MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

B. ROY

Une introduction au calcul des probabilités

Mathématiques et sciences humaines, tome 2 (1963), p. 3-13
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__2__3_1>

B. ROY

UNE INTRODUCTION AU CALCUL DES PROBABILITES

Ce texte de Bernard ROY est celui du chapitre d'introduction d'un livre à paraître dans les monographies de la Société Française de Recherche Opérationnelle : "Aléas Numériques et Distributions de Probabilité Usuelles". Qu'il nous soit permis de remercier ici l'auteur et la S.O.F.R.O. de nous avoir autorisés à publier cette introduction en "Bonnes feuilles" avant la sortie de l'ouvrage.

Section A: ALEAS et PROBABILITE

1. CONCEPTS FONDAMENTAUX

La vie économique et sociale fourmille de phénomènes soumis à des causes innombrables et accidentelles dont l'enchevêtrement nous échappe. Ce sera par exemple le cas du montant d'une facture, de l'état d'un stock, de la panne d'une machine, de l'arrivée d'un bateau dans un port, de la récolte d'un produit agricole, de l'évolution d'une population, des migrations journalières.... Les grandeurs liées à de tels phénomènes ne peuvent donc être prédites avec certitude. Pourtant, des problèmes importants tels que ceux posés par la trésorerie, la gestion des stocks, le renouvellement des matériels, l'équipement portuaire, les marchés agricoles, les investissements scolaires, les plans d'urbanisme..., obligent à raisonner sur ces grandeurs et, parfois même, à les intégrer dans un modèle. C'est précisément à ce souci que répond le concept de probabilité ainsi que les axiomes sur lesquels se fonde le calcul des probabilités.

a) Epreuves - évènement - aléas

Les trois concepts recouverts par ces mots ne doivent jamais être confondus.

On désigne généralement par épreuve une expérience dont l'issue finale est soumise au hasard: il faut entendre par là qu'elle dépend d'une foule de compétitions successives et instables qui la rendent aléatoire.

Un évènement est dit lié à une épreuve si sa genèse dépend précisément de l'issue de cette épreuve. On peut parler de l'ensemble de tous les évènements liés à une épreuve: on le nomme souvent ensemble fondamental.

Enfin, nous appellerons aléa n'importe quelle caractéristique commune à tout ou partie des évènements liés à une épreuve. Cette caractéristique peut être un nombre, auquel cas nous dirons qu'il s'agit d'un aléa numérique (1). On peut être amené à considérer des aléas plus complexes tels qu'un groupe de nombres (aléa vectoriel) ou une fonction (aléa fonctionnel).

Voici deux exemples simples qui pourront aider à comprendre l'importance et la spécificité de ces trois concepts.

Supposons qu'on analyse la clientèle d'une entreprise (en vue, par exemple, d'améliorer sa trésorerie ou d'organiser la gestion simultanée des approvisionnements et des stocks). L'épreuve pourra apparaître comme le procédé qui conduit à considérer un client (premier arrivé, tirage dans un fichier). L'aléa étudié pourra être le lieu de résidence du client ou la valeur de sa dernière commande. L'évènement sera alors "PARIS" ou "500 NF".

Considérons des éléments (individus ou objets) susceptibles d'être comparés à des fins précises par une population. Si l'on désire connaître les préférences de cette population, on pourra être amené à soumettre ces objets à un échantillon d'individus en demandant à chacun, par exemple, de les classer par préférence décroissante: ceci constitue une épreuve; l'aléa étudié est l'ordre total servant à exprimer la préférence, l'évènement sera alors tel rangement effectué par un individu spécifié.

b) Notion de probabilité

L'évènement qu'engendrera une épreuve est généralement non prévisible. La probabilité vise une mesure de l'incertitude qui accompagne un évènement quant à l'éventualité de sa réalisation à l'issue d'une épreuve.

On remarquera tout d'abord que, telle qu'elle est ressentie, cette incertitude apparait comme une grandeur repérable: les mots "égale" ou "plus grande" ne sont pas dénués de sens à son égard et lui sont même couramment appliqués. Il est donc raisonnable de songer à repérer par un nombre le degré de certitude attaché à la réalisation d'un évènement. Ce nombre, appelé probabilité, varie, par convention, de 0 à 1 et croît avec le degré de certitude relatif à la réalisation de

(1) Ce terme proposé par M. MORLAT nous paraît préférable à celui de variable aléatoire: le mot "variable" est, en effet, déjà chargé de trop de significations, il incite à des rapprochements avec l'analyse, souvent néfastes pour la bonne compréhension de ce nouveau concept.

l'évènement: il vaut 0 lorsque cette réalisation est quasi-impossible, et 1 lorsqu'elle est quasi (1) certaine.

Ni la définition qui précède, ni les commentaires qui l'accompagnent ne permettent d'attribuer, dans un cas précis, une valeur au repère probabilité. Pour le chiffrer, on peut songer, dans un premier temps, à des considérations d'ordre:

- subjectif: ce sera par exemple le cas d'un évènement dont on ne sait que très peu de choses et qui revêt un caractère exceptionnel: déclenchement d'une grève, d'une guerre;

- expérimental: ce sera par exemple le cas lorsqu'une série assez longue d'épreuves identiques permet d'observer la fréquence avec laquelle se produit l'évènement: panne d'une machine, respect d'un délai;

- logique: ce sera par exemple le cas lorsque des raisons de symétrie ou de subordination justifient l'égalité ou l'inégalité des probabilités attachées à deux évènements (la probabilité de l'un étant déjà connue): pannes d'un matériel identique à un autre ou plus fragile que lui.

La portée de ces considérations demeure toutefois fort limitée tant qu'elles ne sont pas renforcées par un système d'axiomes permettant, en particulier, de calculer la probabilité de certains évènements à partir de celle attribuée à d'autres auxquels ils se trouvent logiquement reliés.

Il nous faut maintenant, avant même de présenter (voir 2) le système d'axiomes couramment admis, insister sur le fait que c'est lui qui fait de la probabilité une véritable mesure de l'incertitude. Si elle se bornait à être un simple repère sur lequel (et par conséquent avec lequel) aucun calcul n'est possible, l'étude des aléas, aussi bien que le raisonnement dans l'incertain ne se trouveraient guère facilités par l'introduction de cette notion.

Il importe de conserver présent à l'esprit tout ce qu'implique cette définition de la probabilité, sous peine d'exécuter des calculs formels dont le résultat serait difficilement interprétable, voire même absurde. Il risque, en particulier, d'en être ainsi chaque fois que:

- l'épreuve est mal définie (probabilité qu'un gisement donné ait une réserve supérieure à un nombre fixé de mètres cubes): il ne faut pas oublier en effet que la probabilité n'a de sens que relativement à une épreuve, et tout ce qui vient modifier l'épreuve elle-même ou la connaissance que l'on en a est susceptible de modifier la probabilité d'un évènement qui lui est lié;
- le raisonnement fait intervenir des probabilités subjectives établies sans référence au système d'axiomes (un acheteur hésitant peut fort bien déclarer, devant trois modèles de voitures, que chacun d'eux a la probabilité 1/2 d'entrer en sa possession lors de son prochain achat): il ne faut pas croire que la probabilité, telle qu'on vient de la définir, s'identifie nécessairement au degré d'incertitude tel qu'il est ressenti et que celui-ci satisfait obligatoirement aux axiomes qui suivent.

(1) Pour des raisons délicates à exposer ici on est parfois amené à attribuer la probabilité 0 ou 1 à un évènement dont la réalisation n'est pas complètement impossible ou absolument certaine.

2. AXIOMES DE BASES

Dans tout ce qui suit, si e désigne un évènement lié à une épreuve, nous noterons $Pr(e)$ (1) la probabilité qu'il se réalise à l'issue de cette épreuve.

a) **Axiome des probabilités totales**

Considérons un ensemble fini ou dénombrable $e_1, e_2, .., e_n, ..$ d'évènements liés à une même épreuve.

L'évènement qui consiste en la réalisation de l'un au moins des évènements $e_1, e_2, .., e_n, ..$ est, par définition, l'évènement somme des évènements $e_1, e_2, .., e_n, ..$ et on le notera :

$$e_1 + e_2 + .. + e_n + ..$$

Deux de ces évènements sont dits incompatibles si leur réalisation simultanée est impossible.

Ainsi, par exemple, l'étude évoquée plus haut concernant la valeur des commandes passées à une entreprise peut conduire à l'introduction d'un évènement e_i dont la réalisation signifie que le montant de la commande d'un client est exactement de i milliers de Fr (on supposera que toutes les sommes sont arrondies au millier de Fr). Les évènements $e_1, e_2, .., e_n, ..$ forment alors un ensemble d'évènements tous deux à deux incompatibles et l'évènement :

$$e_1 + e_2 + .. + e_n$$

se réalise lorsque le montant de la commande considérée est inférieur ou égal à n milliers de Fr.

AXIOME DES PROBABILITÉS TOTALES

Soient $e_1, e_2, .., e_n, ..$ un ensemble d'évènements liés à une même épreuve et tous deux à deux incompatibles. On a :

$$Pr(e_1 + e_2 + .. + e_n + ..) = Pr(e_1) + Pr(e_2) + .. + Pr(e_n) + .. \qquad (I.1)$$

Nous ne discuterons pas cet axiome, d'ailleurs assez naturel, si l'on remarque que l'évènement du premier nombre ne se réalise que si l'un quelconque, mais nécessairement un seul, des évènements du second se produit.

Appliqué à l'exemple précédent, cet axiome permet de calculer la probabilité d'avoir une facture dont le montant est au plus égal à n milliers de Fr à partir des probabilités élémentaires des différents montants $1, 2, .., n$.

CONSÉQUENCES

1) Si les évènements $e_1, e_2, .., e_n, ..$ sont non seulement deux à deux incompatibles, mais forment de plus un ensemble exhaustif, c'est-à-dire tels qu'à l'issue d'une épreuve l'un d'entre eux se réalise nécessairement, il vient :

$$Pr(e_1) + Pr(e_2) + .. + Pr(e_n) + .. = Pr(e_1 + e_2 + .. + e_n + ..) = 1$$

(1) Il serait sans doute préférable de faire figurer explicitement l'épreuve (grâce à une lettre placée en indice par exemple) dans cette notation, mais une telle écriture nous a semblé trop lourde pour être retenue ici.

2) Si les n évènements $e_1, e_2, \ldots, e_n$ forment un ensemble exhaustif fini d'évènements tous deux à deux incompatibles, et tels qu'il existe une parfaite symétrie entre les causes qui engendrent chacun d'eux, il vient :

$$Pr(e_1) + Pr(e_2) + \ldots + Pr(e_n) = 1 \quad \text{et} \quad Pr(e_1) = Pr(e_2) = \ldots = Pr(e_n)$$

d'où :

$$Pr(e_i) = 1/n \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

On dit alors que les évènements e_i sont équiprobables.

3) On appelle évènement complémentaire d'un évènement e l'évènement $\overline{e}$ qui consiste en la non-réalisation de l'évènement e. Puisque les évènements e et $\overline{e}$ forment un ensemble exhaustif de deux évènements incompatibles, il vient :

$$Pr(\overline{e}) = 1 - Pr(e) \tag{I.2}$$

b) **Axiome des probabilités composées**

Considérons deux évènements compatibles e' et e" liés à une même épreuve.

L'évènement qui consiste en la réalisation simultanée de e' et e" est, par définition, l'évènement produit des deux évènements e' e" et on le notera :

$$e'.\,e''.$$

Il est fréquent (comme nous le verrons dans les chapitres ultérieurs) que l'on ait à raisonner sur une épreuve dont on sait a priori qu'elle donne naissance à e' (par exemple). Il est bien clair que, pour une telle épreuve, la probabilité de réalisation de e" n'a, en général, aucune raison d'être égale à celle que l'on attribue au même évènement quant à sa réalisation à l'issue d'une épreuve dont on ne sait rien. Ainsi, par exemple, la probabilité de recevoir le paiement d'une facture dont le montant dépasse n milliers de Fr peut être très différente selon que l'on ne considère que les sociétés clientes ayant leur siège social dans le département de la Seine ou, au contraire, tous les clients, sans rien supposer de leur nature ni de leur localisation géographique.

Il est donc nécessaire d'introduire des probabilités dites conditionnelles, c'est-à-dire qui se rapportent à des épreuves ayant lieu dans des conditions particulières et qui tiennent compte de l'information supplémentaire qu'apportent ces conditions. Dans tout ce qui suit, on notera Pr(../..) de telles probabilités conditionnelles: l'évènement considéré étant précisé en avant de la barre oblique et les conditions particulières après celle-ci. Par exemple :

$$Pr(e''/e')$$

désigne la probabilité conditionnelle de réalisation de e" à l'issue d'une épreuve dont on sait qu'elle engendrera aussi e'.

AXIOME DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

Soient e' e" deux évènements liés à une même épreuve. On a :

$$Pr(e''/e') = \frac{Pr(e'.e'')}{Pr(e')} \tag{I.3}$$

On remarquera que l'on a toujours, quels que soient e' et e" puisque la réalisation de $e'.e''$ est subordonnée à celle de e' (cf. 1.b) :

$$Pr(e') \geqq Pr(e'.e'') \geqq 0$$

d'où :

$$0 \leqq \frac{Pr(e'.e'')}{Pr(e')} \leqq 1 .$$

Cet axiome peut paraître encore plus naturel que le précédent. Il implique en particulier :

- $Pr(e''/e') = 0$ si et seulement si $Pr(e'.e'') = 0$: or, ces égalités expriment toutes les deux l'incompatibilité de e' et e'' ;
- $Pr(e''/e') = 1$ si et seulement si $Pr(e'.e'') = Pr(e')$: or, ces égalités expriment toutes les deux que la réalisation de e' entraîne celle de e'' (la réciproque pouvant être fausse).

CONSÉQUENCES

1) On s'assurera, à titre d'exercice, que si l'une quelconque des égalités (I.4) ci-après est vérifiée, alors les deux autres le sont aussi :

$$Pr(e''/e') = Pr(e'') \qquad Pr(e'.e'') = Pr(e').Pr(e'') \qquad Pr(e'/e'') = Pr(e') \qquad (I.4)$$

Lorsque ces formules sont satisfaites, on dit que les évènements e' et e'' sont <u>indépendants</u>: cela signifie, en langage clair, que toute connaissance relative à l'un ne modifie en rien la probabilité d'occurrence de l'autre.

2) En utilisant les axiomes des probabilités totales et composées, on peut établir la formule suivante :

$$Pr(e'+e'') = Pr(e') + Pr(e'') - Pr(e'.e'') \qquad (I.5)$$

donnant la probabilité de l'évènement somme de deux évènements e' et e'' que l'on ne suppose pas incompatibles; dans le cas particulier où ils le seraient, la formule (I.5) redonne naturellement la formule (I.1).

<u>Démonstration</u>: Les évènements e' et $e''.\overline{e'}$ sont toujours incompatibles et vérifient :

$$e'+e'' = e'+e''.\overline{e'}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} Pr(e'+e'') &= Pr(e') + Pr(e''.\overline{e'}) && \left[\text{d'après (I.1)}\right] \\ &= Pr(e') + Pr(e'').Pr(\overline{e'}/e'') && \left[\text{d'après (I.3)}\right] \\ &= Pr(e') + Pr(e'')\left[1-Pr(e'/e'')\right] && \left[\text{d'après (I.2)}\right] \\ &= Pr(e') + Pr(e'') - Pr(e'.e'') && \left[\text{d'après (I.3)}\right] \end{aligned}$$

3) Il est facile de généraliser la formule (I.3) au cas d'un nombre fini quelconque d'évènements. On pourra le faire à titre d'exercice. Voici le résultat dans le cas de trois évènements :

$$Pr(e'.e''.e'') = Pr(e').Pr(e''/e').Pr(e''/e'.e'')$$

Les formules (I.4) et (I.5) peuvent alors être généralisées dans les mêmes conditions.

3. ALEAS NUMERIQUES

Par définition, nous appelons (cf. 1.a) aléa numérique n'importe quelle caractéristique X commune à tout ou partie des évènements liés à une épreuve, pourvu que l'état de cette caractéristique soit repérable à l'aide d'un nombre dont la valeur x dépend naturellement de l'issue de l'épreuve.

Cette définition souligne la différence profonde qui existe entre l'aléa numérique X et la valeur particulière x qu'il prend lorsque l'évènement $X = x$ se réalise. Afin d'éviter toute confusion, nous noterons toujours les aléas numériques avec des lettres majuscules, tandis que les valeurs qu'ils prennent ou peuvent prendre à l'issue d'une épreuve seront toujours désignées par des lettres minuscules.

La majeure partie des problèmes technologiques, commerciaux ou sociaux que pose la gestion d'une entreprise ou d'une nation, imposent, pour être résolus, le maniement commode d'aléas numériques qui s'introduisent tout naturellement. Ce sera par exemple: le solde mensuel d'un compte, le délai de réapprovisionnement d'un stock, la durée de vie d'une lampe, la longueur d'une file d'attente, la production annuelle d'une céréale, le nombre annuel de naissances dans une population, le nombre journalier des déplacements interquartiers ... dans l'étude des problèmes évoqués en commençant ce chapitre.

Le mode de prise en compte des aléas numériques dans la préparation des décisions relève schématiquement de l'une des deux approches suivantes (ou de leur combinaison car elles ne s'excluent nullement) :

- la première, intrinsèque, repose sur la manière dont la probabilité se <u>distribue</u> sur l'ensemble des valeurs possibles pour l'aléa étudié;
- la seconde, extrinsèque, se fonde sur la connaissance des <u>liaisons</u> qui existent entre l'aléa étudié et d'autres phénomènes.

a) Distribution de probabilité

Soit X un aléa numérique quelconque. On nommera <u>support</u> de cet aléa l'ensemble des valeurs x qu'il peut prendre. On le notera S_X. Cet ensemble peut être fini, infini, dénombrable ou continu selon la nature de X et les conventions faites à ce sujet.

A chaque valeur $x \in S_X$ (1) on peut associer l'évènement $X = x$. Ces évènements sont tous deux à deux incompatibles et forment un ensemble qui, pour l'étude de l'aléa X, apparaît comme exhaustif. Il en résulte, d'après l'axiome des probabilités totales, que la somme des probabilités affectées à chacun des évènements de cet ensemble vaut 1 (2). C'est pourquoi l'on est souvent amené à dire que la probabilité se distribue sur le support S_X de la même façon qu'une masse

(1) Ce signe se lit "appartient à" et exprime le fait que l'élément désigné par le symbole de gauche appartient à l'ensemble indiqué à droite.

(2) On remarquera toutefois que, tel qu'il a été énoncé, l'axiome des probabilités totales est limité au cas d'un ensemble fini ou infini dénombrable. Son extension et son application au cas où S_X a la puissance du continu présentent quelques difficultés conceptuelles qu'il n'est pas indispensable d'approfondir dans ce livre. Le lecteur intéressé par ces problèmes pourra consulter [0].

unité peut être répartie sur un axe. On se réfère à ce mode de répartition en parlant de distribution de probabilité: la connaissance de cette distribution pour un aléa X le caractérise complètement et permet en particulier de calculer la probabilité de n'importe quel évènement associé à S_X.

PROBABILITÉ ÉLÉMENTAIRE ET DENSITÉ DE PROBABILITÉ

Dans le cas où S_X est un ensemble fini ou infini dénombrable :

$$S_X = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\right\}$$

La fonction

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

fournit une première représentation de la distribution de probabilité que nous appellerons probabilité élémentaire.

Si l'on considère maintenant un aléa à support continu, on constate que l'on aura nécessairement $\Pr(X = x) = 0$ sauf, peut-être pour un nombre fini ou infini dénombrable de valeur de x. Il est clair que si l'on veut généraliser la notion de probabilité élémentaire, il faut maintenant raisonner non plus sur les valeurs possibles x, mais sur de petits intervalles. On est ainsi amené à introduire la fonction :

$$f_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta} \Pr\,(x \leqq X < x + \Delta)$$

En général, lorsque Δ tend vers 0, la fonction $f_\Delta(x)$ tend vers une limite $f(x)$ appelée densité de probabilité au point x. Il vient :

$$f(x).dx = \Pr\,(x \leqq X < x + dx)\,.$$

Il se peut aussi que $f_\Delta(x)$ augmente indéfiniment avec $\frac{1}{\Delta}$ pour certaines valeurs particulières $x_1, x_2, \ldots$ de x.

Dans ce cas :

$$\Delta . f_\Delta(x) = \Pr(x \leqq X < x + \Delta)$$

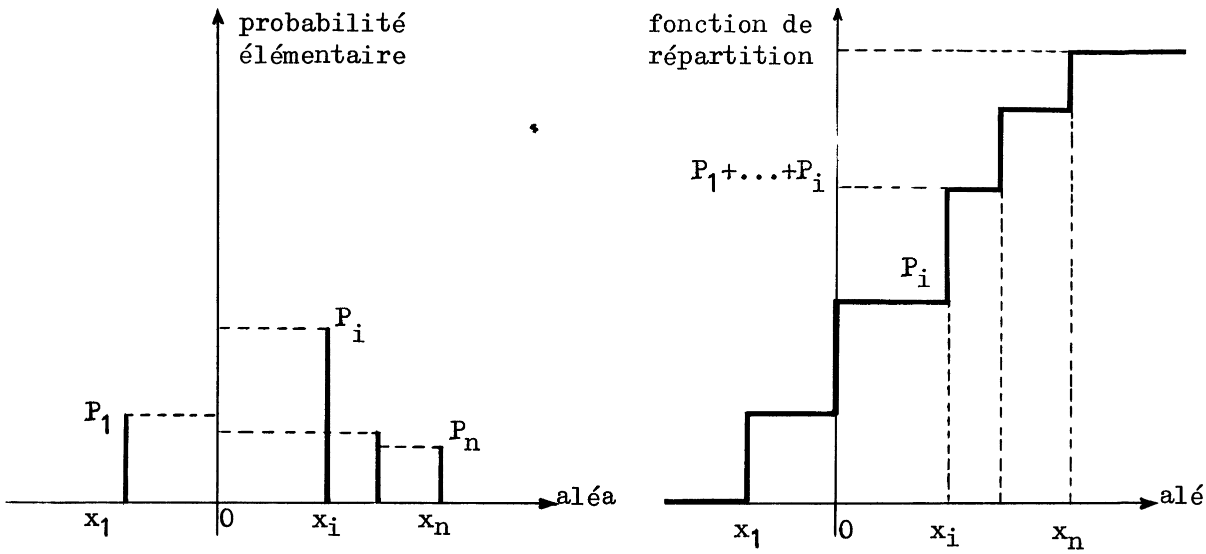
admettra vraisemblablement une limite qui apparaît comme la probabilité de réalisation des évènements $X = x_1$, $X = x_2$ ..

Par conséquent, en ces points $x_1, x_2, \ldots$ il n'y a pas de densité mais une probabilité élémentaire (au sens défini plus haut).

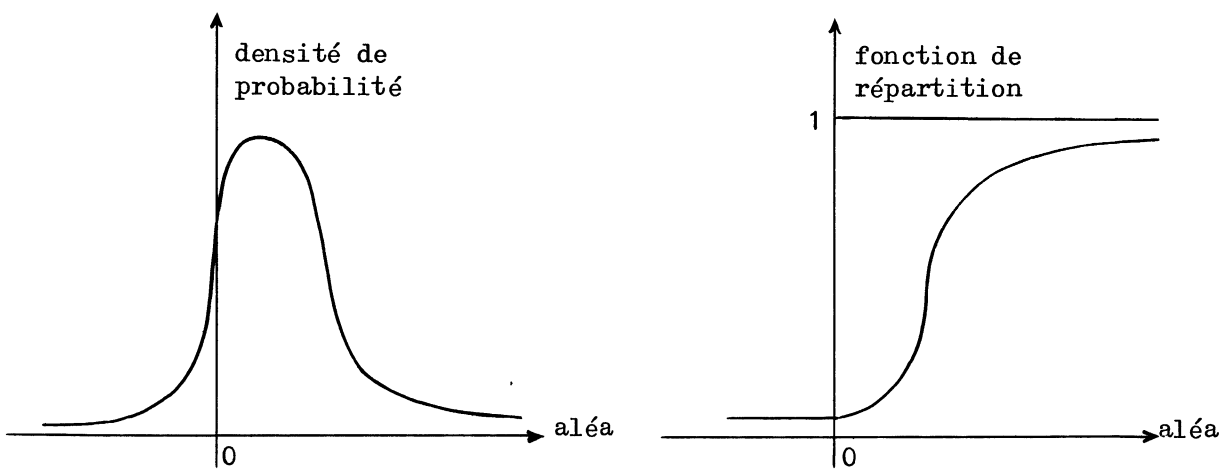
Si l'on peut concevoir des cas plus complexes, probabilité élémentaire et densité de probabilité sont, en fait, les seuls utiles en pratique. Ils conduisent à trois types de distribution que nous nommerons (voir figure I.1) :

- Type discret: Distribution représentable sur la totalité du support par une fonction de probabilité élémentaire.
- Type continu: Distribution représentable sur la totalité du support par une densité de probabilité.
- Type mixte: Distribution représentable par une densité de probabilité définie sur une partie du support et une fonction de probabilité élémentaire définie sur la partie complémentaire.

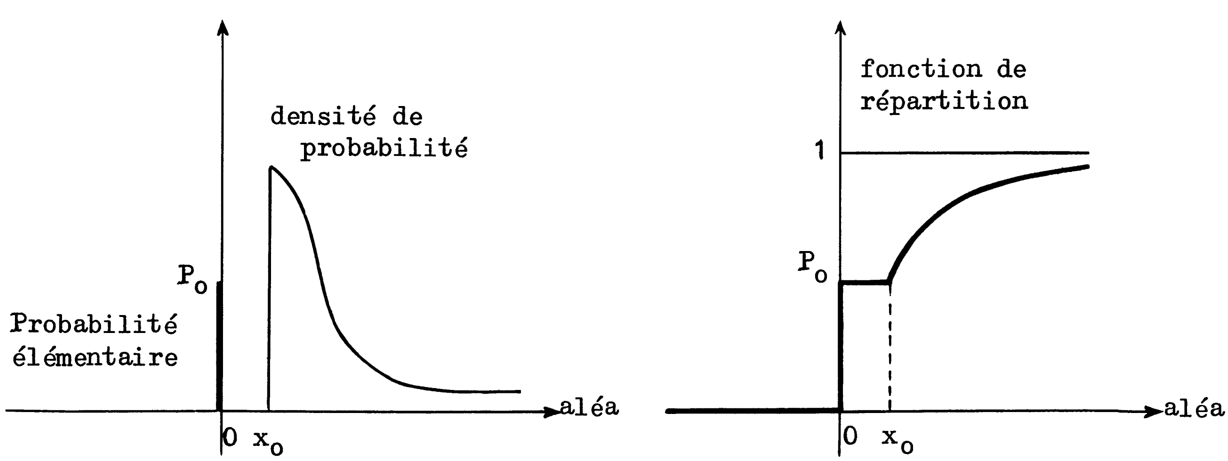
Désormais, nous limiterons l'acception du terme distribution de probabilité



Exemple d'aléa discret (support $x_1 \,..\, x_i \,..\, x_n$)



Exemple d'aléa continu (support $-\infty \,..\, +\infty$)



Exemple d'aléa mixte

(probabilité élémentaire P_o à l'origine – densité sur l'intervalle $x_o, +\infty$)

Tableau I.1

celle appartenant à l'un de ces trois types et, par conséquent, ce livre ne traitera que des aléas discrets, continus ou mixtes qui leurs sont respectivement associés.

On remarquera que les distributions de type mixte apparaissent comme la superposition d'une fonction de probabilité élémentaire et d'une densité de probabilité. La plupart des concepts introduits et des résultats obtenus pour les aléas discrets ou continus se généraliseront sans difficulté aux aléas mixtes. C'est pourquoi ces derniers seront assez souvent laissés de côté. Il ne faudrait pas pour autant, ni en mésestimer l'importance, ni en surestimer la complexité.

FONCTION DE REPARTITION

Voici un second mode de représentation des distributions de probabilité qui présente l'avantage de n'impliquer aucune distinction. Soit X un aléa numérique dont le support peut être continu ou non. A tout nombre réel x (appartenant ou non au support) on peut associer l'évènement $X < x$ et poser :

$$F(x) = \Pr(X < x)$$

$F(x)$ est appelée <u>fonction de répartition</u> :

- elle vaut 0 aussi longtemps que x reste inférieur à la plus petite valeur de S_X,
- elle vaut 1 à partir du moment où x dépasse la plus grande valeur de S_X,
- elle est constamment non décroissante et continue à gauche $\left[\lim\limits_{h \to 0} F(x-h) = F(x)\right]$.

Soient x et y deux nombres tels que $x < y$; il vient :

$$\Pr(X < y) = \Pr\left[(X < x) + (x \leqq X < y)\right]$$

d'où l'on déduit, d'après l'axiome des probabilités totales:

$$\Pr(x \leqq X < y) = F(y) - F(x) \qquad (I.6)$$

On justifiera à partir de cette formule les deux résultats suivants qui jettent respectivement le pont entre fonction de répartition et densité de probabilité, fonction de répartition et probabilité élémentaire :

- la densité de probabilité n'est autre que la dérivée de la fonction F $F'(x) = f(x)$ et ces deux fonctions existent simultanément; si la densité existe en chaque point, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx \qquad (I.7)$$

- la probabilité élémentaire est marquée par un saut de la fonction F dont l'amplitude est égale à cette probabilité; la fonction de répartition d'un aléa à support fini ou infini dénombrable est donc une fonction en escalier. Si S_X se réduit à une seule valeur x_0 (valeur certaine), la fonction de répartition se réduit à une seule marche de hauteur 1 (échelon unité) située au point x_0.

La figure I.1 montre l'allure de la fonction de répartition correspondant aux trois grands types de distributions.

b) **Liaisons en probabilité**

Considérons un aléa numérique X et un autre aléa A (1), non nécessairement numérique (la catégorie socio-professionnelle ou le lieu de résidence par exemple). Désignons par a un état ou un groupe d'états possibles pour l'aléa A (ouvrier, département de la Seine par exemple). Les aléas X et A sont dits indépendants si les évènements :

$$X < x \qquad \text{et} \qquad A \in a$$

le sont (au sens défini au 2.b quels que soient x et a. On remarquera que, dans certains cas, cette indépendance peut être réalisée sur une partie de S_X seulement, ou pour une famille d'états ou groupes d'états de A ; on dit alors qu'il y a indépendance locale. Lorsque les aléas X et A ne sont pas indépendants, on dit encore qu'ils sont corrélés.

La probabilité conditionnelle :

$$Pr\ (X < x/A \in a) = F_a(x)$$

s'appelle fonction de répartition conditionnelle de X lorsque $A \in a$. S'il y a indépendance, la fonction $F_a(x)$ est toujours la même quel que soit a. Si, au contraire, X est lié fonctionnellement à A, c'est-à-dire si l'état a de A impose à X une valeur x_a, $F_a(x)$ est alors l'échelon unité situé au point x_a.

Supposons maintenant que A soit un aléa numérique Y. On peut alors introduire l'aléa vectoriel (à deux dimensions) (X,Y).

Les notions de support, distribution de probabilité, probabilité élémentaire, densité de probabilité, fonction de répartition, définies ci-dessus pour les aléas numériques s'étendent sans difficulté aux aléas vectoriels (à un nombre quelconque de dimensions). La fonction de répartition, par exemple, sera une fonction F(x,y) des deux variables x et y définie par :

$$F(x,y) = Pr\left[(X < x).(Y < y)\right]$$

et peut s'écrire, en introduisant les fonctions de répartition a priori G(x) et H(y) de X et Y, ainsi que leur fonction de répartition conditionnelle :

$$G_y(x) \quad \text{et} \quad H_x(y) \qquad\qquad \text{(cf. formule I.3) :}$$

$$F(x,y) = G(x).H_x(y) = H(y).G_y(x) \qquad (I.8)$$

Lorsqu'il y a indépendance, cette dernière formule devient :

$$F(x,y) = G(x).H(y)$$

et, inversement, lorsque cette formule et vérifiée pour tous les couples x,y de deux nombres, il y a indépendance.

(1) Ce qui suit s'applique également au cas où A est un facteur dont l'état est connu ou contrôlable.