MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

G. KREWERAS

Les décisions collectives

Mathématiques et sciences humaines, tome 2 (1963), p. 25-35
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1963__2__25_0>

G. KREWERAS

LES DECISIONS COLLECTIVES

La façon dont les collectivités, les assemblées prennent des décisions ou émettent des opinions est souvent une cause d'étonnement, voire de scandale, pour les esprits "rationnels" : n'arrive-t-il pas fréquemment qu'une assemblée se déjuge, vote des motions contradictoires ?

Ce caractère d'irrationalité qui semble inhérent aux opinions collectives peut être lié à la procédure utilisée pour former l'opinion collective à partir des opinions individuelles; et Condorcet qa montré qu'en effet, la précédure majoritaire pouvait conduire à des contradictions du type "x préférable à y, y préférable à z, et cependant z préférable à x" dans l'opinion émise par une assemblée.

En fait, le résultat capital démontré par K. J. Arrow, c'est que souveraineté (droit d'émettre n'importe quelle opinion) et une certaine forme de cohérence, ou de loyauté, vis à vis des opinions émises sont incompatibles lorsqu'il s'agit d'opinions collectives: aucune procédure de vote, aucune règle (y compris celle qui consiste à ne pas avoir de règle) ne permet à l'opinion collective de satisfaire simultanément et en toute circonstances à deux exigences.

Arrow nous renvoie donc aux opinions individuelles comme étant les seules qui soient susceptibles de "rationalité": mais est-il bien vrai que les opinions individuelles soient elles-mêmes exemptes de contradiction ? La question mérite que l'on y regarde de près; aussi M. G. Kreweras, avant de nous introduire dans les paradoxes de la logique des opinions collectives nous fournit-il dans la première partie de son article, des raisons de confirmer notre croyance en la rationalité des décisions individuelles en montrant que celle-ci équivaut à des hypothèses très naturelles, et très pauvres, sur le mécanisme des choix.

M. BARBUT

●

I. PREFERENCES INDIVIDUELLES

Les verbes "décider" et "choisir" sont presque synonymes; ils seront regardés comme tels dans ce qui suit.

Choisir c'est ne prendre (ou n'adopter) qu'une partie de ce qui nous est offert. C'est donc, si l'on nous offre A, ne prendre qu'une partie de A.

Formalisation naturelle: Si A est lui-même une partie, non vide, d'un ensemble Ω ($A \in \mathcal{P}(\Omega) - \emptyset$), une règle de choix φ consiste à faire correspondre à A un B inclus dans A, B n'étant pas vide non plus :

$$A \xrightarrow[\varphi]{} B \subset A$$

Nous appellerons donc règle de choix dans Ω toute application de $\mathcal{P}(\Omega) - \emptyset$ dans lui-même, telle que :

$\varphi(A) \subset A$ pour toute partie A et nous demanderons en outre qu'elle satisfasse à l'exigence suivante :

I. $\quad A' \subset A$ et $(A' \cap \varphi(A) \neq \emptyset \Longrightarrow \varphi(A') \subset A' \cap \varphi(A))$

Ceci signifie que si l'on nous offrait un "éventail" plus restreint mais comprenant encore une partie au moins de ce que nous avons choisi, c'est dans cette même partie que nous choisirons.

En désignant par a et b des éléments de Ω, écrivons en abrégé <u>aRb</u> l'hypothèse que

$$a \in \varphi\{a, b\}$$

et montrons que l'on définit ainsi sur Ω une relation de <u>préordre complet</u>. En effet :

1°) La relation est <u>complète</u>, car $\varphi\{a, b\}$ ne peut être que $\{a\}$ ou $\{b\}$ ou $\{a, b\}$; dans le premier cas on a aRb, dans le second bRa, et dans le troisième aRb et bRa à la fois.

2°) La relation est <u>réflexive</u> (aRa), car $a \in \varphi\{a, a\}$ $(= \varphi\{a\})$.

3°) La relation est <u>transitive</u>. Pour l'établir supposons que l'on ait

$$a \in \varphi\{a, b\}$$
et
$$b \in \varphi\{b, c\}$$

avec a, b et c distincts, et montrons qu'alors $a \in \varphi\{a, c\}$. Considérons pour cela $\varphi\{a, b, c\}$. Si l'on avait $\varphi\{a, b, c\} = \{c\}$, on aurait, en vertu de l'exigence I, $\varphi\{b, c\} = \{c\}$, contrairement à l'hypothèse que $b \in \varphi\{b, c\}$. Si l'on avait $\varphi\{a, b, c\} = \{b\}$ ou $\{b, c\}$, on aurait, toujours en vertu de I, $\varphi\{a, b\} = \{b\}$, contrairement à l'hypothèse que $a \in \varphi\{a, b\}$. Donc $a \in \varphi\{a,b,c\}$, et par conséquent, en vertu de I, $a \in \varphi\{a, c\}$.

Le préordre complet ainsi défini correspond à ce qui est communément appelé <u>ordre de préférence</u>; le cas où $\varphi(A) = A$ correspond à la notion d'indifférence entre les éléments de A ("ex-aequo").

Si l'on ne veut pas admettre l'indifférence, il faut supposer que $\varphi(A)$ se compose, quel que soit A, d'un seul élément de A ; cela permet de se contenter d'un énoncé simplifié de l'axiome I, qui devient

I'. $\quad \varphi(A) \subset A' \subset A \Longrightarrow \varphi(A') = \varphi(A)$.

La relation de préférence aRb est alors en outre <u>antisymétrique</u> (aRb et bRa $\Longrightarrow a = b$). On dit aussi dans ce cas que l'ordre de préférence est un ordre strict, et aRb signifie "a est préféré à b".

<u>Dénombrement</u>. Si le cardinal de Ω est ω, le nombre d'ordres stricts est $\omega! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times \omega$. Le nombre de préordres complets P_ω est naturellement plus élevé: la suite des P_ω peut se former de proche en proche par le pro-

cédé suivant, qui fait intervenir les nombres binomiaux $\binom{\omega}{n}$ (nombre de parties de n éléments dans Ω):

$$P_\omega = 1 + \binom{\omega}{1} P_1 + \binom{\omega}{2} P_2 + \dots + \binom{\omega}{\omega-1} P_{\omega-1}.$$

On peut montrer qu'une très bonne approximation de P_ω s'obtient en multipliant $\omega!$ par la moitié de la puissance $(\omega+1)$-ième du logarithme binaire de e (lequel est voisin de 1,442). Tableau jusqu'à $\omega = 6$:

ω	$\omega!$ (ordres stricts)	P_ω (préordres complets
1	1	1
2	2	3
3	6	13
4	24	75
5	120	541
6	720	4683

Dans la suite, pour simplifier, il ne sera pratiquement plus question que des ordres stricts.

II. CHOIX MAJORITAIRES: L'EFFET CONDORCET

Soit V un ensemble d'individus (ou "votants"), de cardinal v, et soient a et b deux options (éléments de Ω), que l'on suppose offertes à chaque votant.

La logique formelle usuelle s'intéresse essentiellement aux propositions telles que les suivantes (ou leurs négations) :

$\exists\, i \in V$ $\quad aR_i b$ $\quad$ (il existe au moins un votant qui préfère a à b)

$\forall\, i \in V$ $\quad aR_i b$ $\quad$ (tous les votants préfèrent a à b).

La vie sociale oblige à prêter attention aux éventualités qui permettront de donner un sens à des propositions telles que "la collectivité préfère a à b", et cela à des conditions plus restrictives que $\exists$ mais moins restrictives que $\forall$.

La convention la plus ancienne et la plus naturelle consiste à considérer la proposition entre guillemets comme synonyme de "il y a dans V plus d'individus préférant a à b que d'individus préférant b à a".

<u>Exemple:</u> $\Omega = \{a, b, c\}$ $\quad \omega = 3$

$V = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ $\quad v = 100$

Si les ordres (stricts) de préférence sont

abc	pour	33	des votants
bac	-	18	-
bca	-	12	-
cba	-	37	-
	(total)	100	

on voit que, au sens convenu, la collectivité adopte l'ordre (strict) de préférence bac, puisque b est préféré à a par 67 contre 33, a est préféré à c par 51 contre 49, et b est préféré à c par 63 contre 37.

Condorcet a attiré l'attention sur un fait d'aspect paradoxal, à savoir que la règle de majorité ne donne pas nécessairement naissance à un ordre de préférence collectif. Il en donne l'exemple suivant :

$$\Omega = \{a, b, c\} \qquad \omega = 3$$
$$V = \{1, 2, 3, \ldots, 60\} \qquad v = 60$$

Ordres de préférence individuels :

abc	pour	23	des votants
bac	-	2	-
bca	-	17	-
cab	-	10	-
cba	-	8	-
	(total)	60	

La collectivité, dans ce cas, préfère a à b (par 33 contre 27)
b à c (par 42 contre 18)
c à a (par 35 contre 25)

La préférence collective définie par la majorité n'est donc pas toujours transitive, c'est-à-dire ne permet pas toujours le choix collectif, du moins si l'on soumet celui-ci aux mêmes exigences logiques que le choix individuel.

Fréquence. La constatation de cet effet Condorcet met parfois certains mal à l'aise vis-à-vis du "principe démocratique". Une consolation pourrait être recherchée dans un dénombrement établissant que l'effet Condorcet est "rare".

Une description complète de toutes les "opinions" (c'est-à-dire des ordres de préférence) individuelles exige la spécification, pour chaque votant, de l'ordre de préférence qui est le sien. C'est donc une application de V dans l'ensemble des $\omega!$ ordres possibles, et il existe $(\omega!)^v$ telles applications. La "fréquence" est mesurée par la proportion d'entre elles qui produisent l'effet Condorcet.

Si $\omega = 3$, ce dénombrement donne, pour les premières valeurs impaires de v (on a exclu les paires pour n'avoir jamais d'ex-aequo) :

v = 3	fréquence 5,6 %
5	6,9 %
7	7,5 %
9	7,8 %

et l'on peut démontrer que, si v augmente indéfiniment, la fréquence ne dépasse jamais 8,8 %.

Ce résultat peut paraître rassurant. Malheureusement si l'on laisse au contraire v fixe et que l'on augmente ω, non seulement la fréquence croît nettement plus vite (elle dépasse déjà 17 % pour $v = 3$ et $\omega = 4$) mais il est aisé de montrer qu'elle tend vers 100 %.

III. LE THEOREME D'ARROW (forme simplifiée)

Puisque la règle majoritaire peut mettre en défaut la logique du choix, il y a lieu de rechercher si l'on pourrait y substituer d'autres règles, qui laisseraient cette logique intacte.

Kenneth Arrow a établi, que, sous des conditions qui paraissent aller de soi, les seules règles possibles sont d'un type non plus démocratique mais dictatorial.

Enoncé. La règle recherchée (appelons-la f) doit faire correspondre à n'importe lequel des $(\omega!)^v$ systèmes d'ordres de préférences individuels ou "états de l'opinion" l'un des $\omega!$ ordres de préférences possibles, qui sera alors réputé l'ordre collectif :

$$(R_1, R_2, \dots, R_v) \xrightarrow[f]{} R$$

Notons en passant qu'il y a a priori $(\omega!)^{(\omega!)^v}$ règles possibles. Comme nous supposerons (hypothèse essentielle) que $\omega \geqslant 3$, et aussi que $v \geqslant 2$ (sans quoi il n'y aurait pas de problème), il nous faut chercher f, dans le plus simple possible de tous les cas, parmi 6^{36} règles concevables (6^{36} = nombre de 29 chiffres).

Nous demanderons à la règle f de satisfaire aux deux exigences ("axiomes") suivantes :

I. - **Souveraineté de la collectivité :** la règle ne doit exclure a priori aucun ordre de préférence collectif; en d'autres termes l'application cherchée doit être surjective *.

II. - **Loyauté vis-à-vis des individus:** si le jeu de la règle à partir d'un certain état de l'opinion conduit à ce que la collectivité préfère x à y, et si dans un nouvel état tous ceux qui individuellement préféraient x à y continuent à faire de même, alors le jeu de la règle à partir de ce nouvel état doit encore conduire la collectivité à préférer x à y.

Ce qu'énonce le théorème, c'est que les seules règles satisfaisant à ces deux axiomes sont celles (il y en a exactement v) qui consistent à privilégier un individu particulier en définissant les préférences collectives comme étant précisément celles de cet individu, sans tenir aucun compte des autres.

Démonstration

Nous utiliserons, pour désigner en abrégé les "états de l'opinion", des lettres ρ, parfois accentuées, et nous noterons $E_\rho(xy)$ l'ensemble des individus qui, dans l'état ρ de l'opinion, préfèrent x à y. On a évidemment

$$E_\rho(xy) \cap E_\rho(yx) = \emptyset \qquad \text{et} \qquad E_\rho(xy) \cup E_\rho(yx) = V.$$

* Note: une fonction, ou application, d'un ensemble A à un ensemble B est dite surjective si chaque élément de B est image par cette fonction d'au moins un élément de A.

En effet, pour chaque état ρ de l'opinion, les votants peuvent être partagés en deux classes: ceux qui préfèrent x à y, et ceux qui préfèrent y à x.

Les deux axiomes peuvent ainsi s'écrire :

I. $\forall R, \quad \exists \rho \qquad f(\rho) = R$

II. $\forall x, y \quad (x \in \Omega\,, y \in \quad, x \neq y)$

$$\left.\begin{array}{c} x.f(\rho).y \\ \text{et} \\ E_{\rho'}(xy) \supset E_{\rho}(xy) \end{array}\right| \longrightarrow x.f(\rho').y$$

(La notation x R y signifie que, dans l'ordre de préférence R, x est avant y ; si $R = f(\rho)$, $xf(\rho)y$ se lit par conséquent: dans l'ordre de préférence collectif correspondant à l'état ρ de l'opinion, x est avant y).

Appelons "groupement" toute partie non vide de V ; il y a $2^V - 1$ groupements.

La règle f étant supposée choisie conformément aux axiomes, convenons de dire qu'un groupement D est "décisif pour la préférence xy " si, pour un ρ tel que $E_{\rho}(xy) = D$, on a $x.f(\rho).y$.

Si nous disons dans ce cas que D est "décisif" pour la préférence xy, c'est parce que, d'après l'axiome II, pour toute modification de l'état de l'opinion dans laquelle les membres du groupement D restent unanimes à préférer x à y, on aura toujours x avant y dans l'ordre de préférence collectif donné par la règle; l'accord des membres de D suffit donc à imposer la préférence x y .

Nous allons montrer successivement :

(A) que V est un groupement décisif pour n'importe quelle préférence;

(B) que tout groupement décisif pour une préférence particulière quelconque est décisif pour n'importe quelle préférence, c'est-à-dire constitue un "noyau dictatorial";

(C) que pour toute partition de V en deux groupements, l'un de ceux-ci est nécessairement un noyau dictatorial;

(D) que pour toute partition d'un noyau dictatorial en deux groupements, l'un de ceux-ci est encore un noyau dictatorial; d'où il résultera que tout noyau dictatorial peut être amenuisé progressivement jusqu'à ne plus pouvoir être partitionné en deux, c'est-à-dire à être un dictateur individuel.

(A) Si V n'était non-décisif pour une certaine préférence ab, soit ρ_0 un état tel que $E_{\rho_0}(ab) = V$; on aurait alors $b.f(\rho_0).a$ et $E_{\rho_0}(ba) = \emptyset$. N'importe quel état ρ étant tel que $E_{\rho}(ba) \supset E_{\rho_0}(ba)$, l'axiome II entraîne que $\forall \rho$, $b.f(\rho).a$; mais ceci est incompatible avec l'axiome I, qui exige que tout R, notamment un R tel que aRb, soit un $f(\rho)$. En d'autres termes, l'unanimité est toujours décisive.

(B) Soit D un groupement décisif pour une préférence particulière ab. Supposons

$D \neq V$ (sans quoi la proposition annoncée serait déjà contenue dans la proposition (A)), et considérons un état ρ' tel que

$$aR_i bR_i x \quad \text{pour tout} \quad i \in D$$

$$bR_j xR_j a \quad \text{pour tout} \quad j \notin D$$

Si $f(\rho') = R$, on a aRb puisque D est décisif pour ab, et bRx puisque l'unanimité est toujours décisive en vertu de (A). Donc aRx, puisque R est une relation d'ordre. Mais $E_{\rho'}(ax) = D$, donc D est décisif pour ax.

De "D décisif pour ab" on a déduit "D décisif pour ax quel que soit x". Symétriquement, de "D décisif pour ab" on peut déduire "D décisif pour yb quel que soit y".

Cela veut dire que, en représentant les $\omega(\omega-1)$ préférences binaires concevables en un tableau carré privé de sa diagonale, on peut conclure d'une case particulière quelconque à toutes les cases de sa ligne et de sa colonne; la figure ci-contre montre comment ces conclusions s'enchaînent par étapes numérotées à partir de l'hypothèse initiale H.

	a	b	c	d	e	
a		H	1	1	1	...
b	3		2	2	2	
c	2	1		2	2	
d	2	1	2		2	
e	2	1	2	2		

D est donc bien un noyau dictatorial.

(C) V étant partitionné d'une manière quelconque en deux groupements V' et V", considérons un état ρ tel que $E_\rho(ab) = V'$ et $E_\rho(ba) = V''$. On a soit $a.f(\rho).b$, soit $b.f(\rho).a$. Dans le premier cas c'est V' qui est décisif pour ab, dans le second c'est V" qui est décisif pour ba. En vertu de (B), soit V' soit V" est donc un noyau dictatorial.

(D) Soit D un noyau dictatorial, par hypothèse non réduit à un dictateur individuel. Partitionnons D arbitrairement en deux groupements D' et D", et considérons un état ρ tel que

$$aR_i bR_i c \quad \text{pour tout} \quad i \in D'$$

$$cR_j aR_j b \quad \text{pour tout} \quad j \in D''$$

$$bR_k cR_k a \quad \text{pour tout} \quad k \notin D$$

Si $f(\rho) = R$, on a aRb puisque $E_\rho(ab) = D$ et que D est dictatorial. Mais puisque R est un ordre et que aRb, on doit nécessairement avoir aRc ou cRb. Dans le premier cas D' est décisif pour ac (puisque $E_\rho(ac) = D'$) et dans le second D" est décisif pour cb (puisque $E_\rho(cb) = D''$). Donc, de D' et D", l'un est nécessairement un noyau dictatorial; et l'on conclut ainsi de proche en proche à l'existence d'un dictateur individuel δ, c'est-à-dire d'un individu tel que tout état ρ correspondant pour cet individu à un ordre individuel R_δ donne comme ordre collectif précisément R_δ.

Le théorème démontré par Arrow porte en réalité non sur les ordres stricts mais sur les préordres complets, ses hypothèses et ses conclusions sont un peu plus complexes que celles indiquées ci-dessus. Mais l'impression qu'il dégage est aussi affligeante: non seulement la démocratie majoritaire, comme l'avait noté Condorcet, ne conserve pas toujours la logique du choix, mais seule la dictature paraît la conserver.

IV - LE THEOREME DE BLACK

En appelant $\mathcal{R}$ l'ensemble des opinions individuelles concevables, Condorcet et Arrow ont en fait cherché à appliquer la "puissance v-ième cartésienne" de $\mathcal{R}$, qu'on peut noter $\mathcal{R}^v$, sur $\mathcal{R}$ lui-même. Condorcet a en fait montré que la démocratie majoritaire était une exigence trop forte pour cela; et Arrow, même en affaiblissant cette exigence, a établi un résultat irritant.

Pour échapper aux conclusions d'Arrow, il est naturel de chercher à modifier la logique même du choix individuel, c'est-à-dire de changer la définition de $\mathcal{R}$.

Un moyen simple (encore que peu satisfaisant) est d'élargir $\mathcal{R}$.

Un ordre individuel R sur $\Omega = \{a, b, c, \ldots\}$ peut en effet être regardé comme un système de réponses par oui ou non (ou si l'on veut par + ou −) à $\frac{\omega(\omega-1)}{2}$ questions du type "préférez-vous b à a" ?, "préférez-vous c à a" ?, etc..

Nous savons que, parmi les $2^{\frac{\omega(\omega-1)}{2}}$ systèmes de réponses possibles, ! seulement constituent des ordres; les autres systèmes de réponses sont interdits comme contraires à la logique usuelle du choix, et d'ailleurs les pourcentages d'interdiction tendent rapidement vers 100 % quand ω augmente :

ω	ω ! (ordres)	$2^{\frac{\omega(\omega-1)}{2}}$ systèmes de réponses)	% d'interdiction
3	6	8	25
4	24	64	62,5
5	120	1.024	88,3
6	720	32.768	97,8

Lever ces interdictions est un moyen radical d'élargir $\mathcal{R}$. Plus rien n'interdit alors la démocratie majoritaire (du moins si v est impair), mais pour obtenir que le verbe "choisir" garde le même sens pour les individus et pour la collectivité, on l'a pour ainsi dire vidé de toute espèce de sens.

Une autre idée est non plus d'élargir, mais de rétrécir $\mathcal{R}$, en excluant a priori certains ordres de préférence (individuels ou collectifs) comme inadmissibles.

Supposons qu'au sein de Ω il existe quelque "ordre sous-jacent", reconnu comme tel par tous les votants, et qui "conditionne" leurs préférences. Pratiquement cela peut être par exemple l'ordre croissant pour le montant d'un budget à allouer, d'un taux à fixer, ou encore un ordre défini par des notions plus vagues de droite ou de gauche politiques, etc.. Nous conviendrons d'adopter pour cet ordre sous-jacent l'ordre alphabétique.

Nous imposerons alors aux ordres de préférence (individuels ou collectifs) l'unique condition suivante; en appelant par exemple h l'élément de Ω placé en tête de l'ordre de préférence, de deux éléments quelconques situés du même côté de h dans l'ordre alphabétique, le plus éloigné de h dans l'alphabet devra aussi être le plus éloigné de h dans l'ordre de préférence (c'est-à-dire le "moins bien classé"). Appelons cette condition "la condition de Black".

Les ordres de préférence "blackiens" sont aisés à dénombrer par reconstitution à partir de la queue: l'option la moins bien classée est nécessairement ou a ou z (si Ω est l'alphabet entier); immédiatement avant elle, se classe dans le premier cas ou b ou z, dans le second ou a ou y ; et ainsi de suite en remontant, par dichotomie entre la première et la dernière (dans l'ordre sous-jacent) des options non encore classées. Quand on a classé ainsi $\omega - 1$ options, il ne reste plus que "la préférée"; on a donc $2^{\omega-1}$ manières de définir un ordre blackien.

La restriction devient rapidement sévère quand augmente :

ω	$\omega!$ (ordres)	$2^{\omega-1}$ (ordres blackiens)	% d'ordres blackiens.
3	6	4	66,7
4	24	8	33,3
5	120	16	13,3
6	720	32	4,4

Mais le résultat en est de restituer une de ses dignités au principe démocratique: par composition majoritaire de v ordres blackiens (v étant impair), on trouve bien un ordre, et cet ordre est également blackien.

Pour en voir la raison (sans formaliser complètement la démonstration, on peut imaginer qu'à chaque individu de V on pose les $\frac{\omega(\omega-1)}{2}$ questions relatives à ses préférences binaires à l'aide d'une grille triangulaire telle que la suivante, où la disposition des questions tient compte de l'ordre sous-jacent (alphabétique; figure pour $\omega = 7$).

aRb ?	aRc ?	aRd ?	aRe ?	aRf ?	aRg ?
	bRc ?	bRd ?	bRe ?	bRf ?	bRg ?
		cRd ?	cRe ?	cRf ?	cRg ?
			dRe ?	dRf ?	dRg ?
				eRf ?	eRg ?
					fRg ?

La condition de Black, comme il est aisé de s'en rendre compte, revient à dire que toute réponse + (oui) dans une case doit entraîner une réponse +

dans sa voisine de droite, et que toute réponse – (non) dans une case doit entraîner une réponse – dans sa voisine du dessus; moyennant quoi il existe nécessairement une ligne-frontière, du type de celle représentée en gras, en haut et à gauche de laquelle il n'y aura que des réponses –, et en bas et à droite de laquelle il n'y aura que des réponses +. (Dans l'exemple de la figure l'ordre des préférences est edfcbga). Mais il suffit d'imaginer que tous les individus de V inscrivent leurs réponses dans la même grille pour voir que les majorités de + vont elles aussi avoir des majorités + pour voisines de droite, et que les majorités de – vont elles aussi avoir des majorités de – pour voisines du dessus; ce qui conduira à un ordre blackien pour les majorités.

V. REMARQUE SUR LES PROCEDURES

Un inconvénient, quelquefois porté au compte de l'effet Condorcet, consiste en ce qu'il permet, lorsque les opinions individuelles sont distribuées de manière à le produire, de mettre le résultat final sous la dépendance de celui qui est maître de la procédure.

Ainsi, supposons que le "président", qui fixe "l'ordre du jour", sache (ou suppute) qu'il y aura des majorités pour préférer a à b, b à c, et c à a. Si son propre désir est de faire élire le candidat a, il lui suffit de ne pas poser la question "préférez-vous c à a ? (cRa ?)", mais seulement les questions "bRc ?", puis "aRb ?".

En réalité, même la certitude que toutes les préférences individuelles sont blackiennes (par rapport à un même ordre sous-jacent) n'apporte aucune garantie contre le pouvoir insidieux de la procédure.

En effet, si équitable qu'apparaisse la méthode d'interrogation directe sur les ordres de préférence individuels, cette méthode est d'une mise en oeuvre difficile et très rarement pratiquée: on estime habituellement plus expédient de ne demander à chaque votant que d'indiquer son "option de tête", au besoin en introduisant diverses modalités de scrutin à plusieurs tours.

Mais la dépendance du résultat à l'égard de la procédure peut alors se manifester dans des exemples très simples. Ainsi reprenons l'exemple cité plus haut au § II ($v = 100$, $\omega = 3$) :

– ordre de préférence	abc :	33	votants,
–	"	bac :	18	"
–	"	bca :	12	"
–	"	cba :	37	"

Il est aisé de vérifier que les ordres de préférence individuels sont blackiens par rapport à l'ordre (alphabétique) abc, et l'on a vu en effet au § II que l'ordre (également blackien) bac pouvait être adopté pour ordre de préférence de la majorité (bRa par 67 %, aRc par 51 %, bRc par 63 %). S'il s'agit d'élire un candidat, c'est b qui est élu.

Mais imaginons que chaque votant n'indique que son "option de tête", et qu'il n'y ait qu'un seul tour, l'élection étant acquise à la "majorité relative": alors c'est c qui est élu (par 37 % des voix, contre 33 % à a et 30 % à b).

Enfin supposons que la procédure soit à deux tours, mais avec maintien au second tour permis seulement aux deux candidats arrivés en tête au premier tour; alors c'est b qui est éliminé par le premier tour, et au second c'est a qui est élu (contre c, par 51 %).

Bien que les "querelles de procédure" aient souvent mauvaise réputation, l'exemple ci-dessus est de nature à illustrer l'importance pratique qu'elles peuvent avoir et le soin méthodique avec lequel il convient d'y réfléchir.

BIBLIOGRAPHIE

CONDORCET : Essai d'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décisions rendues à la pluralité des voix (Paris, 1785).

K.J. ARROW : Social Choice and Individual Values (Wiley).

R.D. LUCE et H. RAIFFA : Games and Decision (Wiley, 1957).

G.Th. GUILBAUD: Les Théories de l'Intérêt général (Economie Appliquée, n° 4, 1952).

BLACKE : On the Rational of Group Decision Making (Journal of Political Economy, Fas. 56, 1948).