté après n avoir pas été présenté pendant m essais

$$Q_{i.m} = (1-\theta')^m (P_i - H) + H, \quad m = 1, 2 \dots$$

IV - Exemples de validation expérimentale

A - UNE VALIDATION DES MODÈLES DE SUPPES

Les modèles d'Estes et Suppes ont donné lieu à de nombreuses expériences de validation expérimentale. Dans l'expérience typique de prédiction, le sujet est placé devant un tableau comportant deux lampes et une clef au-dessous de chaque lampe. On indique au sujet qu'à chaque essai, une et une seule des lampes va s'allumer. La tâche du sujet consiste à prédire, à chaque essai, en appuyant sur la clef correspondante, laquelle des deux lampes va s'allumer. En fait, la lampe est allumée avec une probabilité π choisie par l'expérimentateur (cas indépendant). Des expériences faites suivant ce schéma ont confirmé les prédictions fondamentales communes aux deux modèles (linéaire et un élément), tout en donnant la préférence, pour les prédictions différentielles, au modèle linéaire. On a alors cherché à éprouver les modèles correspondants dans le cas continu. Nous résumerons maintenant une expérience de Suppes et al. (1963) qui, faisant suite à une expérience préliminaire*, a donné lieu à une étude détaillée et comparative des deux modèles.

Le schéma expérimental, généralisation du schéma de l'expérience de prédiction citée plus haut, est le suivant: le sujet fait face à un écran sur lequel se

* SUPPES, F. et FRANKMANN, R.W. "Test of stimulus sampling theory for a continuum of responses with unimodal noncontingent determinate reinforcement" Journal of Experimental Psychology, Vol. 60, 1960.

trouve une circonférence. On dit au sujet qu'à chaque essai, un point de la circonférence va s'éclairer, indiquant la position d'une "cible". La tâche du sujet consiste à prédire, à chaque essai, en choisissant un point de la circonférence, (réponse), l'endroit où la cible va apparaître. En fait, la cible (renforcement) apparaît selon une loi de probabilité choisie par l'expérimentateur de façon indépendante des réponses du sujet ("indépendante"). Dans la présente étude, la densité de distribution des renforcements $f(e)$ est bimodale, et construite à partir de deux distributions triangulaires égales sur les intervalles $(0, \pi)$ et $(\pi, 2\pi)$; (cf. fig. 1) 30 sujets ont subi l'expérience qui comprenait 600 essais successifs.

Deux paramètres ont été estimés à partir des données expérimentales: la variance de la distribution hypothétique d'étalement, et le paramètre θ (ou c).

La distribution asymptotique des réponses (400 dernières réponses des 30 sujets, soit 12.000 observations) a permis d'estimer la variance de la distribution d'étalement $(0,0517 \pi^2)$. On a alors pu estimer la densité de distribution théorique asymptotique des réponses $r(a)$ et y comparer l'histogramme asymptotique des réponses observées (fig. 1). L'accord entre les deux distributions est visiblement satisfaisant.

Le paramètre θ (ou c) a été ensuite estimé à partir de "probabilités séquentielles du 1er ordre".

D'une façon précise, on a estimé la distribution asymptotique des réponses lorsque le renforcement précédent a eu lieu dans l'un des quatre quadrants

$$(0, \frac{\pi}{2}); (\frac{\pi}{2}, \pi); (\pi, \frac{3\pi}{2}); (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

La fig. 2 représente cette densité théorique calculée en utilisant la valeur estimée de θ (ou c): 0,32, ainsi que l'histogramme expérimental correspondant*. Si l'accord n'est pas entièrement satisfaisant, il faut cependant noter que les traits essentiels de la distribution conditionnelle des réponses ont été prédits correctement par la théorie. L'existence de 2 maxima, l'un principal, l'autre secondaire, est adéquatement prédite par le modèle.

Ce succès a encouragé les auteurs à pousser plus loin l'analyse, en examinant les probabilités séquentielles du second ordre, c'est-à-dire la distribution asymptotique des réponses lorsque non seulement le renforcement précédent, mais la réponse précédente ont eu lieu dans des zones déterminées. Deux remarques doivent être faites au sujet de ces nouvelles probabilités séquentielles:

a) Tous les paramètres ayant été estimés, les prédictions sont des prédictions absolues.

b) Les prédictions du modèle linéaire et du modèle à un élément diffèrent de façon très marquée.

On constate alors le fait remarquable que les résultats expérimentaux s'écartent considérablement des prédictions du modèle à un élément, alors que le modèle linéaire constitue une approximation valable. (Fig. 3).

* L'histogramme représenté sur la figure est en fait la combinaison de 4 histogrammes, correspondant aux 4 quadrants, qui ont pu être combinés en utilisant les symétries du plan expérimental.

Fig. 1 - Densité de distribution des renforcements $f(e)$,
 Densité de distribution théorique asymptotique des réponses
 $r(a)$,
 et histogramme asymptotique des réponses observées.

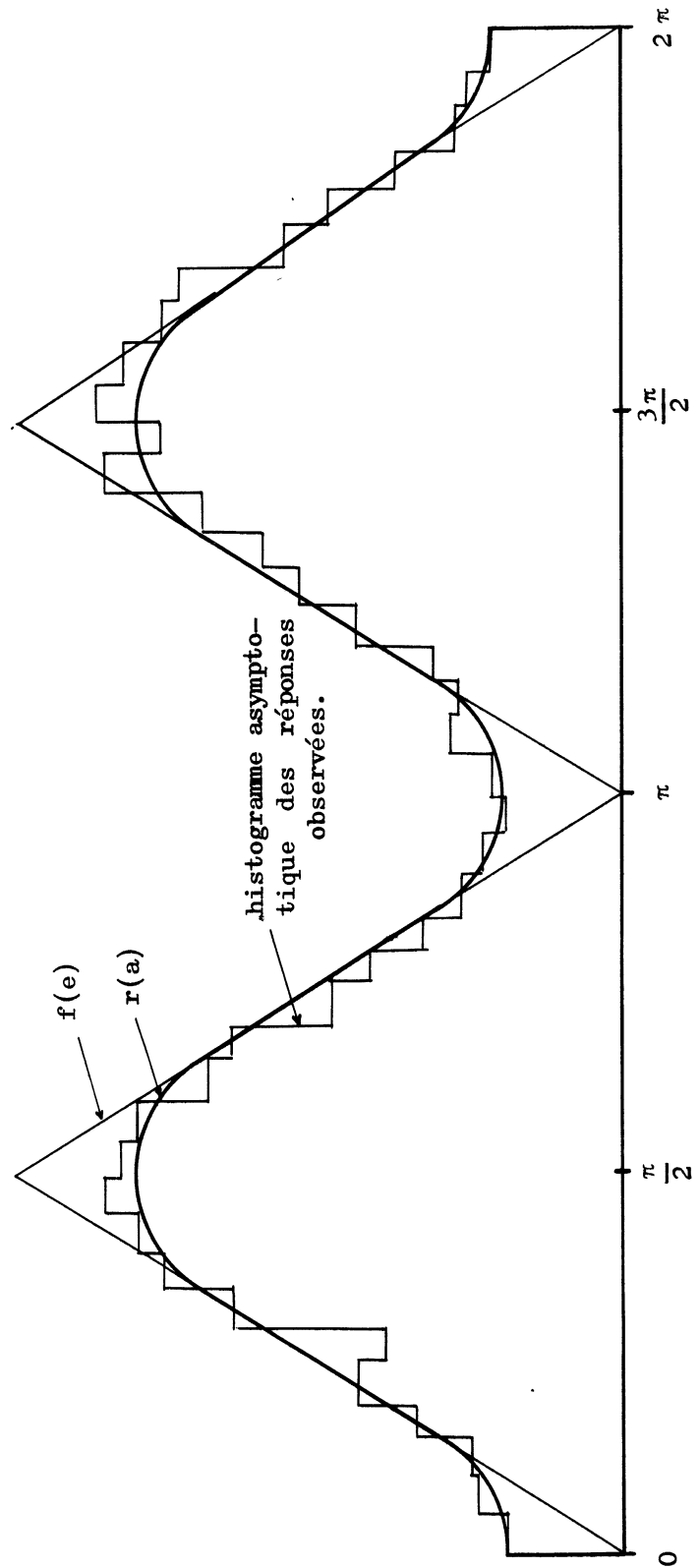
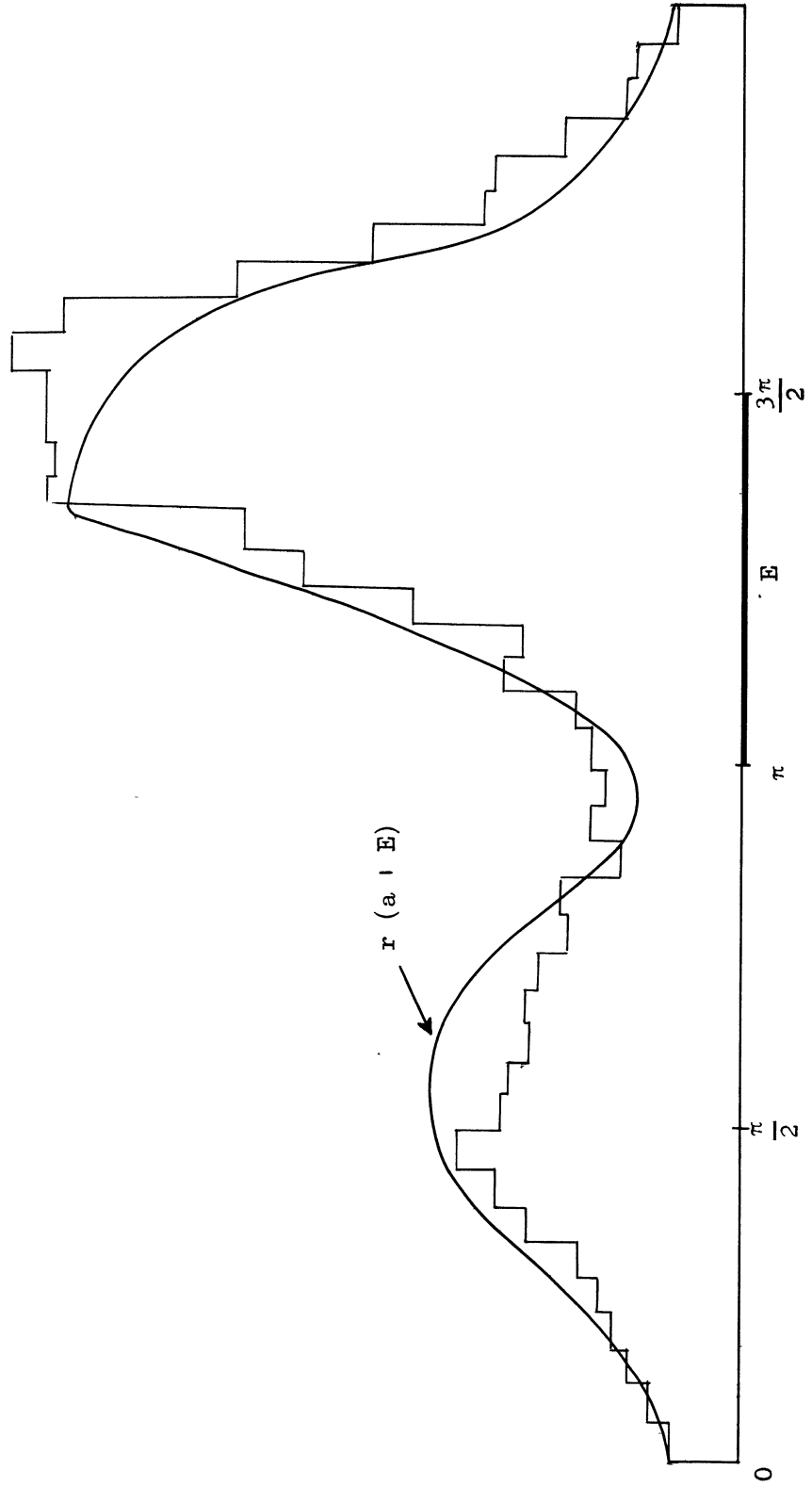
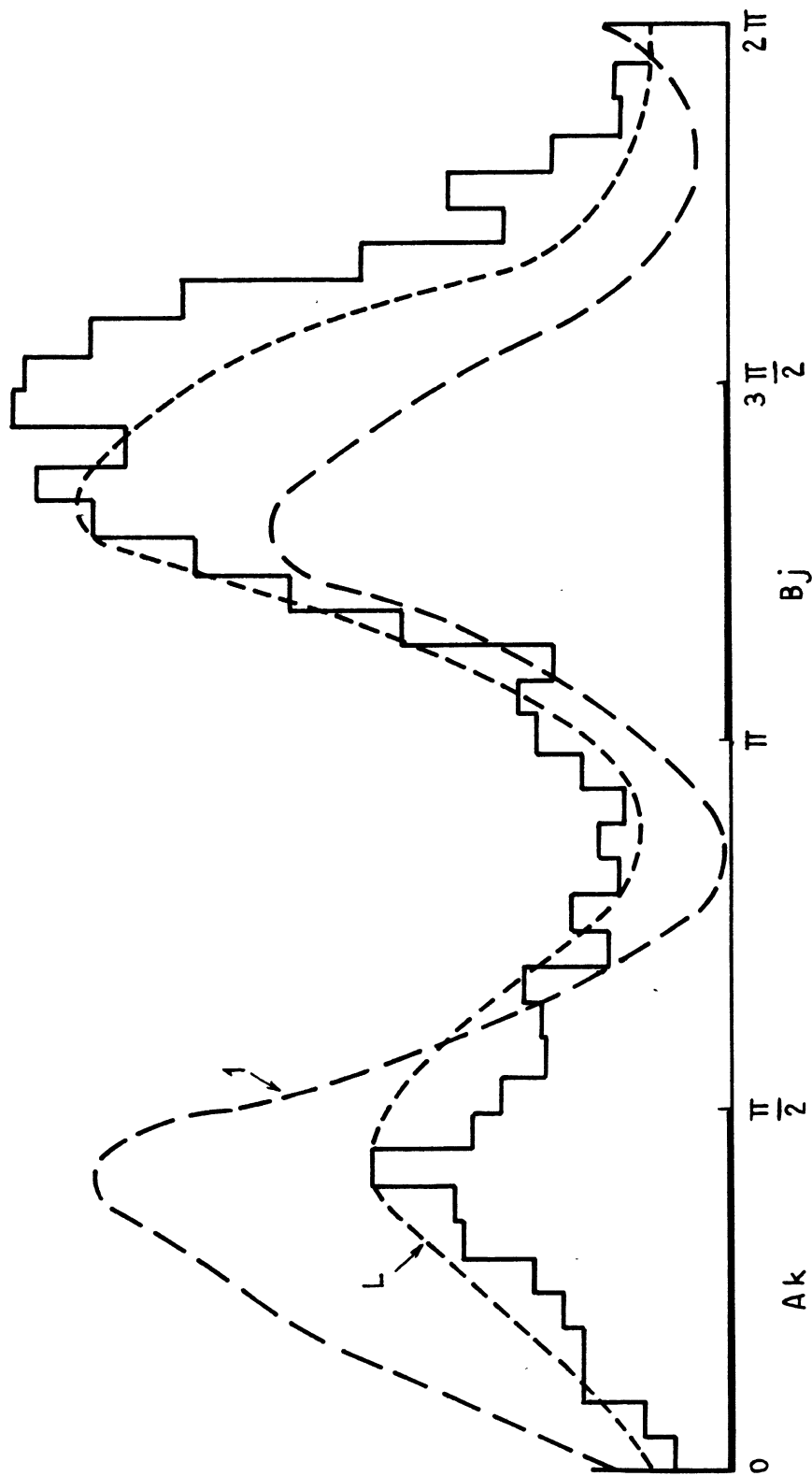


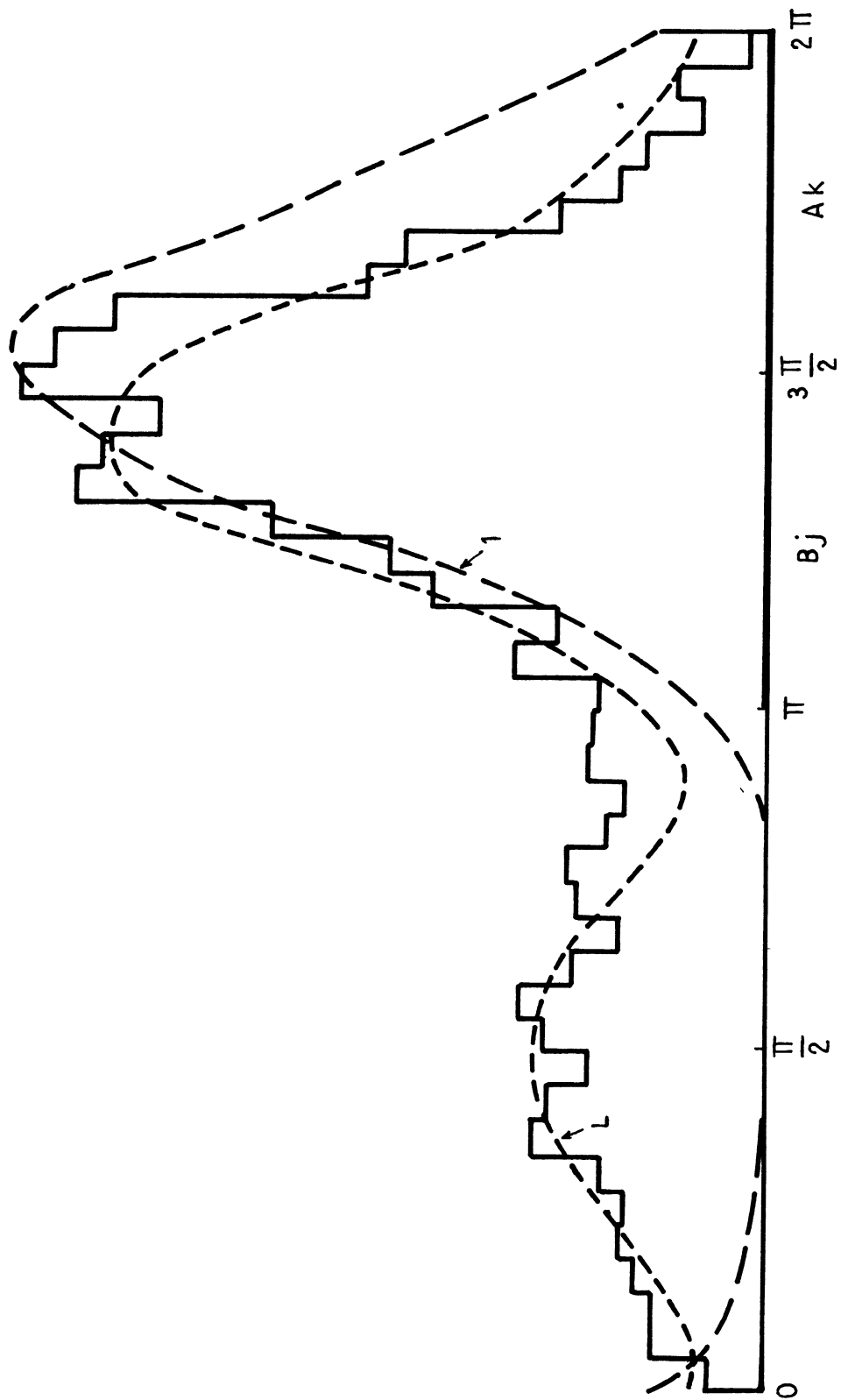
Fig. 2 - Densité de distribution théorique asymptotique $r(a|E)$ des réponses lorsque le renforcement précède à eu lieu dans l'intervalle $E = (\pi, \frac{3\pi}{2})$ et histogramme asymptotique correspondant les réponses observées.

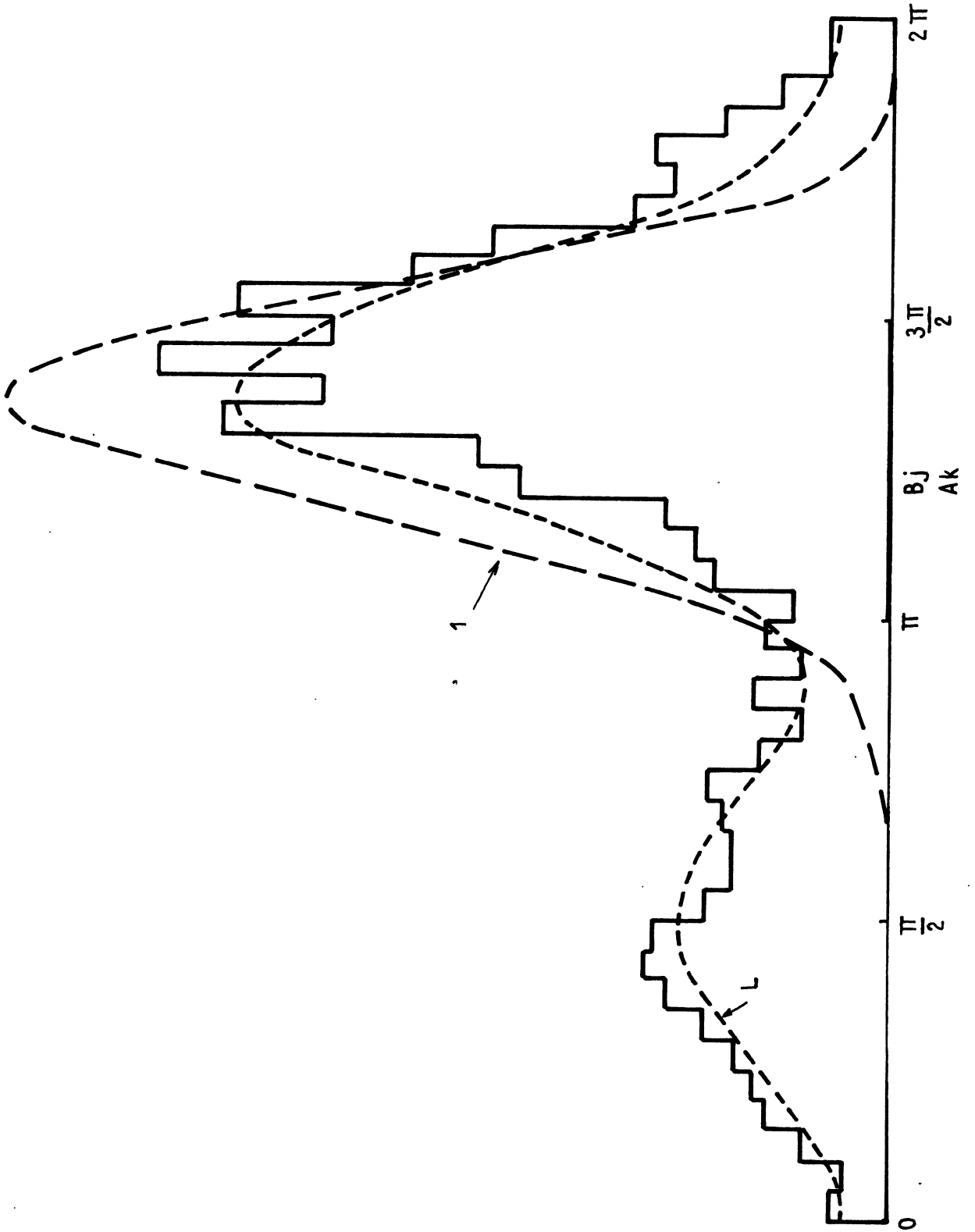


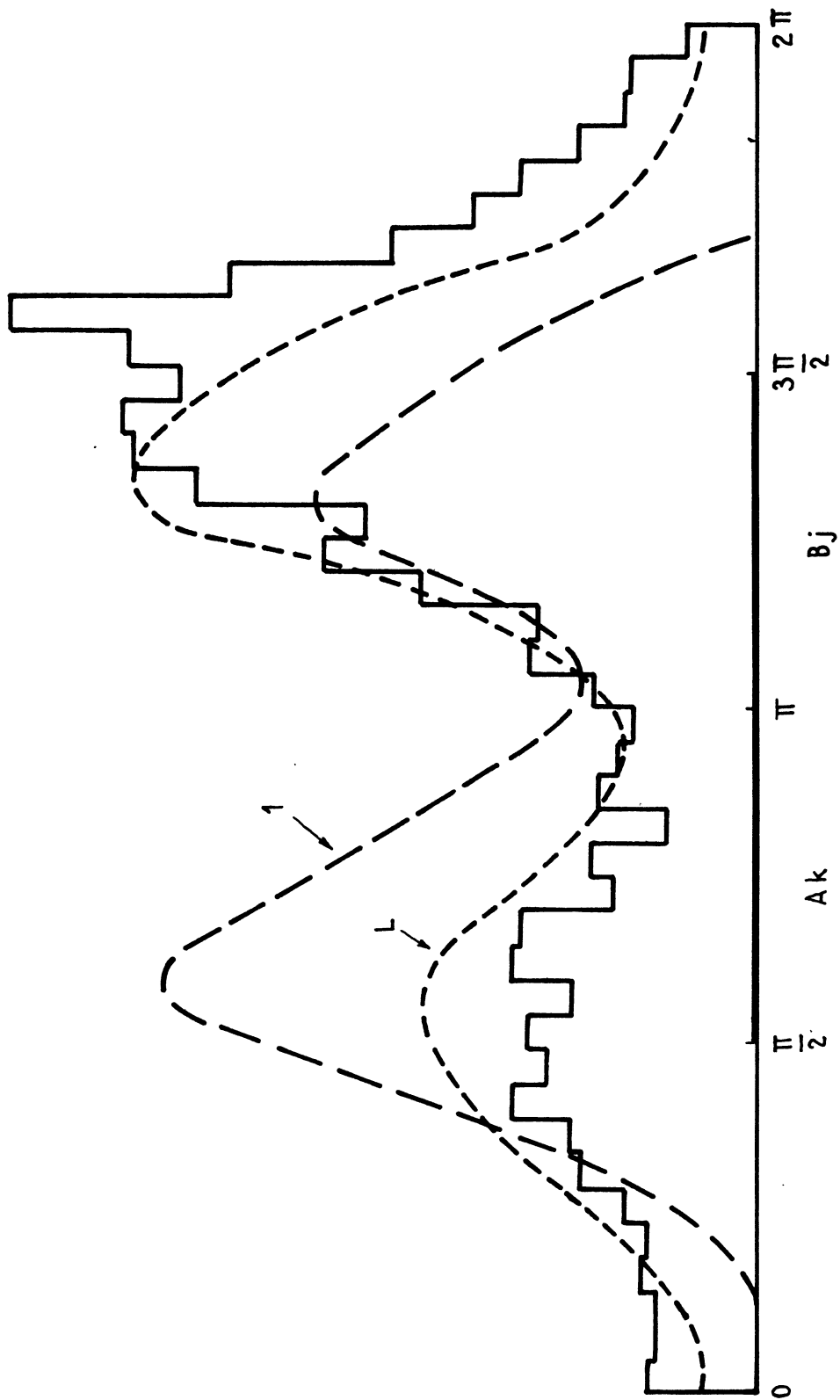


LEGENDE COMMUNE AUX QUATRE DESSINS

Fig. 3 - Densités de distribution théoriques asymptotiques r (a B_j , A_k) des réponses lorsque le renforcement précédent est dans l'intervalle B_j et la réponse précédente dans l'intervalle A_k , et histogrammes asymptotiques observés correspondants. Les quatre dessins correspondent aux quatre dispositions relatives possibles des intervalles B_j et A_k . La courbe marquée "1" correspond au modèle "à un élément", la courbe marquée "L" au modèle linéaire.







B - UNE VALIDATION DES MODÈLES DE FALMAGNE

Les modèles de FALMAGNE ont été appliqués aux données asymptotiques d'une expérience de temps de réaction pour laquelle le nombre de stimuli k était égal à 6 et les probabilités π_i étaient les suivantes:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= 0,01 \\ \pi_2 &= 0,03 \\ \pi_3 &= 0,06 \\ \pi_4 &= 0,10 \\ \pi_5 &= 0,24 \\ \pi_6 &= 0,56\end{aligned}$$

6 sujets ont passé l'expérience. L'analyse a porté sur les derniers 2.000 essais de chaque sujet soit sur $6 \times 2.000 = 12.000$ essais.

Les résultats expérimentaux relatifs aux distributions moyennes de temps de réaction sont résumés par la table 1. On voit que lorsque la probabilité π_i augmente, la moyenne des temps de réaction diminue, la variance diminue et l'asymétrie augmente. Les effets de répétition d'un stimulus vont dans le même sens, les effets d'intervalle dans le sens opposé.

La validation du modèle a porté sur les prédictions communes aux deux modèles. Appelons μ_H et μ_K les espérances des distributions H et K.

TABLE I - DISTRIBUTIONS MOYENNES ASYMPTOTIQUES DES TEMPS DE RÉACTIONS

Probabilités des stimuli	0,01	0,03	0,06	0,10	0,24	0,56
Nombre d'observations	113	327	689	1.144	2.760	6.678
Moyenne (en ms)	640	603	551	503	455	355
Variance	14.285	12.321	15.035	14.681	9.245	8.265
Indice d'asymétrie $\frac{\sum (x-m)^3}{N \sigma^3}$	0,138	0,848	0,630	1,667	1,671	1,847

Pour estimer μ_H , μ_K et $\frac{\theta}{\theta'}$, on peut utiliser la formule donnant la moyenne μ_i des temps de réaction asymptotique au stimulus i

$$\mu_i = \frac{(1-\pi_i) \frac{\theta'}{\theta} \mu_H + \pi_i \mu_K}{(1-\pi_i) \frac{\theta'}{\theta} + \pi_i}$$

μ_i est une fonction homographique de π_i . En ajustant une hyperbole pour les différentes valeurs de π_i on obtient

$$\begin{aligned}\mu_H &= 611 \text{ ms} & \mu_K &= 295 \\ \frac{\theta'}{\theta} &= 0,21\end{aligned}$$

D'autre part, les moyennes de temps de réaction après répétitions ont permis

d'estimer les paramètres θ et μ_K , et les moyennes de temps de réaction après intervalles ont permis d'estimer les paramètres θ' et μ_H . On trouve :

$$\begin{aligned} \theta &= 0,328 & \theta' &= 0,076 & (\text{D'où } \frac{\theta'}{\theta} &= 0,23) \\ \mu_H &= 593 & \mu_K &= 300 \end{aligned}$$

On voit que les estimations s'accordent bien avec les précédentes.

μ_H , μ_K , θ et θ' une fois estimés on peut obtenir les prédictions théoriques des moyennes des distributions moyennes et des distributions conditionnelles des temps de réaction après répétitions ou intervalles. Les principaux résultats sont présentés dans les tables 2 et 3. On voit que l'ajustement est très satisfaisant.

TABLE 2 - MOYENNES OBSERVÉES ET THÉORIQUES DES DISTRIBUTIONS MOYENNES DE TEMPS DE RÉACTION APRÈS LES DIFFÉRENTS STIMULI

Valeurs des paramètres $\mu_H = 611$, $\mu_K = 300$, $\frac{\theta'}{\theta} \equiv 0,233$						
	0,01	0,03	0,06	0,10	0,24	0,56
Moyenne observée	640	603	551	503	455	355
Moyenne théorique	600	582	556	526	449	355

TABLE 3 - MOYENNES OBSERVÉES ET THÉORIQUES DES DISTRIBUTIONS APRÈS RÉPÉTITIONS OU INTERVALLES

Répétitions Nombre de répétitions	Probabilités des stimuli									
	0,03		0,06		0,10		0,24		0,56	
	obs.	théo.	obs.	théo.	obs.	théo.	obs.	théo.	obs.	théo.
1	479	513	482	478	491	448	434	416	352	352
2					406	404	391	381	320	335
3					362	373	367	357	316	324
4									309	316
5									314	311
6									314	307
7									308	305
8									310	303
9									302	302
10									305	301

Intervalles	Probabilités des stimuli			
	0,24		0,56	
	obs.	théo.	obs.	théo.
1	455	423	376	358
2	464	436	399	376
3	470	448	400	392
4	463	459	422	407
5	479	470	427	421
6	461	480	434	434
7	487	498	434	446
8			512	506

Une étude plus poussée des modèles a été faite en considérant les variances et les moments du troisième ordre. En première analyse, on a supposé pour simplifier que les deux distributions H et K ont même variance et sont symétriques.

La variance v_i de la distribution moyenne des temps de réaction au stimulus i est alors donnée par la formule

$$v_i = v + \frac{(\mu_H - \mu_K)^2 \cdot (1 - \pi_i) \pi_i \theta \theta'}{[(1 - \pi_i) \theta' + \pi_i \theta]^2}$$

En prenant les différentes valeurs expérimentales de v_i , on peut estimer v et ajuster une courbe aux différentes variances expérimentales. On obtient $v = 6250$. L'ajustement est moins bon que pour les moyennes mais encore acceptable. Des résultats analogues ont été obtenus pour les moments du troisième ordre.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE SUR LES ASPECTS MATHÉMATIQUES DES MODÈLES STOCHASTIQUES D'APPRENTISSAGE

Publications principalement mathématiques

- BLAU, J.H. The combining of classes condition in learning theory, Technical Report, N° 32, August 23, 1960, Institute for Math. Studies in Soc. Sciences, Stanford, Calif.
- BUSH, R.R. et MOSTELLER, F.: A stochastic models in application to learning, Ann. Math. Stat. 24, 1959, 559-585.
- BUSH, R.R. MOSTELLER, F., et THOMPSON, G.L.: A formal structure for multiple-choice situation, in R.M. Thrall, C.H. Coombs, et R.L. Davis et al: Decision processes (New-York, Wiley, 1954).
- ESTES, W.K., et SUPPES, P.
 a) Foundations of linear models (chap. 8, in Bush, Estes et al).
 b) Foundations of statistical learning theory: II. Stimulus sampling models for simple learning, Technical Report, N° 4, 1959, Institute for Math. Studies in Soc. Sciences, Stanford, Calif.
- HARRIS, T.E., BELLMAN, R. et SHAPIRO, H.N. - Studies in functional equations occurring in decision processes (Research Memorandum RM-875, RAND/Corporation, Santa Monica, Calif. July 1, 1952).
- KANAL, L. A functional equation analysis of two learning models (Psychometrika, 27, 1962, 84-104.)
- KARLIN, S. Some random walks arising in learning models (Pacific J. of Math, 1953, 3, 725-756).
- KEMENY, J.G., DE LEEUW, K., SNELL, J.L. et THOMPSON, G.L. (Progress Report Number 1, Darmouth Mathematics Project, Darmouth College, March, 1955).
- KEMENY, J.G., et SNELL, J.L.: Markov processes in learning theory (Psychometrika, 1957, 22, 221-230).
- LAMPERTI, S. et SUPPES, P.: Chains of infinite order and their applications to learning theory (Pacific J. of Math, 1959, 9, 739-754).

Publications à objectif psychologique, mais riches en développements mathématiques

ATKINSON, R.C. et ESTES, W.K.: Stimulus Sampling theory (in Vol. 2 de BUSH et al.: Handbook).

ATKINSON, R.C. et al.: Studies in mathematical psychology (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press. 1963).

BOWER, G.H. Application of a model to paired-associate learning (Psychometrika, 26, Sept. 1961).

BUSH, R.R., LUCE, R.D. et GALANTER, E. et al.: Handbook of mathematical psychology (New-York, Wiley, 1963, 5 Volumes).

BUSH, R.R., ESTES, W.K. et al.: Studies in mathematical learning theory (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1959).

BUSH, R.R. et MOSTELLER, F.: Stochastic models for learning (New-York, Wiley, 1955).

BUSH, R.R. et STERNBERG, S.: A single-operator model (chap. 10 in Bush, Estes et al.).

ESTES, W.K. Toward a statistical theory of learning (Psych. Review vol. 57, 1950).

ESTES, W.K. Component and pattern models with Markovian interpretations (chap. 1 in Bush, Estes et al.).

FALMAGNE, J.C. - Un modèle linéaire pour les temps de réaction de choix. Application à des résultats expérimentaux, Univ. Libre de Bruxelles, Lab. de Psychologie (polycopiée 1962).

FALMAGNE, J.C. - A linear model for choice reaction time with applications to experimental results (à paraître dans Journal of Mathematical Psychology, 1964).

STERNBERG, S. - Stochastic learning theory (in Vol. 2 de BUSH et al.: in Handbook of Mathematical Psychology).

SUPPES, P. - A linear model for a continuum of responses (chap. 19 in Bush, Estes et al.).

SUPPES, P. et ATKINSON, R.C.: Markov learning models for multiperson interactions (Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1960).

SUPPES, P. ROUANET, H., LEVINE, M. et FRANKMANN, A.: Empirical comparison of models for a continuum of responses with non-contingent bimodal reinforcement (sous presse, à paraître dans Studies in Mathematical Psychology, /Stanford Univ. Press).

- Nombreux articles dans la revue Psychometrika.

- Une nouvelle revue trimestrielle:

Journal of Mathematical Psychology

paraîtra à partir de 1964 (Directeur: R.C. Atkinson).

- - - - -