Problèmes d'enseignement

Mathématiques et sciences humaines, tome 6 (1964), p. 25-36
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1964__6__25_0>

PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

ELLES SONT TOUTES CONDITIONNELLES

DEVINETTE SUR MESURE

P. ROSENSTIEHL

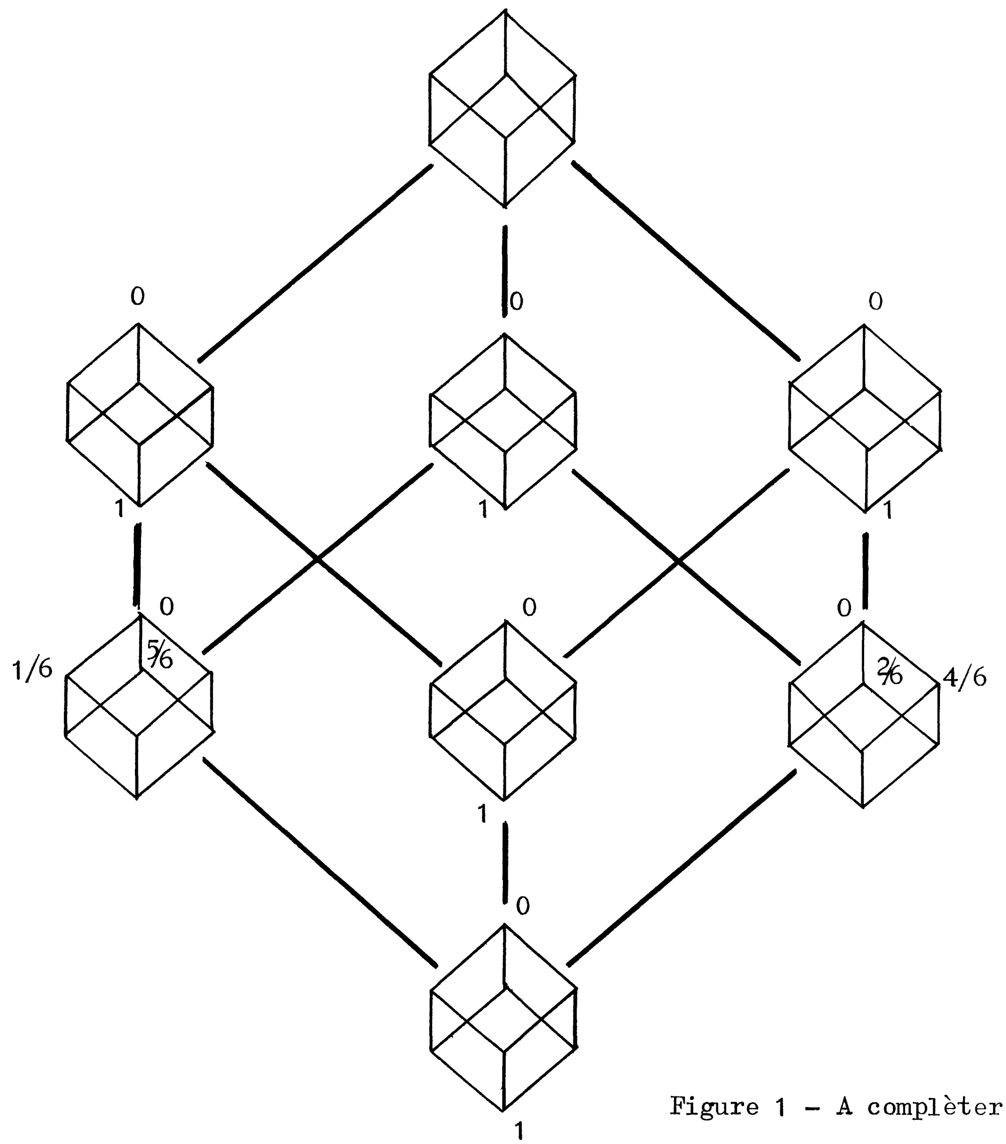


Figure 1 – A complèter

Ci-dessus un schéma, un réseau, qu'est-ce que c'est? Probablement a-t-on voulu représenter une structure algébrique. Il faut comprendre que toutes les lignes sont orientées dans le même sens, vers le bas par exemple.

Certains sommets portent un nombre. On voit des zéros, des uns, et trois autres nombres. Il s'agit de poser deux axiomes et d'étendre une mesure à l'ensemble de tous les sommets du schéma.

1.- La structure algébrique des événements

Dans un univers fini U de n événements élémentaires, dont l'un r inconnu est la réalité, on s'intéresse aux propositions logiques :

$$q = (r \in X \quad \text{si} \quad r \in Z) \quad \text{avec} \quad X \subset U, \qquad Z \subset U \quad \text{et} \quad Z \neq \emptyset.$$

On les appelle dans le langage technique du calcul des probabilités, des événements E, et on les écrit en abrégé:

$$E = (X \quad \text{si} \quad Z).$$

Si q est vraie E est dit réalisé, si q est fausse E est dit non réalisé.

Tout événement étant en fait un couple (orienté) de parties de l'ensemble U, nous avons :

$$E \in \mathscr{P}(U) \times \mathscr{P}(U).$$

où $\mathscr{P}(X)$ représente l'ensemble des parties de l'ensemble X.

Le carré cartésien du simplexe $\mathscr{P}(U)$, à l'exception de ses éléments $(X, \emptyset)$, représente donc l'ensemble des événements relatifs à notre univers U.

Pour card. U = 3 un tel ensemble peut être représenté par la figure 1.

2.- Une mesure sur $\mathscr{P}(U) \times \mathscr{P}(U)$

A chaque événement (X si Z) nous voulons attacher une probabilité, p(X si Z), évidemment pas n'importe comment.

On se donne deux axiomes:

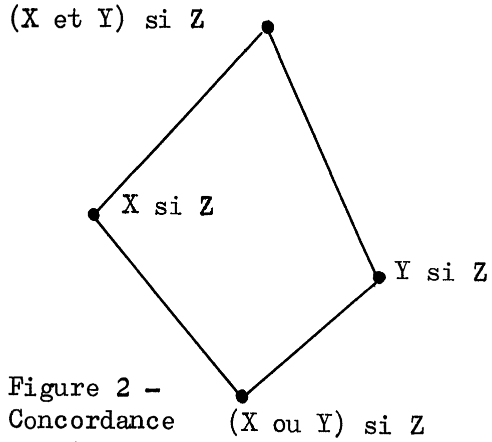
<u>l'axiome d'additivité</u> (propre à toutes sortes de mesures)

(1) $p(X \text{ si } Z) + p(Y \text{ si } Z) = p((X \text{ ou } Y) \text{ si } Z) + p((X \text{ et } Y) \text{ si } Z)$ avec $X, Y, Z \subset U$; et $Z \neq \emptyset$

et on convient de poser

$$p(\emptyset \text{ si } Z) = 0$$

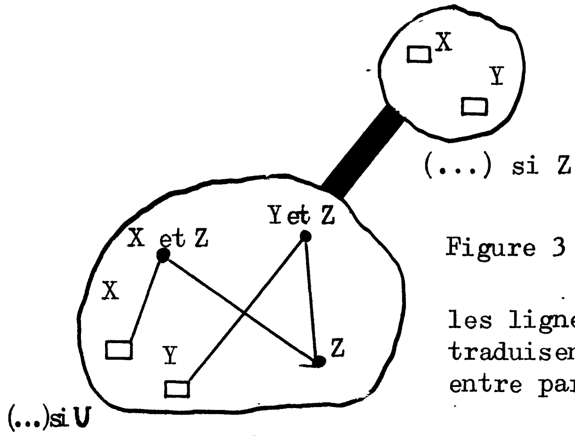
$$p(U \text{ si } Z) = 1 \qquad \text{(voir figure 1).}$$



la règle de calcul ci-dessus lie les probabilités de quatre sommets d'un même simplexe situés sur un même parallélogramme: voir figure 2. (De trois probabilités connues on déduit la quatrième).

Figure 2 - Concordance de et, ou

L'axiome des conditions



(II) $\dfrac{p(X \text{ si } Z)}{p(Y \text{ si } Z)} = \dfrac{p\ (X \text{ et } Z) \text{ si } U}{p\ (Y \text{ et } Z) \text{ si } U}$

et on est convenu de poser :

$$p(\overline{Z} \text{ si } Z) = 0$$

Figure 3 - Concordance du si.

les lignes de ce schéma de calcul traduisent la relation d'inclusion entre parties d'un ensemble.

Cette deuxième règle de calcul permet de lier encore deux par deux, les probabilités des sommets de différents simplexes: voir figure 3.

3.- Le calcul

On peut maintenant résoudre notre exercice en employant alternativement les règles de calcul I et II.

Il y a plusieurs façons de faire. N'insistons pas. Une méthode peut consister à calculer au plus vite les probabilités du simplexe "(...) si U", situé en pôle inférieur: les autres probabilités s'en déduisent toutes par la règle II.

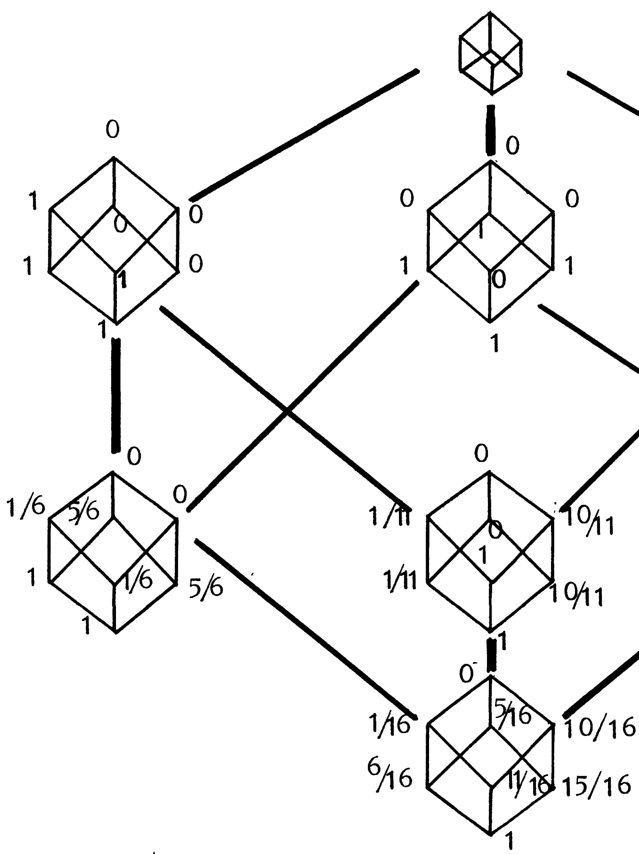


Figure 4 - Solution de l'exercice.

Le calcul est élémentaire, mais il n'était pas évident que les données fussent suffisantes.

On voit le problème général qui se pose. Pour U de cardinal donné, on connait certaines probabilités conditionnelles; suffisent-elles pour les calculer toutes? Ou encore: l'observation a permis d'en évaluer un certain nombre; sont elles cohérentes entre-elles?

Conclusion

Le calcul des probabilités est certes une chose difficile et déroutante et délicate à mettre en application. Autant de raisons pour sérier les questions: au départ, avant même de penser probabilités, on étudie l'algèbre des événements.

Une fois reconnu que tous les événements sont conditionnels, une fois bien identifiées leurs diverses lois de composition, (non, et, ou, si), alors l'axiomatique qui fonde le calcul des probabilités coule de source.

- - - - - - - - - -

M. BARBUT

IDEOGRAMMES: GRAPHIQUES ET GEOMETRIE

Le texte qu'on lira ci-dessous est celui, abrégé, de notes que j'ai fournies à Monsieur J. Bertin, Directeur du Laboratoire de Cartographie de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes, en vue de la préparation de son ouvrage sur les graphiques qui doit paraître prochainement; je le remercie de permettre la publication de ces notes.

Bien entendu, ces quelques pages ne prétendent pas traiter de l'ensemble du problème des représentations graphiques, auquel les chercheurs en Sciences Humaines sont si souvent confrontés; soulignons à cet égard que la publication du livre de J. Bertin pourra leur rendre d'immenses services.

Ce n'est pas non plus la totalité du point de vue du mathématicien sur ce problème que l'on trouvera ici; je n'ai voulu mettre en évidence que deux idées qui me semblent être à la base de toute recherche sur les représentations graphiques.

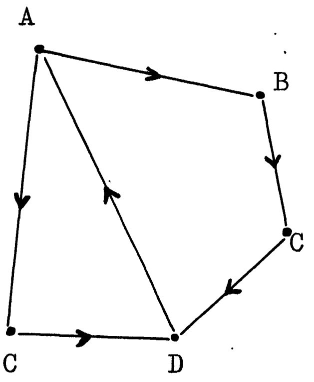
La première est que celui qui dessine le fait pour communiquer l'idée qu'il a d'une collection d'objets et des relations entre ceux-ci; un bon dessin, c'est celui qui montre ces relations, qui les traduit fidèlement; c'est un homomorphisme, au sens mathématique du terme, qui applique le système, se trouvant quelque part dans la cervelle du dessinateur, constitué par les objets et les relations entre eux dans le système constitué par le plan (la feuille de papier) et les figures qu'il peut supporter, système dont certaines propriétés relèvent de chapitres bien délimités des mathématiques: géométrie plane, topologie du plan. Ces homomorphismes dans le plan, il me semble que c'est le beau nom **d'idéogrammes** (le terme est pris ici dqns un sens très large) qui leur convient le mieux.

La seconde idée découle de la première: compte tenu de l'état de culture de nos contemporains, qui ont la plupart reçu quelques rudiments de géométrie, l'un des guides dans le choix d'une représentation graphique se trouve dans l'utilisation des propriétés géométriques que tous sont sensés connaître. Il importe donc que le dessinateur ait toujours présentes à l'esprit les propriétés au moins les plus élémentaires de la géométrie plane; c'est de celles-ci qu'on donne ici un rapide aperçu.

Ce premier article sur les graphiques, qui ne fait qu'effleurer le sujet, devrait être suivi de beaucoup d'autres. Les colonnes du bulletin sont ouvertes à tous les chercheurs qui ont à faire part de leurs réflexions ou de leur expérience en la matière; ils sont nombreux, car qui n'a jamais eu à faire de dessins ?

*

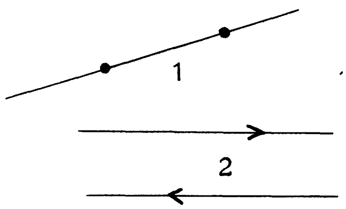
*   *



Ci-contre, un "sociogramme"; on a demandé à cinq personnes, représentées par les points A, B, C, D, E, de choisir ceux d'entre eux avec qui ils aimeraient travailler; les droites représentent les choix, et sont orientées dans le sens du choix: A choisit B et E, B choisit C, etc...

Pourquoi le dessinateur a-t-il pu faire cela? Son "problème", c'était de représenter, graphiquement, un ensemble (les cinq personnes) "structuré" par une relation binaire (liant les éléments de l'ensemble deux par deux), la relation du choix :
.... choisit ....

En décidant de représenter les personnes par des points, et les liaisons par des droites orientées il n'a fait qu'utiliser les propriétés très élémentaires de ces objets géométriques que sont les points et les droites du plan:

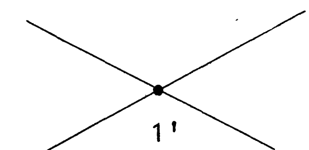


1 - par deux points il passe une droite, et une seule.

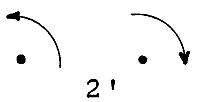
2 - toute droite peut être orientée dans l'un ou l'autre des deux sens (sens de parcours d'un point sur la droite).

Il a donc pu traduire la description complète de la situation à représenter: "A choisit B et E, B choisit C, ..., E choisit D" par un dessin, en convenant de :

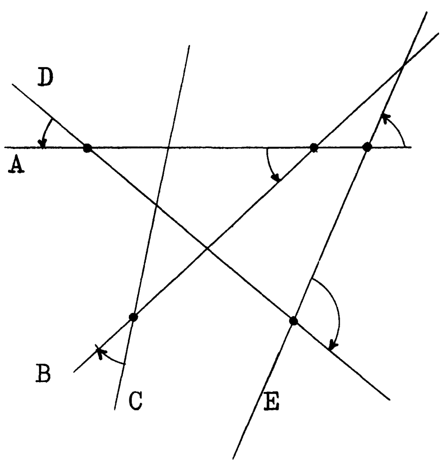
traduire	personne	par point
"	choix	par droite
"	sens du choix	par sens de la droite



Remarquons que dans cette traduction dans le système de signes de la géométrie plane, tout n'est pas significatif: les longueurs des segments, les angles, le fait que le point A soit situé plus haut que le point D, tout cela n'a pas de sens en termes de la situation représentée.



D'autre part, le dessinateur aurait pu faire sa traduction autrement; par exemple, s'appuyant sur ce que (propriétés duales de 1 et 2).

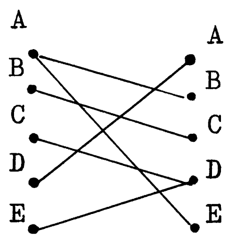


1' Deux droites se coupent en un point et un seul

2' Un point peut être orienté dans l'un ou l'autre des deux sens (sens de rotation d'une droite au tour d'un point).

il aurait pu (figure ci-contre):

traduire	personne	par droite
"	choix	par point
"	sens du choix	par sens du point.



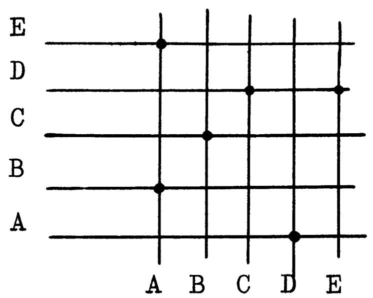
AUTRES PROCÉDÉS :

a)- 1) Personnes choisissant: une première famille de points.

2) Personnes choisies: une seconde famille de points.

3) Les choix : des droites.

en utilisant le fait que, le plan peut-être orienté (par exemple de la gauche vers la droite).



b)- Bien entendu, cette traduction a aussi sa duale (le graphique "cartésien").

1) personnes choisissant: une première famille de droites.

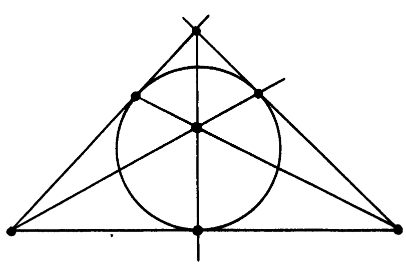
2) personnes choisies : une seconde famille de droites.

3) les choix : des points.

Cette dernière solution n'est d'ailleurs autre chose que le classique "tableau (ou matrice) sociométrique".

Remarque: l'ordre des lignes, ni celui des colonnes, ne sont significatifs.

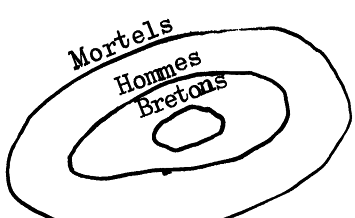
Ainsi, ce que fait le dessinateur, c'est toujours une traduction d'une "structure" complexe dans le "langage" des figures que l'on peut dessiner dans le plan, le "langage" de la géométrie plane; langage particulièrement efficace aux fins de communication, pour des raisons sociologiques et historiques évidentes: chacun d'entre nous a, par force, l'intuition des relations spatiales, et une connaissance plus ou moins rudimentaire de la théorie de ces relations qu'on lui a enseignée à l'école sous le nom de géométrie euclidienne. Ce "conditionnement" de l'interlocuteur entraine, pour le dessinateur, certaines servitudes; par exemple, les figures relevant de géométries non-euclidiennes, comme la figure ci-contre* ne pourront être utilisées qu'avec précaution, et avec une légende suffisamment explicative. C'est donc de géométrie euclidienne que nous parlerons toujours dans ce qui suit.



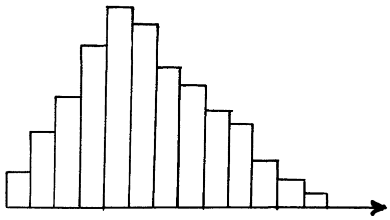
Ceci posé, plusieurs procédés de traduction peuvent être employés:

I - ON REPRESENTE LES OBJETS A FIGURER PAR DES FIGURES AYANT ENTRE ELLES LES RELATIONS A REPRESENTER ENTRE CES OBJETS

C'est ce qu'on fait, par exemple, quand on représente par la figure ci-contre le syllogisme: "Tout Breton est un Homme, tout Homme est Mortel, donc tous les Bretons sont Mortels"; les objets: Bretons, Hommes, Mortels sont figurés par des domaines du plan, la relation d'inclusion (des Bretons dans les Hommes, etc...) par l'inclusion des domaines plans correspondants.



*Sept personnes se choisissent mutuellement; chacune en choisit trois autres et chacune est choisie par trois autres. Personnes choisissant, les points; personnes choisies, les "droites".



C'est également ce qu'on fait dans le dessin ci-contre (la pyramide des âges par exemple: les longueurs des bâtonnets correspondant à chaque classe d'âge sont entre elles comme les effectifs de ces classes; les bâtonnets sont eux-mêmes rangés dans l'ordre des classes.

II.- **OU REPRESENTER LES OBJETS PAR UNE PREMIERE COLLECTION DE FIGURES, LES RELATIONS ENTRE OBJETS PAR UNE SECONDE FAMILLE DE FIGURES**

C'est le procédé qui a été utilisé dans les sociogrammes étudiés plus haut. On sera contraint à ce procédé chaque fois qu'il n'existera pas une famille de figures planes ayant entre elles des relations de même forme que celles existant entre objets à représenter.

III.- **ON PEUT ENFIN COMBINER LES DEUX PROCEDES (chacun en trouvera des exemples)**

--- ----

Au point où nous en sommes, il n'est pas inutile de rappeler sommairement les principales propriétés de la géométrie plane (ou, si l'on préfère, les principales règles de syntaxe du langage que "parlent" les figures du plan), de façon que le dessinateur ait quelques clés dans son choix entre procédés relevant du type I ou II, choix qui ne sont jamais quelconques.

Classiquement, on distingue trois classes, trois niveaux dans les propriétés des figures planes, et plus particulièrement de ces figures élémentaires (parce que constitutives des figures plus complexes) que sont les points et les droites :

1.- Le niveau combinatoire

Il y a des points et des droites; deux points déterminent une droite; deux droites déterminent un point (éventuellement à l'"infini": droites parallèles).

Ces relations sont nommées: relations d'incidence.

A ce niveau, on représentera en général des collections d'objets, ayant entre eux des relations binaires non-orientées, (on remarquera que, pour la clarté de la représentation, il est parfois nécessaire de tordre les "droites", de grossir les "points", etc...).

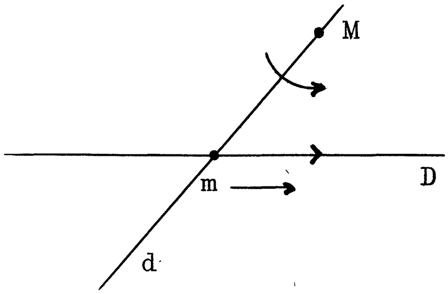
Il ne faut jamais oublier que dans ces représentations :

a) ON PEUT TOUJOURS JOUER SUR LA DUALITÉ :

objets	=	points		ou	objets	=	lignes
relations	=	lignes			relations	=	points

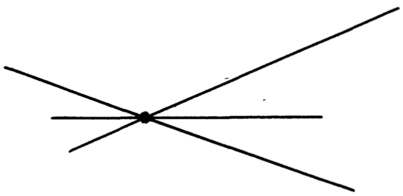
b) Seules sont significatives les relations d'incidence; ni l'ordre, ni les longueurs (la métrique) ne sont significatifs.

2.- Le niveau de l'Ordre :



> Un point parcourt une droite dans l'un ou l'autre des deux sens; une droite tourne autour d'un point dans l'un ou l'autre des deux sens.

Ce qui peut encore se dire :



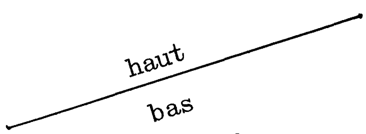
> De trois points alignés, l'un est entre les deux autres.
>
> De trois droites concourantes, l'une est entre les deux autres.*

Ces propriétés sont d'abord utilisées, en représentations de type II, dans les réseaux orientés les tableaux orientés, comme il a été dit plus haut.

Ce niveau est également significatif chaque fois que l'on représente graphiquement un rangement, une collection d'objets ordonnés, comme dans les diagrammes de distribution de mots rangés dans l'ordre des fréquences décroissante (Diagramme de type I).

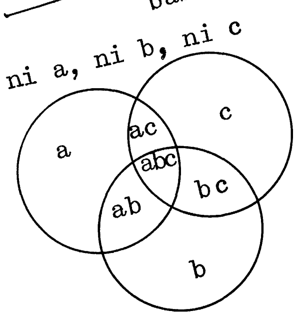
Mais le plus souvent, c'est par certaines de leurs conséquences que les propriétés d'ordre énoncées ci-dessus jouent un rôle dans les représentations graphiques: à savoir, qu'une courbe fermée partage le plan en deux régions:

l'intérieur
l'extérieur, ou qu'une droite le partage en :

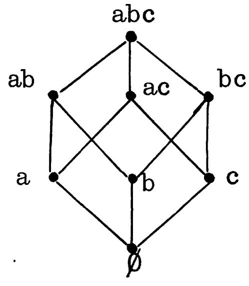


partie gauche
partie droite ou en haut
bas

C'est ainsi que l'on pourra représenter les huit combinaisons possibles de trois objets a, b et c, et les relations d'inclusion entre elles, par les fameux "cercles d'Euler", selon un graphique de type I , ou encore par un réseau, la relation d'inclusion étant figurée par une ligne qui n'a pas besoin d'être orientée explicitement, bien que l'inclusion entre combinaisons soit orientée, car celle-ci est représentée par l'orientation du plan du haut vers le bas.

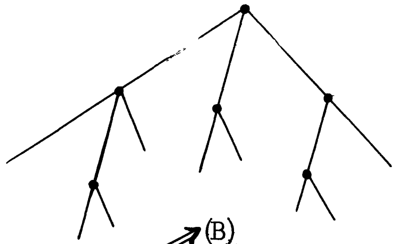


Ce principe apparait dans toutes les représentations graphiques de hiérarchies, d'arbres (généalogiques, taxonomiques ou autres), etc..., comme dans les diagrammes (stemma) utilisés par certains grammairiens pour figurer l'organisation d'une phrase.

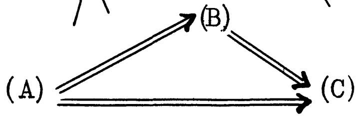


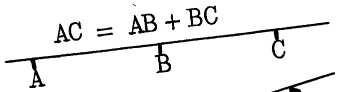
Autre exemple: le syllogisme, représenté en figurant l'implication par une ligne orientée, les propositions par des points.

*Définie sans ambiguité si l'on choisi une direction de droite *origine* des rotations, jouant le même rôle que le "point à l'infini" sur la droite dans l'orientation de celle-ci.

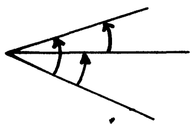


Remarques: à ce niveau, seuls l'ordre et la combinatoirs sont significatifs, non la longueur des lignes, ni la surface des régions, etc....

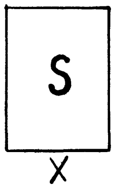


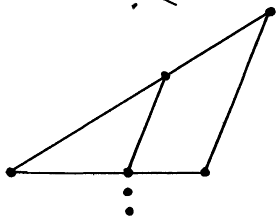


3.- Le niveau métrique



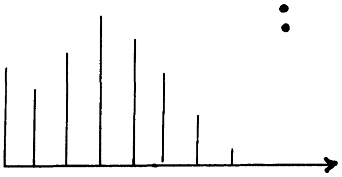
> On définit une égalité des segments et des angles (superposables); une addition des segments (mis bout à bout) et des angles (adjacents).
>
> Cette addition a toutes les propriétés de l'addition des nombres positifs ou négatifs lorsqu'on a orienté droites et points.





Conséquences: On pourra mesurer des rapports de longueurs ou d'angles; mesurer des surfaces, et les additionner ou en faire le rapport.

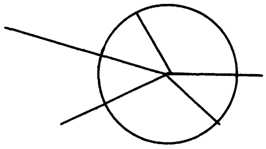
C'est ce niveau de signification qui est utilisé dans toutes les représentations de quantités (c'est-à-dire de "composantes de l'information" qui sont des nombres sur lesquels les opérations (addition, multiplication) de l'arithmétique aient un sens, que ces quantités soient figurées par :



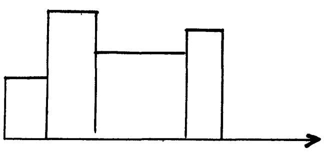
des longueurs,

des angles

des surfaces



A ce niveau, les figures géométriques ont donc une vocation privilégiée à la représentation des structures numériques, et l'on remarquera que toutes les représentations citées en exemple sont de type I (quant à l'utilisation de la métrique du plan).



En résumé, l'idée fondamentale de ces traductions en langage graphique de structures diverses est celle d'homomorphisme, c'est-à-dire de correspondance entre structure à représenter, et figuration de la structure, qui conserve, qui traduise fidèlement les relations de la structure représentée.

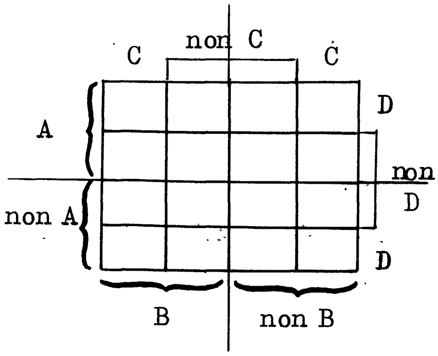
Le rapide survol des éléments les plus utilisables (parce que les plus universellement connus et compris) de la syntaxe de la géométrie plane euclidienne a suffit pour nous montrer que :

1 - Tout n'est pas toujours significatif.

Mais aussi que :

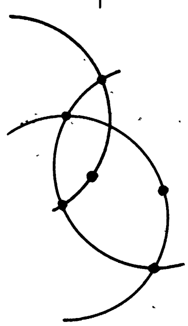
2 - Tout n'est pas toujours possible, et en tout cas pas n'importe comment.

Exemples: Les seize combinaisons possibles de quatre objets, avec leurs relations d'inclusion ne peuvent être représentées par des cercles, comme nous l'avons fait

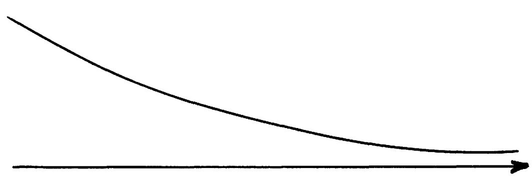


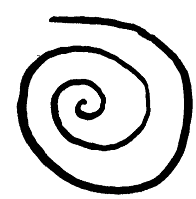
plus haut pour les huit combinaisons de trois objets; par contre, on peut les représenter au moyen du partage du plan par des droites.

- Les relations "ternaires" entre objets (liant ces objets trois à trois) ne pourront être représentées, comme les relations binaires, par des droites, car, en géométrie euclidienne, si des points sont alignés trois à trois, ils sont tous alignés; par contre, on pourra les représenter par des cercles (par trois points il passe un cercle et un seul) en géométrie euclidienne, ou parfois par des droites dans certaines géométries non-euclidiennes (Cf. Supra).



- Lorsque "l'infini" joue un rôle dans ce qui est à représenter, on sera aussi, pour des raisons évidentes, conduit à des impossibilités; certains dessins peuvent néanmoins, suggérer ce qui se passe "à l'infini":





Ajoutons que, en poursuivant dans cette voie, on se heurte rapidement aux frontières de ce que l'on sait, actuellement, en géométrie, ce qui est fort peu de chose.

Pour en revenir à ce qui est l'essentiel (essentiel relatif, répétons-le, à l'état de la société en 1963), les "réactifs" que doit faire opérer le dessinateur pour savoir à quel niveau de signification va se situer sa représentation de chacune des composantes de "l'information" qui lui est donnée, sont:

- L'ordre dans lequel seront rangées mes figures importe-t-il, ou non? Autrement dit :

Si l'ordre n'est pas significatif ⟶ Niveau 1.

- Si l'ordre importe, et si l'ordre est indiqué par un nombre, ces nombres sont-ils seulement ordinaux ou non? Puis-je opérer sur eux (par addition, ou multiplication, etc...), ou non?

Si oui ⟶ Niveau 3.

Si non, ils sont seulement ordinaux ⟶ Niveau 2.

La réponse à ces questions une fois trouvée, le choix du type de procédé (I ou II), et parmi les procédés d'un même type de la "bonne" représentation (lorsque plusieurs sont possibles) dépendra essentiellement de raisons psychologiques (dessin plus ou moins clairement "lisibles").

Dans tous les cas, il est toujours recommandé :

- d'essayer plusieurs solutions avant de prendre une décision,
- d'indiquer par une légende suffisamment explicite le niveau de signification auquel le dessin devra être lu.

Exercice : Un dessin, sans légende, se trouve sur la couverture du bulletin "Mathématiques et Sciences Humaines". La recherche de ses significations (il en a plusieurs) avait naguère été mise au concours. Parmi les quelques dizaines de réponses reçues, une seule explicitait la structure géométrique de la figure; aucune n'en donnait une interprétation.

Peut-être quelques lecteurs auront-ils la curiosité de réexaminer cette figure à la lueur de ce qui vient d'être dit?

\- - - - - - - - - -