

SAMIR AKESBI

MARTIAL NICOLET

Nouveaux algorithmes performants en théorie du transport

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, n° 3 (1998),
p. 341-358

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_3_341_0

© SMAI, EDP Sciences, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » (<http://www.esaim-m2an.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



NOUVEAUX ALGORITHMES PERFORMANTS EN THÉORIE DU TRANSPORT (*)

Samir AKESBI et Martial NICOLET (1)

Résumé — Dans ce travail, nous introduisons et analysons deux algorithmes de résolution de l'équation de transport en géométrie 1D plane. Le premier est basé sur l'adaptation du principe de relaxation S O R pour les systèmes linéaires en dimension finie, à la décomposition de l'opérateur de collision introduite dans [1] et [2]. Le second est quant à lui issu du principe de l'accélération de la convergence par diffusion synthétique appliqué aux nouveaux algorithmes obtenus après décomposition. Des résultats numériques ainsi que des comparaisons de convergence sont donnés à la fin de ce travail. © Elsevier, Paris

Abstract — The aim of this work is to introduce and analyze two new schemes for solving the transport equations in slab geometry. The first one is in the spirit based on the S O R relaxation method for finite dimensional systems, applied to the system obtained by splitting the collision operator. The second algorithm is obtained by adaptation of the synthetic diffusion method principle to the new schemes born from the splitting method. Numerical comparisons of convergence are given. © Elsevier, Paris

INTRODUCTION

On considère le problème :

$$(P) \quad \begin{cases} Tf(x, \mu) = Kf(x, \mu) + S(x, \mu) \\ f(0, \mu) = f(L, -\mu) = 0 \quad \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$$

où $(x, \mu) \in \Omega \stackrel{\text{def}}{=} (0, L) \times (-1, 1)$, $L > 0$; $Tf(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + \sigma(x)f(x, \mu)$;

$$Kf(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 k(x, \mu, \mu') f(x, \mu') d\mu' \quad \text{et}$$

$$D(T) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \in L^2(\Omega) / \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) \in L^2(\Omega); f(0, \mu) = f(L, -\mu) = 0 \text{ si } \mu > 0 \right\}.$$

S est un terme source, k est un noyau positif, σ est un terme d'absorption et f représente le flux de neutrons à déterminer.

Sous les hypothèses :

(H1) $\sigma \in L_+^\infty(0, L)$ et σ continue sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(H2) $K \in L_+(L^2(\Omega))$

(H3) $r_\sigma(\Theta) < 1$ avec $\Theta = T^{-1}K$,

le problème (P) admet une unique solution positive pour tout $S \in L_+^2(\Omega)$.

(*) Manuscrit reçu le 25 octobre 1996. Version révisée le 17 février 1997.

(1) Université de Haute Alsace, Laboratoire de Mathématiques, 4, rue des frères Lumières, 68093 Mulhouse Cedex.

Une résolution classique du problème (P) est basée sur le découplage de la partie différentielle et de la partie intégrale, en introduisant l'algorithme itératif suivant :

$$(P_s) \quad \begin{cases} Tf^{(n+1)} = Kf^{(n)} + S \text{ dans } \Omega \\ f^{(n+1)} \in D(T), \quad f^{(0)} \text{ donné dans } D(T) \end{cases}$$

Dans les milieux proches de la criticité, la convergence de cet algorithme est en général très lente. Dans [1] et [2], on a introduit de nouveaux algorithmes plus rapides mais encore trop lents.

On se propose donc, dans la première partie de ce travail de définir une méthode d'accélération par relaxation S.O.R., basée sur la méthode de décomposition d'opérateurs (splitting) proposée dans [1] et [2].

On définit alors l'opérateur intégral K_y de noyau :

$$(0.2) \quad k_y(x, \mu, \mu') = k(x, \mu, \mu') \times \mathbf{1}_{\Omega_1}(x, \mu) \times \mathbf{1}_{\Omega_2}(x, \mu')$$

où Ω_1 et Ω_2 sont définis par : $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} (0, L) \times (0, 1)$ et $\Omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} (0, L) \times (-1, 0)$.

Par ailleurs, du fait que $K_y(f) = K_y(f \cdot \mathbf{1}_{\Omega_j}) \cdot \mathbf{1}_{\Omega_j}$, on a la relation : $K = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}$, et l'on peut alors affirmer que la solution du problème (P) s'écrit de manière unique sous la forme $f = f_1 + f_2$ où f_1 et f_2 sont les solutions dans $D(T)$ de :

$$(0.3) \quad \begin{pmatrix} T - K_{11} & -K_{12} \\ -K_{21} & T - K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } S_i = S \times \mathbf{1}_{\Omega_i} \text{ pour } i \in \{1, 2\}.$$

On remarque que l'on a nécessairement $f_i = f \times \mathbf{1}_{\Omega_i}$ pour $i \in \{1, 2\}$.

L'algorithme (P_s) correspond, par analogie avec les systèmes linéaires en dimension finie, à une décomposition de la matrice d'opérateurs (0.3), sous la forme $M - N$ avec $M = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$.

Pour tout réel ω non nul, on appelle méthode de relaxation S.O.R., notée (P_ω) , la méthode basée sur la décomposition de la matrice d'opérateurs (0.3) sous la forme $M - N$ avec :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} (T - K_{11}) & \mathbf{0} \\ -K_{21} & \frac{1}{\omega} (T - K_{22}) \end{bmatrix}.$$

L'algorithme associé est donné par :

$$(P_\omega) \quad \begin{cases} (T - K_{11})f_1^{(n+1)} = (1 - \omega)(T - K_{11})f_1^{(n)} + \omega K_{12}f_2^{(n)} + \omega S_1 \\ (T - K_{22})f_2^{(n+1)} = \omega K_{21}f_1^{(n+1)} + (1 - \omega)(T - K_{22})f_2^{(n)} + \omega S_2 \\ f^{(0)} \text{ donné dans } D(T), f_i^{(0)} = f^{(0)} \mathbf{1}_{\Omega_i}, f_i^{(n+1)} \in D(T), i \in \{1, 2\} \end{cases}$$

On démontrera par une étude spectrale qu'il existe un paramètre ω optimal assurant une convergence de (P_ω) **beaucoup plus rapide** que celle obtenue avec (P_s) .

Il est à remarquer que l'algorithme (P_ω) ne serait intéressant que si le coût (en temps de calcul) de chaque itération est du même ordre que celui d'une itération de l'algorithme standard (P_s) . Cela revient à dire qu'il faudrait pouvoir résoudre l'équation intégro-différentielle $(T - K_u)f_i = g$, $i \in \{1, 2\}$ presque aussi rapidement que l'équation différentielle $Tf_i = g$, $i \in \{1, 2\}$. Ceci sera possible grâce à l'hypothèse supplémentaire suivante sur le noyau de collision k :

$$(H4) \quad k(x, \mu, \mu') = C(x) \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_l(\mu) \alpha_l(\mu').$$

Cette forme regroupe un nombre important de noyaux de collision utilisés en neutronique ou en photonique. Par exemple le noyau de Thomson $k(\mu, \mu') = \frac{9\sigma}{16} \left[\left(1 - \frac{\mu^2}{3}\right) \left(1 - \frac{\mu'^2}{3}\right) + \frac{8}{9} \mu^2 \mu'^2 \right]$ ou le noyau classique

$$k(\mu, \mu') = \left[1 + \mu^2 \mu'^2 + (1 - \mu^2)(1 - \mu'^2) + 2\mu\mu' \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \right]$$

ou encore le noyau constant $k(\mu, \mu') = \frac{\sigma c}{2}$ où c est une constante positive proche de l'unité par valeurs inférieures.

La seconde méthode d'accélération proposée dans ce travail correspond à la définition d'une méthode de correction sur (P_1) (i.e. (P_ω) avec $\omega = 1$) dans le cas d'un noyau de collision **constant**. Pour cela on s'inspire de la méthode d'accélération par diffusion synthétique étudiée dans [5] et [8]. Ce nouvel algorithme apparaît très performant pour la résolution de l'équation de transport monodimensionnelle plane et ceci dans tous les milieux (critiques ou pas). Sa généralisation au cas d'un noyau de collision vérifiant l'hypothèse (H4) est réalisable, mais elle est lourde à mettre en œuvre numériquement. Des essais sont tout de même en cours dans le cas du noyau de Thomson.

La dernière partie correspond au traitement numérique dans le cas général où le noyau de collision k vérifie l'hypothèse (H4). Une comparaison de la rapidité de convergence des différents algorithmes est proposée dans le cas d'un noyau constant.

1. ÉTUDE SPECTRALE

En dimension finie, le théorème de convergence de la méthode de relaxation S.O.R. et l'existence d'un paramètre optimal de relaxation sont basés en **grande partie** sur le caractère réel des valeurs propres de la matrice de Jacobi.

En dimension infinie, l'étude spectrale ne se résume pas en général à la recherche des valeurs propres d'un opérateur. On se propose donc de préciser le spectre de l'opérateur associé à la méthode de relaxation S.O.R.

Définissons désormais les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} \Theta_y &= T^{-1} K_y \quad \text{pour } i, j \in \{1, 2\} \\ \Theta_d &= \Theta_{11} + \Theta_{22} \quad \text{et} \quad \Theta_e = \Theta_{12} + \Theta_{21} \\ J &= (I - \Theta_d)^{-1} \Theta_e \end{aligned}$$

On montre aisément que :

$$(1.1) \quad \Theta_y(f) = \Theta_y(f \cdot \mathbf{1}_{\Omega_j}) \mathbf{1}_{\Omega_i}$$

$$(1.2) \quad \Theta = \Theta_{11} + \Theta_{12} + \Theta_{21} + \Theta_{22}$$

$$(1.3) \quad \Theta_y(f_k) \equiv 0 \quad \text{pour } j \neq k$$

Remarque 1.1 : L'opérateur J est l'opérateur associé à une décomposition de type Jacobi de la matrice d'opérateurs (0.3) (voir [1] et [2]). D'autre part, du fait que l'opérateur Θ est positif et compact [11] et que $0 \leq \Theta_d \leq \Theta$, on en déduit que $r_\sigma(\Theta_d) \leq r_\sigma(\Theta) < 1$ et donc que $(I - \Theta_d)$ est bien inversible.

Posons $\varphi^{(n)} = f - (f_1^{(n)} + f_2^{(n)})$, $\varphi_1^{(n)} = f_1 - f_1^{(n)}$, $\varphi_2^{(n)} = f_2 - f_2^{(n)}$.

Où $f = f_1 + f_2$ désigne la solution du problème (P) .

Par différence entre (P_ω) et (P) , on obtient :

$$\begin{cases} (T - K_{11}) \varphi_1^{(n+1)} = (1 - \omega) (T - K_{11}) \varphi_1^{(n)} + \omega K_{12} \varphi_2^{(n)} \\ (T - K_{22}) \varphi_2^{(n+1)} = \omega K_{21} \varphi_1^{(n+1)} + (1 - \omega) (T - K_{22}) \varphi_2^{(n)} \end{cases}$$

Soit encore :

$$\begin{cases} (I - \Theta_{11}) \varphi_1^{(n+1)} = (1 - \omega) (I - \Theta_{11}) \varphi_1^{(n)} + \omega \Theta_{12} \varphi_2^{(n)} \\ (I - \Theta_{22}) \varphi_2^{(n+1)} = \omega \Theta_{21} \varphi_1^{(n+1)} + (1 - \omega) (I - \Theta_{22}) \varphi_2^{(n)} \end{cases}$$

Du fait de (1.3) ceci peut donc aussi s'écrire :

$$\begin{cases} (I - \Theta_d) \varphi_1^{(n+1)} = (1 - \omega) (I - \Theta_d) \varphi_1^{(n)} + \omega \Theta_e \varphi_2^{(n)} \\ (I - \Theta_d) \varphi_2^{(n+1)} = \omega \Theta_e \varphi_1^{(n+1)} + (1 - \omega) (I - \Theta_d) \varphi_2^{(n)} \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} \varphi_1^{(n+1)} = (1 - \omega) \varphi_1^{(n)} + \omega J \varphi_2^{(n)} \\ \varphi_2^{(n+1)} = \omega J \varphi_1^{(n+1)} + (1 - \omega) \varphi_2^{(n)} \end{cases}$$

Ce qui s'écrit sous forme « matricielle » :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\omega J & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n+1)} \\ \varphi_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega) I & \omega J \\ 0 & (1 - \omega) I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

En appliquant à gauche l'opérateur $\begin{bmatrix} I & 0 \\ \omega J & I \end{bmatrix}$, on en déduit :

$$\begin{bmatrix} \varphi_1^{(n+1)} \\ \varphi_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \omega) I & \omega J \\ \omega(1 - \omega) J & \omega^2 J^2 + (1 - \omega) I \end{bmatrix}}_{L_\omega} \begin{bmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

L'opérateur L_ω associé à la méthode de relaxation S.O.R. peut s'écrire sous la forme :

$$L_\omega = (1 - \omega) I + \omega J \begin{bmatrix} 0 & I \\ (1 - \omega) I & \omega J \end{bmatrix}$$

D'après [1] et [2], l'opérateur J est compact, ainsi l'opérateur L_ω est de la forme $(1 - \omega) I + \omega A$ où A désigne un opérateur compact. Le spectre des opérateurs de ce type peut être précisé par la propriété suivante :

PROPOSITION 1.1 : *Soit E un espace de Banach de dimension infinie et A un opérateur compact de domaine $D(A) \subset E$. Soit $U_\omega \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \omega) I + \omega A$, $\omega \neq 0$. Alors on a :*

$$\sigma(U_\omega) = VP(U_\omega) \cup \{1 - \omega\}, \text{ VP désignant l'ensemble des valeurs propres.}$$

Preuve : Posons $U_{\lambda, \omega} \stackrel{\text{def}}{=} U_\omega - \lambda I$. Considérons désormais $\lambda \in \sigma(U_\omega)$.

On sait alors que $U_{\lambda, \omega}$ vérifie l'une des propriétés suivantes :

Soit $U_{\lambda, \omega}$ est non inversible.

Soit $U_{\lambda, \omega}$ est non borné dans E , de domaine dense dans E .

Soit $U_{\lambda, \omega}$ existe, de domaine non dense dans E .

On notera désormais (Q) cette propriété.

On peut alors écrire que $(1 - \omega) I + \omega A - \lambda I$ vérifie (Q) . Donc $\eta \in \sigma(\omega A)$ où $\eta = \lambda + \omega - 1$.

Or $\sigma(\omega A) = \mathbf{VP}(\omega A) \cup \{0\}$ (car A est compact), alors $\sigma(U_\omega) = \mathbf{VP}(U_\omega) \cup \{1 - \omega\}$.

En appliquant cette proposition à l'opérateur L_ω on a donc trivialement le corollaire :

COROLLAIRE 1.1 : $\sigma(L_\omega) = \mathbf{VP}(L_\omega) \cup \{1 - \omega\}$.

La recherche du spectre de l'opérateur L_ω est donc ramenée à celle de ses valeurs propres. Soit η une valeur propre de cet opérateur, associé au vecteur propre $g = g_1 + g_2$.

On a alors :

$$\begin{cases} (T - K_{11}) \eta g_1 = (1 - \omega) (T - K_{11}) g_1 + \omega K_{12} g_2 \\ (T - K_{22}) \eta g_2 = \omega K_{21} \eta g_1 + (1 - \omega) (T - K_{22}) g_2 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} (I - \Theta_d) \eta g_1 = (1 - \omega) (I - \Theta_d) g_1 + \omega \Theta_e g_2 \\ (I - \Theta_d) \eta g_2 = \omega \Theta_e \eta g_1 + (1 - \omega) (I - \Theta_d) g_2 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} (\eta + \omega - 1) g_1 = \omega J g_2 \\ (\eta + \omega - 1) g_2 = \omega \eta J g_1 \end{cases}$$

Il est clair que si $\eta = 0$, alors $\omega = 1$ et g_2 est un vecteur propre de l'opérateur J associé à la valeur propre 0.

Si $\eta \neq 0$, on déduit aisément que : $J^2 g_2 = \frac{(\eta + \omega - 1)^2}{\eta \omega^2} g_2$.

Ainsi g_2 est un vecteur propre de J^2 associé à la valeur propre $\lambda^2 = \frac{(\eta + \omega - 1)^2}{\eta \omega^2}$, où λ désigne une valeur propre de l'opérateur J .

Finalement $\forall \eta \in \sigma(L_\omega), \exists \lambda \in \sigma(J)$ tel que $\eta^2 + (2(\omega - 1) - \lambda^2 \omega^2) \eta + (\omega - 1)^2 = 0$.

L'étude de $\sigma(L_\omega)$ est ainsi liée à l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur compact J . Dans le but de préciser le spectre de J , on formule pour la suite de ce paragraphe l'hypothèse supplémentaire suivante :

(H5) k est paire en μ

On a alors le

THÉORÈME 1.1 : *Sous les hypothèses (H1) à (H5) les valeurs propres de l'opérateur J dans $L^2(\Omega)$ sont réelles.*

Preuve : Considérons le problème $\begin{cases} Tf = g \\ f \in D(T) \end{cases}$.

En posant $\mathbf{1}_1(\cdot) = \mathbf{1}_{(0,1)}(\cdot)$ et $\mathbf{1}_2(\cdot) = \mathbf{1}_{(-1,0)}(\cdot)$, la solution est donnée par :

$$f(x, \mu) = \int_0^L \{ \mathbf{1}_1(\mu) \mathbf{1}_{(0,x)}(x') - \mathbf{1}_2(\mu) \mathbf{1}_{(x,L)}(x') \} \frac{1}{\mu} e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu}} g(x', \mu) dx',$$

où Σ est une fonction continue sur $[0, L]$, dérivable sur tout intervalle de continuité de σ et dont la dérivée sur chacun de ces intervalles vaut σ . Cette fonction Σ est évidemment unique à une constante additive près.

En substituant g par $K_{\bar{y}} g$ on obtient :

$$\Theta_{\bar{y}} g(x, \mu) = \int_0^L C(x') \{ \mathbf{1}_1(\mu) \mathbf{1}_{(0,x)}(x') - \mathbf{1}_2(\mu) \mathbf{1}_{(x,L)}(x') \} \times \frac{1}{\mu} e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu}} \\ \int_{-1}^1 \mathbf{1}_l(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') k_0(\mu, \mu') g(x', \mu') d\mu' dx'$$

où $k_0(\mu, \mu') = \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_l(\mu) \alpha_l(\mu')$.

D'où

$$\Theta_{\bar{y}} g(x, \mu) = \int_{\Omega} G_{\bar{y}}(x, \mu, x', \mu') g(x', \mu') d\mu' dx'.$$

Avec

$$G_{\bar{y}}(x, \mu, x', \mu') = \frac{C(x')}{|\mu|} k_0(\mu, \mu') e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu}} \mathbf{1}_l(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') \{ \mathbf{1}_2(\mu) \mathbf{1}_{(x,L)}(x') + \mathbf{1}_1(\mu) \mathbf{1}_{(0,x)}(x') \}$$

On en déduit que :

$$K_{\bar{u}} \Theta_{\bar{y}} g(x, \mu) = \int_{\Omega} G_{\bar{y}}^l(x, \mu, x', \mu') g(x', \mu') dx' d\mu'.$$

Avec :

$$G_{\bar{y}}^l(x, \mu, x', \mu') = \int_{-1}^1 C(x) C(x') \frac{k_0(\mu, \mu'') k_0(\mu'', \mu')}{|\mu''|} \\ \times e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu''}} \mathbf{1}_i(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') \mathbf{1}_l(\mu'') \{ \mathbf{1}_1(\mu'') \mathbf{1}_{(0,x)}(x') + \mathbf{1}_2(\mu'') \mathbf{1}_{(x,L)}(x') \} d\mu''$$

Il est désormais clair que $\tilde{K}_{\bar{y}}^l \stackrel{\text{def}}{=} K_{\bar{u}} T^{-1} K_{\bar{y}} + K_{\bar{u}} \Theta_{\bar{y}}$ est un opérateur intégral sur $L^2(\Omega)$ de noyau $G_{\bar{y}}^l$.

Étudions les éventuelles propriétés de symétrie des noyaux précédents.

Soit \bar{l} l'entier naturel tel que $l + \bar{l} = 3$ pour $l \in \{1, 2\}$. On a donc l'égalité suivante :

$$G_{\bar{y}}^{\bar{l}}(x, \mu, x', \mu') = \int_{-1}^1 C(x) C(x') \frac{k_0(\mu, \mu'') k_0(\mu'', \mu')}{|\mu''|} \\ \times e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu''}} \mathbf{1}_j(\mu) \mathbf{1}_i(\mu') \mathbf{1}_{\bar{l}}(\mu'') \{ \mathbf{1}_1(\mu'') \mathbf{1}_{(0,x)}(x') + \mathbf{1}_2(\mu'') \mathbf{1}_{(x,L)}(x') \} d\mu''$$

Déterminons un lien entre les noyaux $G_{\bar{y}}^l$ et $G_{\bar{y}}^{\bar{l}}$.

Considérons le cas $0 < x < x' < L$.

$$G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = \int_{-1}^1 C(x) C(x') \frac{k_0(\mu, \mu'') k_0(\mu'', \mu')}{|\mu''|} \times e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{\mu''}} \mathbf{1}_i(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') \mathbf{1}_l(\mu'') \mathbf{1}_2(\mu'') \mathbf{1}_{(x, L)}(x') d\mu''$$

$$G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = - \int_1^{-1} C(x) C(x') \frac{k_0(\mu, -\mu'') k_0(-\mu'', \mu')}{|\mu''|} \times e^{\frac{\Sigma(x') - \Sigma(x)}{-\mu''}} \mathbf{1}_i(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') \mathbf{1}_l(-\mu'') \mathbf{1}_2(-\mu'') \mathbf{1}_{(x, L)}(x') d\mu''$$

D'après la symétrie du noyau k et l'hypothèse (H5) on a donc :

$$G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = \int_{-1}^1 C(x) C(x') \frac{k_0(\mu, \mu'') k_0(\mu'', \mu')}{|\mu''|} \times e^{\frac{\Sigma(x) - \Sigma(x')}{\mu''}} \mathbf{1}_i(\mu) \mathbf{1}_j(\mu') \mathbf{1}_l(-\mu'') \mathbf{1}_2(\mu'') \mathbf{1}_{(x, L)}(x') d\mu''$$

Or $\mathbf{1}_l(-\mu'') = \mathbf{1}_l(\mu'')$ et $\mathbf{1}_{(0, x)}(x') = \mathbf{1}_{(x', L)}(x)$, alors :

$$G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = \int_{-1}^1 C(x) C(x') \frac{k_0(\mu'', \mu) k_0(\mu'', \mu')}{|\mu''|} \times e^{\frac{\Sigma(x) - \Sigma(x')}{\mu''}} \mathbf{1}_j(\mu') \mathbf{1}_i(\mu) \mathbf{1}_l(\mu'') \mathbf{1}_1(\mu'') \mathbf{1}_{(0, x')}(x) d\mu''.$$

Donc $G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = G_{j_l}^{\bar{l}}(x', \mu', x, \mu)$ avec $l + \bar{l} = 3$.

On obtient le même résultat dans le cas $0 < x' < x < L$.

Finalement on a :

$$(1.4) \quad G_{y'}^l(x, \mu, x', \mu') = G_{j_l}^{\bar{l}}(x', \mu', x, \mu) \quad \text{avec} \quad l + \bar{l} = 3.$$

Le résultat précédent permet alors d'affirmer que :

$$(1.5) \quad (\tilde{K}_{y'}^l)^* = \tilde{K}_{j_l}^{\bar{l}} \quad \text{avec} \quad l + \bar{l} = 3.$$

$$(1.6) \quad \tilde{K}_{y'}^l + \tilde{K}_{j_l}^{\bar{l}} \text{ est un opérateur auto-adjoint de } L^2(\Omega).$$

Où A^* désigne l'opérateur adjoint de A .

Soit désormais λ une valeur propre de l'opérateur J associée au vecteur propre f . De la relation $Jf = \lambda f$ on peut écrire que :

$$(1.7) \quad \Theta_e f = \lambda f - \lambda \Theta_d f.$$

Multiplions scalairement (1.7) par $X \stackrel{def}{=} K_d f + \lambda K_e f$ où $K_d \stackrel{def}{=} K_{11} + K_{22}$ et $K_e \stackrel{def}{=} K_{12} + K_{21}$.

On obtient ainsi :

$$(1.8) \quad \langle \Theta_e f, X \rangle = \langle \lambda f, X \rangle - \langle \lambda \Theta_d f, X \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien dans $L^2(\Omega)$.

Avec les définitions proposées, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \Theta_e f, X \rangle &= \langle \Theta_e f, K_d f + \lambda K_e f \rangle \\
&= \langle K_d T^{-1} K_e f, f \rangle + \bar{\lambda} \langle K_e T^{-1} K_e f, f \rangle = \bar{\lambda} \langle (\bar{K}_{22}^1 + \bar{K}_{11}^2) f, f \rangle + \underbrace{\langle (\bar{K}_{12}^1 + \bar{K}_{21}^2) f, f \rangle}_{\text{reel}} \\
\langle \lambda f, X \rangle &= \langle \lambda f, K_d f + \lambda K_e f \rangle = \lambda \underbrace{\langle f, K_d f \rangle}_{\text{reel}} + \lambda \bar{\lambda} \underbrace{\langle f, K_e f \rangle}_{\text{reel}} \\
\langle -\lambda \Theta_d f, X \rangle &= -\lambda \langle T^{-1} K_d f, K_d f + \lambda K_e f \rangle \\
&= -\lambda \langle K_d T^{-1} K_d f, f \rangle - \lambda \bar{\lambda} \langle K_e T^{-1} K_d f, f \rangle \\
&= -\lambda \langle (\bar{K}_{11}^1 + \bar{K}_{22}^2) f, f \rangle - \lambda \bar{\lambda} \underbrace{\langle (\bar{K}_{21}^1 + \bar{K}_{12}^2) f, f \rangle}_{\text{reel}}
\end{aligned}$$

Finalement on peut réécrire (1.8) sous la forme :

$$R_{\text{reel}} + \bar{\lambda} \langle (\bar{K}_{11}^2 + \bar{K}_{22}^1) f, f \rangle + \lambda \langle (\bar{K}_{11}^1 + \bar{K}_{22}^2) f, f \rangle = \lambda \underbrace{\langle f, K_d f \rangle}_{\text{reel}}$$

Avec $R = \langle (\bar{K}_{12}^1 + \bar{K}_{21}^2) f, f \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle (\bar{K}_{21}^1 + \bar{K}_{12}^2) f, f \rangle - \langle f, K_e f \rangle$.

D'après (1.6) on peut écrire :

$$\langle (\bar{K}_{11}^2 + \bar{K}_{22}^1) f, f \rangle = \overline{\langle (\bar{K}_{11}^2 + \bar{K}_{22}^1)^* f, f \rangle} = \overline{\langle (\bar{K}_{11}^1 + \bar{K}_{22}^2) f, f \rangle}.$$

On en déduit alors :

$$(1.9) \quad \underbrace{R}_{\text{reel}} + 2 \Re e(\lambda \langle (\bar{K}_{11}^1 + \bar{K}_{22}^2) f, f \rangle) = \lambda \underbrace{\langle f, K_d f \rangle}_{\text{reel}}$$

Ceci prouve le caractère réel de λ si $\langle f, K_d f \rangle \neq 0$.

Supposons désormais que $\langle f, K_d f \rangle = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
0 = \langle f, K_d f \rangle &= \int_0^L \int_{-1}^1 f(x, \mu) \overline{K_d f(x, \mu)} dx d\mu \\
&= \int_0^L \int_{-1}^1 \left(C(x) f(x, \mu) \sum_{i=1}^{N_k} \left\{ \mathbf{1}_1(\mu) \alpha_i(\mu) \int_0^1 \alpha_i(\mu') f(x, \mu') d\mu' + \mathbf{1}_2(\mu) \alpha_i(\mu) \int_{-1}^0 \alpha_i(\mu') f(x, \mu') d\mu' \right\} \right) d\mu dx \\
&= \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^L C(x) \left(\int_0^1 \alpha_i(\mu) f(x, \mu) d\mu \int_0^1 \alpha_i(\mu') f(x, \mu') d\mu' + \int_{-1}^0 \alpha_i(\mu) f(x, \mu) d\mu \int_{-1}^0 \alpha_i(\mu') f(x, \mu') d\mu' \right) dx \\
&= \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^L C(x) \left(\left| \int_0^1 \alpha_i(\mu) f(x, \mu) d\mu \right|^2 + \left| \int_{-1}^0 \alpha_i(\mu) f(x, \mu) d\mu \right|^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Or $0 < k(x, \mu, \mu) = C(x) \sum_{l=1}^{N_k} \alpha_l^2(\mu)$ alors $C(x) > 0$ et donc

$$\int_0^1 \alpha_l(\mu) f(x, \mu) d\mu = \int_{-1}^0 \alpha_l(\mu) f(x, \mu) d\mu = 0 \quad \text{pour tout } l.$$

Soit encore $K_d f = K_e f = 0$ puis $\Theta_d f = \Theta_e f = 0$.

On en déduit alors de (1.7) que $\lambda f = 0$ d'où $\lambda = 0$.

Ceci achève donc la preuve du caractère réel des valeurs propres de l'opérateur J .

Remarque 1.2 : On pourrait certainement se passer de l'hypothèse (H4) pour ce dernier résultat et utiliser uniquement l'irréductibilité de l'opérateur de collision K , mais comme elle est essentielle pour l'intérêt numérique de l'algorithme (P_ω), nous nous permettons de l'utiliser pour finir d'établir le caractère réel du spectre de l'opérateur de Jacobi J .

On peut alors s'intéresser à l'étude de l'accélération de la convergence obtenue par cette méthode de relaxation.

2. ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE PAR RELAXATION S.O.R.

L'étude spectrale a permis de montrer que le spectre de l'opérateur de Jacobi est réel. Une étude analogue à celle réalisée en dimension finie pour les systèmes linéaires permet alors d'établir le théorème de convergence suivant :

THÉORÈME 2.1 : *Sous les hypothèses (H1) à (H5) on a les résultats suivants :*

(i) *l'algorithme (P_ω) converge $\Leftrightarrow \omega \in]0, 2[$.*

(ii) *Il existe un paramètre optimal de relaxation donné par : $\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (r_\sigma(J))^2}}$, et on a : $r_\sigma(L_{\omega^*}) = \omega^* - 1$.*

Preuve : (i) Les résultats de l'étude spectrale ont permis de démontrer que $\forall \eta \in \sigma(L_\omega), \exists \lambda \in \sigma(J)$ tel que η soit solution de l'équation de second degré à coefficients réels :

$$\eta^2 + (2(\omega - 1) - \lambda^2 \omega^2) \eta + (\omega - 1)^2 = 0.$$

(\Rightarrow) *Les deux racines η_1 et η_2 de cette équation vérifient $|\eta_1| |\eta_2| = (\omega - 1)^2$ donc si $\omega \notin]0, 2[$ alors $|\eta_1| |\eta_2| > 1$. On en déduit que l'algorithme (P_ω) ne peut pas converger.*

(\Leftarrow) *On suppose donc que $\omega \in]0, 2[$.*

L'équation en η a pour discriminant $\Delta = \lambda^2 \omega^2 (\lambda^2 \omega^2 - 4\omega + 4)$ qui est de même signe que le trinôme $\lambda^2 \omega^2 - 4\omega + 4$ de discriminant réduit $\delta = 4(1 - \lambda^2)$. Or d'après l'étude menée dans [2] on a $r_\sigma(J) < 1$, donc $\delta \geq 0$ et Δ possède alors deux racines réelles.

$$\omega_1 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - \lambda^2}} \geq 0.$$

Ces racines vérifient $1 < \omega_1 < 2 < \omega_2$. Ceci entraîne, de la même manière que dans le cas de la dimension finie ([9], [14]) la discussion suivante :

pour $2 > \omega > \omega_1$, les valeurs propres $\eta(\lambda)$ de L_ω sont complexes et l'on a $|\eta(\lambda)| = \omega - 1 < 1$, et pour $0 < \omega \leq \omega_1$, les valeurs propres $\eta(\lambda)$ de L_ω sont réelles positives. La plus grande étant donnée par :

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2 \omega^2 - 2\omega + 2 + \lambda\omega \sqrt{\lambda^2 \omega^2 - 4\omega + 4}}{2} < 1 \quad \text{car} \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \omega < 2.$$

(ii) En étudiant les variations de η en fonction de ω pour $0 < \omega \leq \omega_1$ (λ fixé), et en utilisant le résultat obtenu pour $2 > \omega > \omega_1$ on montre que : $\inf_{\omega \in \lambda \frac{J\sigma}{2}, 2[} |\eta(\omega)| = \eta(\omega_1) = \omega_1 - 1$.

En étudiant les variations de $|\eta|$ en fonction de λ ($0 \leq \lambda < 1$), on montre que $|\eta(\lambda)|$ est croissante. Ceci permet alors de conclure que : $r_\sigma(L_\omega) = \sup_{\lambda \in \sigma(J)} |\eta(\lambda)| = |\eta(r_\sigma(J))|$.

Le paramètre optimal ω^* est donc donné par : $\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (r_\sigma(J))^2}}$ et on a :

$$r_\sigma(L_{\omega^*}) = \inf_{0 < \omega < 2} |r_\sigma(L_\omega)| = |\eta(\omega^*)| = \omega^* - 1 = \frac{1 - \sqrt{1 - (r_\sigma(J))^2}}{1 + \sqrt{1 - (r_\sigma(J))^2}}.$$

3. ACCÉLÉRATION PAR CORRECTION

Une méthode d'accélération de la convergence, dite méthode de diffusion synthétique, a été étudiée dans [5] et [8]. On a constaté qu'elle améliorerait considérablement la rapidité de convergence des algorithmes classiques dans le cas de conditions aux limites **réflexives**, mais qu'elle présentait quelques insuffisances quant à la stabilité, voire à la convergence, dans le cas des conditions aux limites de type flux entrant nul. La méthode de correction que nous proposons ici, constitue l'adaptation de ce principe de diffusion synthétique aux nouveaux algorithmes de décomposition. Cette décomposition permet alors de palier à certaines difficultés rencontrées lors de l'accélération de la convergence par diffusion synthétique dans le cas des conditions aux limites de type flux entrant nul.

Nous supposons dans tout ce paragraphe que le noyau de collision est **constant**. Plus précisément on pose $k(x, \mu, \mu') = \frac{\sigma c}{2}$ où σ est supposé constant et où c désigne une constante positive et proche de l'unité par valeurs inférieures.

Le principe de correction sera appliqué ici sur la méthode de décomposition obtenue avec $\omega = 1$ (Gauss-Seidel).

Soit $f^{(0)} \in D(T)$ et $F_2^{(0)} = K_{12}f^{(0)} = K_{12}(f^{(0)} \mathbf{1}_2) = \frac{\sigma c}{2} \left(\int_{-1}^0 f^{(0)}(x, \mu') d\mu' \right) \mathbf{1}_1(\mu)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposons déterminé l'itéré $F_2^{(n)}$. On détermine alors $f_1^{(n+1/2)}$ et $f_2^{(n+1/2)}$ à l'aide de l'algorithme de Gauss-Seidel :

$$(3.1) \quad \begin{cases} (T - K_{11})f_1^{(n+1/2)} = F_2^{(n)} & + S_1 \\ (T - K_{22})f_2^{(n+1/2)} = K_{21}f_1^{(n+1/2)} & + S_2 \end{cases}$$

On pose ensuite :

$$(3.2) \quad F_2^{(n+1/2)} = K_{12}f_2^{(n+1/2)} = \frac{\sigma c}{2} \left(\int_{-1}^0 f_2^{(n+1/2)}(x, \mu') d\mu' \right) \mathbf{1}_1(\mu).$$

Pour déterminer l'itéré $F_2^{(n+1)}$ on procède d'abord à la correction des termes $f_1^{(n+1/2)}$ et $f_2^{(n+1/2)}$ obtenus par l'algorithme de Gauss-Seidel, en posant :

$$\begin{cases} f_1(x, \mu) = f_1^{(n+1/2)}(x, \mu) + \phi_1(x, \mu) \\ f_2(x, \mu) = f_2^{(n+1/2)}(x, \mu) + \phi_2(x, \mu) \end{cases}$$

La convergence de l'algorithme de Gauss-Seidel ($\omega = 1$) fait alors apparaître ϕ_1 et ϕ_2 comme des termes erreurs. On se propose alors d'effectuer un développement de Legendre de ϕ_1 (resp ϕ_2) sur $[0, 1]$ (resp $[-1, 0]$) :

$$\begin{cases} \phi_1(x, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{1,k}(x) P_k(\mu), \quad \mu \in (0, 1) \\ \phi_2(x, \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{2,k}(x) Q_k(\mu), \quad \mu \in (-1, 0) \end{cases}$$

Où $\{P_k\}$ désigne une base polynomiale orthonormale relativement au produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(\mu) g(\mu) d\mu$, et $\{Q_k\}$ désigne une base polynomiale orthonormale relativement au produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle_2 = \int_{-1}^0 f(\mu) g(\mu) d\mu$.

On choisit ensuite de tronquer les développements de Legendre à l'ordre deux (i.e. $\phi_{1,k} = \phi_{2,k} \equiv 0$ pour tout $k \geq 2$).

Par différence entre le problème exact et (3.1), on obtient le système suivant :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, \mu) + \sigma \phi_1(x, \mu) - \frac{\sigma c}{2} \int_0^1 \phi_1(x, \mu) d\mu - \frac{\sigma c}{2} \int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu) d\mu = \tilde{G}_2 \\ \mu \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, \mu) + \sigma \phi_2(x, \mu) - \frac{\sigma c}{2} \int_0^1 \phi_1(x, \mu) d\mu - \frac{\sigma c}{2} \int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu) d\mu = 0 \end{cases}$$

Avec $\tilde{G}_2(x, \mu) = F_2^{(n+1/2)} - F_2^{(n)}$.

Remarquons que la fonction \tilde{G}_2 est de la forme :

$$\tilde{G}_2(x, \mu) = G_2(x) \mathbf{1}_1(\mu).$$

Les polynômes de Legendre sont donnés par :

$$P_0 = Q_0 = 1, \quad P_1 = 2\sqrt{3}\left(\mu - \frac{1}{2}\right), \quad Q_1 = 2\sqrt{3}\left(\mu + \frac{1}{2}\right).$$

En tenant compte de ces expressions le système (3.3) s'écrit aussi :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \left(\frac{P_1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, \mu) + \sigma \phi_1(x, \mu) - \frac{\sigma c}{2} \int_0^1 \phi_1(x, \mu) d\mu - \frac{\sigma c}{2} \int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu) d\mu = \tilde{G}_2(x) \\ \left(\frac{Q_1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, \mu) + \sigma \phi_2(x, \mu) - \frac{\sigma c}{2} \int_0^1 \phi_1(x, \mu) d\mu - \frac{\sigma c}{2} \int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu) d\mu = 0 \end{cases}$$

Intégrons la première équation de (3.4) entre 0 et 1 et la seconde équation entre -1 et 0.

En tenant compte de la définition des différents moments de Legendre : $\begin{cases} \phi_{1,k} = \langle \phi_1, P_k \rangle_1 \\ \phi_{2,k} = \langle \phi_2, Q_k \rangle_2 \end{cases}$ on obtient alors les égalités suivantes :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{1,1}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_{1,0}}{dx} + \sigma \left(1 - \frac{c}{2}\right) \phi_{1,0} - \frac{\sigma c}{2} \phi_{2,0} = G_2 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{2,1}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_{2,0}}{dx} + \sigma \left(1 - \frac{c}{2}\right) \phi_{2,0} - \frac{\sigma c}{2} \phi_{1,0} = 0 \end{cases}$$

Multiplions désormais la première équation de (3.4) par P_1 . on obtient du fait que $P_2 = \sqrt{5}(6\mu^2 - 6\mu + 1)$ et $P_1^2 = \frac{2P_2}{\sqrt{5}} + 1$, l'équation suivante :

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{2P_2}{\sqrt{5}} + 1 \right) + \frac{P_1}{2} \right] \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \sigma P_1 \phi_1 = P_1 \times \left(\frac{\sigma c}{2} \int_0^1 \phi_1(x, \mu) d\mu + \frac{\sigma c}{2} \int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu) d\mu + \tilde{G}_2(x) \right).$$

En intégrant l'égalité précédente entre 0 et 1 et en tenant compte des moments de Legendre **ainsi que de la troncature** on obtient :

$$(3.6) \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{1,0}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_{1,1}}{dx} + \sigma \phi_{1,1} = 0.$$

De même en multipliant la seconde égalité de (3.4) par Q_1 et en intégrant cette fois entre -1 et 0 , la troncature et la définition des moments de Legendre conduisent à l'égalité :

$$(3.7) \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{2,0}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\phi_{2,1}}{dx} + \sigma \phi_{2,1} = 0.$$

Finalement le système de correction s'écrit alors :

$$(S_c) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{1,1}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_{1,0}}{dx} + \sigma \left(1 - \frac{c}{2} \right) \phi_{1,0} - \frac{\sigma c}{2} \phi_{2,0} = G_2 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{2,1}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\phi_{2,0}}{dx} + \sigma \left(1 - \frac{c}{2} \right) \phi_{2,0} - \frac{\sigma c}{2} \phi_{1,0} = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{1,0}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d\phi_{1,1}}{dx} + \sigma \phi_{1,1} = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{d\phi_{2,0}}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\phi_{2,1}}{dx} + \sigma \phi_{2,1} = 0 \\ \phi_{1,0}(0) = \phi_{1,1}(0) = \phi_{2,0}(L) = \phi_{2,1}(L) = 0 \end{cases}$$

Comme $f_2(x, \mu) = f_2^{(n+1/2)}(x, \mu) + \phi_2(x, \mu)$, alors :

$$\frac{\sigma c}{2} \left(\int_{-1}^0 f_2(x, \mu') d\mu' \right) \mathbf{1}_1(\mu) = F_2^{(n+1/2)} + \frac{\sigma c}{2} \left(\int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu') d\mu' \right) \mathbf{1}_1(\mu).$$

Or $\phi_{2,0}(x)$ calculé par le système (S_c) est, du fait de la troncature des développements de Legendre, une approximation de $\int_{-1}^0 \phi_2(x, \mu') d\mu'$, alors on pose :

$$F_2^{(n+1)}(x, \mu) = F_2^{(n+1/2)}(x, \mu) + \frac{\sigma c}{2} \phi_{2,0}(x) \mathbf{1}_1(\mu).$$

On peut alors définir l'algorithme de correction par :

$$(P_c) \quad \begin{cases} F_2^{(0)} \text{ donné } (F_2^{(0)} = K_{12} f^{(0)} \text{ avec } f^{(0)} \in D(T)) \\ T f_1^{(n+1/2)} - K_{11} f_1^{(n+1/2)} = F_2^{(n)} + S_1 \\ T f_2^{(n+1/2)} - K_{22} f_2^{(n+1/2)} = K_{21} f_1^{(n+1/2)} + S_2 \\ F_2^{(n+1)}(x, \mu) = K_{12} f_2^{(n+1/2)}(x, \mu) + \frac{\sigma c}{2} \phi_{2,0}(x) \mathbf{1}_1(\mu) \end{cases}$$

Où $\phi_{2,0}$ est déterminé par le système de correction (S_c).

4. DISCRÉTISATION ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans ce paragraphe nous revenons au cas général où le noyau de collision k est sous la forme $k(x, \mu, \mu') = C(x) k_0(\mu, \mu')$ vérifiant l'hypothèse (H4) et où la section efficace $\sigma = \sigma(x)$. Seul le système de correction sera discrétisé dans le cas d'un noyau constant uniquement.

Une discrétisation adaptée à ces méthodes [2] s'inspire de la méthode de projection [7], et permet dans notre cas une résolution explicite.

Notons que la nature des algorithmes définis précédemment montre qu'il suffit d'exposer la résolution d'un problème de la forme :

$$\begin{cases} (T - K_{ll}) f_l = g \\ f_l \in D(T), \quad l \in \{1, 2\} \end{cases}$$

où g est une fonction donnée à support dans Ω_r .

Plus précisément, compte tenu de l'analogie entre les deux problèmes, on se contentera d'étudier le problème précédent pour $l = 1$. Il est clair que pour $l = 1$, seule la résolution sur Ω_1 nous intéresse. Il est donc désormais légitime de chercher à résoudre le problème dans l'espace V défini par

$$V = \left\{ f \in L^2(\Omega_1), \mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) \in L^2(\Omega_1) \text{ et } f(0, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in]0, 1[\right\}.$$

On considère un maillage de Ω_1 sous la forme :

$$\bar{\Omega}_1 = \bigcup_{i,j} \omega_{ij} \text{ avec } \omega_{ij} = (x_i, x_{i+1}) \times (\mu_j, \mu_{j+1}) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, M-1$$

où $x_i = i \times \rho, \quad \mu_j = j \times \tau, \quad \rho = \frac{L}{N}, \quad \tau = \frac{1}{M}$.

On définit alors le sous-espace V_h de V , comme étant l'ensemble des fonctions de V , continues en x , dont la restriction à chaque ω_{ij} est affine en x et constante en μ .

On pose $P_h(0) = \{f_h : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}, f_{h|\omega_{ij}} \text{ est constante pour tout } \omega_{ij}\}$.

On définit encore l'opérateur A_h de V dans $P_h(0)$ tel que :

$$\begin{aligned} A_h f(x, \mu) = & \pi_h \left(\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) \right) + \pi_h(\sigma(x)) \pi_h(f(x, \mu)) \\ & - \pi_h(C(x)) \sum_{l=1}^{N_k} \pi_h(\alpha_l(\mu)) \int_0^1 \pi_h(\alpha_l(\mu')) \pi_h(f(x, \mu')) d\mu' \end{aligned}$$

où π_h désigne la projection de $L^2(\Omega_1)$ dans $P_h(0)$ définie par : $\pi_h(f)|_{\omega_{ij}} = \frac{1}{|\omega_{ij}|} \int_{\omega_{ij}} f(x, \mu) dx d\mu$.

On définit alors le problème approché :

$$(P_h) \quad \begin{cases} \text{Trouver } f_h \in V_h \\ A_h f_h = \pi_h(g) \end{cases}$$

Définissons les degrés de liberté associés à la discrétisation.

Pour cela remarquons que pour toute fonction $f_h \in V_h$, $(f_h)_y \stackrel{\text{def}}{=} (f_h) |_{\omega_y}$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(f_h)_y = (2 m_y - \gamma_y) \times \left(\frac{x - x_i}{\rho} \right) + \gamma_y \times \left(\frac{x_{i+1} - x}{\rho} \right),$$

où $m_y = \frac{1}{|\omega_y|} \int_{\omega_y} f_h(x, \mu) dx d\mu$ et $\gamma_y = \frac{1}{\tau} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} f_h(x_i, \mu) d\mu$.

Remarquons immédiatement qu'on a :

$$(4.1) \quad 2 m_y = \gamma_{i+1,j} + \gamma_y.$$

Dans le traitement sur Ω_1 , γ_y est connu, on cherche donc $\gamma_{i+1,j}$ et m_y .

On a $(A_h f_h) |_{\omega_y} = \frac{\mu_j + 1/2}{\rho} (\gamma_{i+1,j} - \gamma_y) + \bar{\sigma}_i m_y - \bar{C}_i \tau \sum_{l=1}^{N_k} \bar{\alpha}'_l \sum_{j'=0}^{M-1} \bar{\alpha}'_{l'} m_{y'}$.

On en déduit alors que le schéma s'écrit :

$$\frac{\mu_j + \frac{1}{2}}{\rho} (\gamma_{i+1,j} - \gamma_y) + \bar{\sigma}_i m_y - \bar{C}_i \tau \sum_{l=1}^{N_k} \bar{\alpha}'_l m_{y'} = (\pi_h g) |_{\omega_y} = \bar{g}_y$$

où $\bar{C}_i = \frac{1}{\rho} \int_{x_i}^{x_{i+1}} C(x) dx$, $\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\rho} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma(x) dx$ et $\bar{\alpha}'_l = \frac{1}{\tau} \int_{\mu_j}^{\mu_{j+1}} \alpha_l(\mu) d\mu$.

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{2\mu_j + \frac{1}{2}}{\rho} (m_y - \gamma_y) + \bar{\sigma}_i m_y = \tau \bar{C}_i \sum_{l=1}^{N_k} \bar{\alpha}'_l \sum_{j' \neq 0} \bar{\alpha}'_{l'} m_{y'} + \bar{g}_y.$$

On a donc

$$\left(\frac{2\mu_j + \frac{1}{2}}{\rho} + \bar{\sigma}_i \right) m_y = \tau \bar{C}_i \sum_{l=1}^{N_k} \bar{\alpha}'_l M_l^i + \frac{2\mu_j + \frac{1}{2}}{\rho} \gamma_y + \bar{g}_y \quad \text{avec} \quad M_l^i = \sum_{j'=0}^{M-1} \bar{\alpha}'_{l'} m_{y'}.$$

β_y^{-1}

Soit encore

$$(4.2) \quad m_y = \tau \bar{C}_i \beta_y \sum_{l=1}^{N_k} \alpha'_l M_l^i + D_y \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, M-1,$$

où D_y est un terme connu.

Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ fixé et pour éviter d'avoir à résoudre un gros système linéaire d'inconnues m_y , $j = 0, 1, \dots, M-1$, nous procédons au préalable à la détermination des inconnues auxiliaires M_l^i obtenues en résolvant un petit système linéaire de dimension N_k , déterminé en sommant (4.2) sur l'indice j après multiplication par α'_l . On obtient alors les équations suivantes :

$$M_l^{i'} = \sum_{l'=1}^{N_k} A_l^{i'l} M_l^{i'} + \sum_{j=0}^{M-1} \alpha'_l D_{y'}, \quad \text{où} \quad A_l^{i'l} = \tau \bar{C}_i \sum_{j'=0}^{M-1} \beta_y \bar{\alpha}'_{l'} \bar{\alpha}'_{l'} \text{ pour } l' = 1, 2, \dots, N_k.$$

Avec $\alpha_0 = \frac{-\sigma c \rho^2}{4}$, $\alpha_1 = \frac{-c \rho}{4} - \alpha_0$, $\alpha_2 = -2 \alpha_0$, $\alpha_3 = \frac{c \rho}{4} - \alpha_0$

$$\beta_0 = \frac{-\rho}{6(1+\sigma\rho)} + \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma\rho^2}{2} \left(1 - \frac{c}{2}\right), \quad \beta_1 = \frac{-1}{3\sigma} + \frac{\rho}{2} + \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\sigma\rho^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{2}{3\sigma} - \sigma\rho^2 \left(1 - \frac{c}{2}\right), \quad \beta_3 = \frac{-1}{3\sigma} - \frac{\rho}{2} + \left(\frac{-\rho}{2} - \frac{\sigma\rho^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c}{2}\right).$$

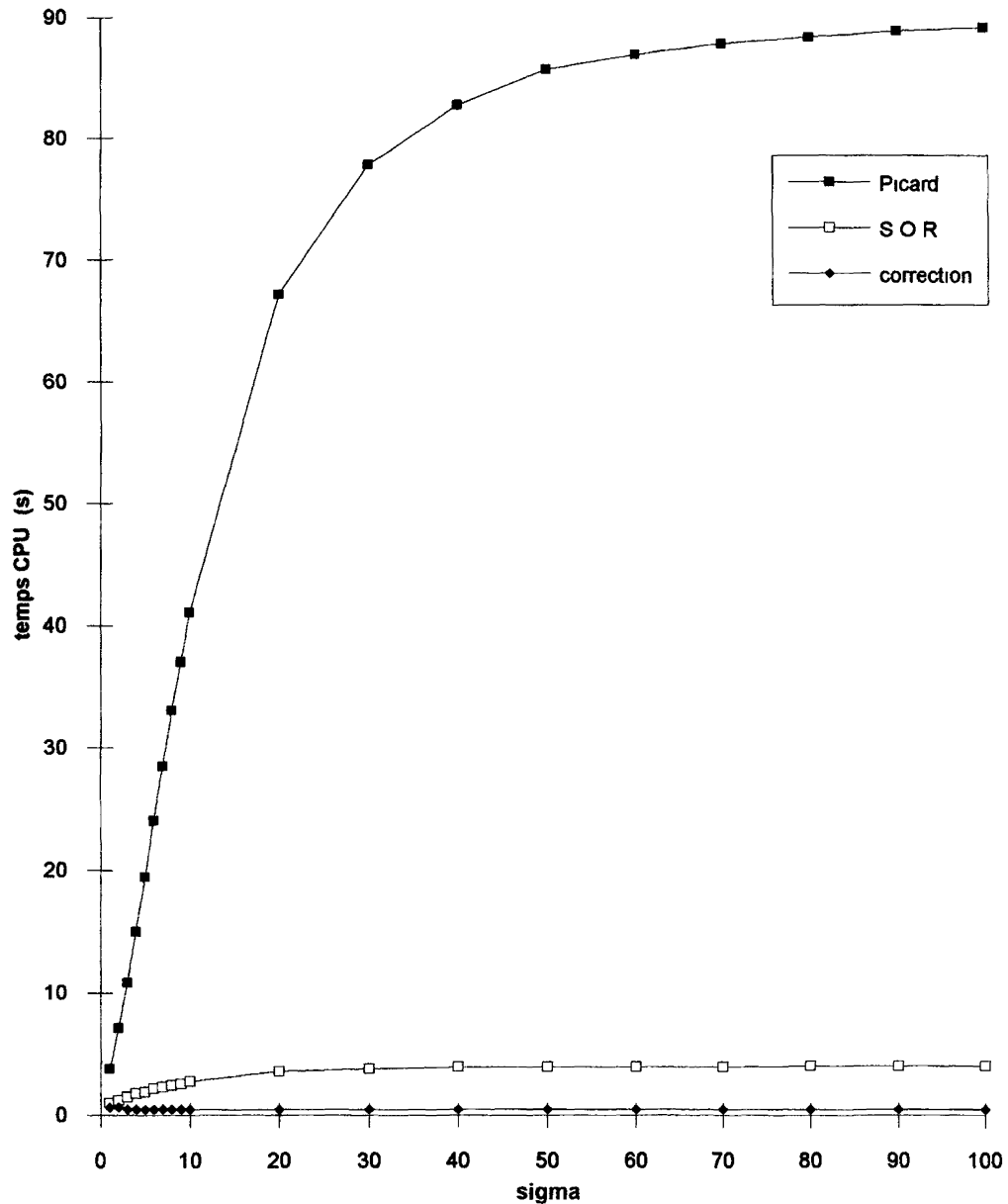


Figure 1. — Comparaison des temps de calcul en fonction de sigma.

La structure heptadiagonale de la matrice A montre que la recherche d'une décomposition de la matrice sous la forme LU semble préférable à la résolution à chaque itération de la méthode de correction d'un système linéaire par une méthode itérative.

Dans un premier temps, nous fixons le paramètre c à 0,98 et nous faisons varier le terme d'absorption σ . Nous avons fixé le nombre d'intervalles en espace à 500 et celui des directions à 20. Sur la *figure 1*, nous représentons le temps de calcul nécessaire à la convergence des différents algorithmes étudiés. Nous remarquons alors que l'algorithme standard (P_s) (dit aussi de Picard) est effectivement très lent pour les milieux critiques (σ grand). L'algorithme de relaxation S.O.R. nous octroie une accélération de la convergence significative. L'algorithme de

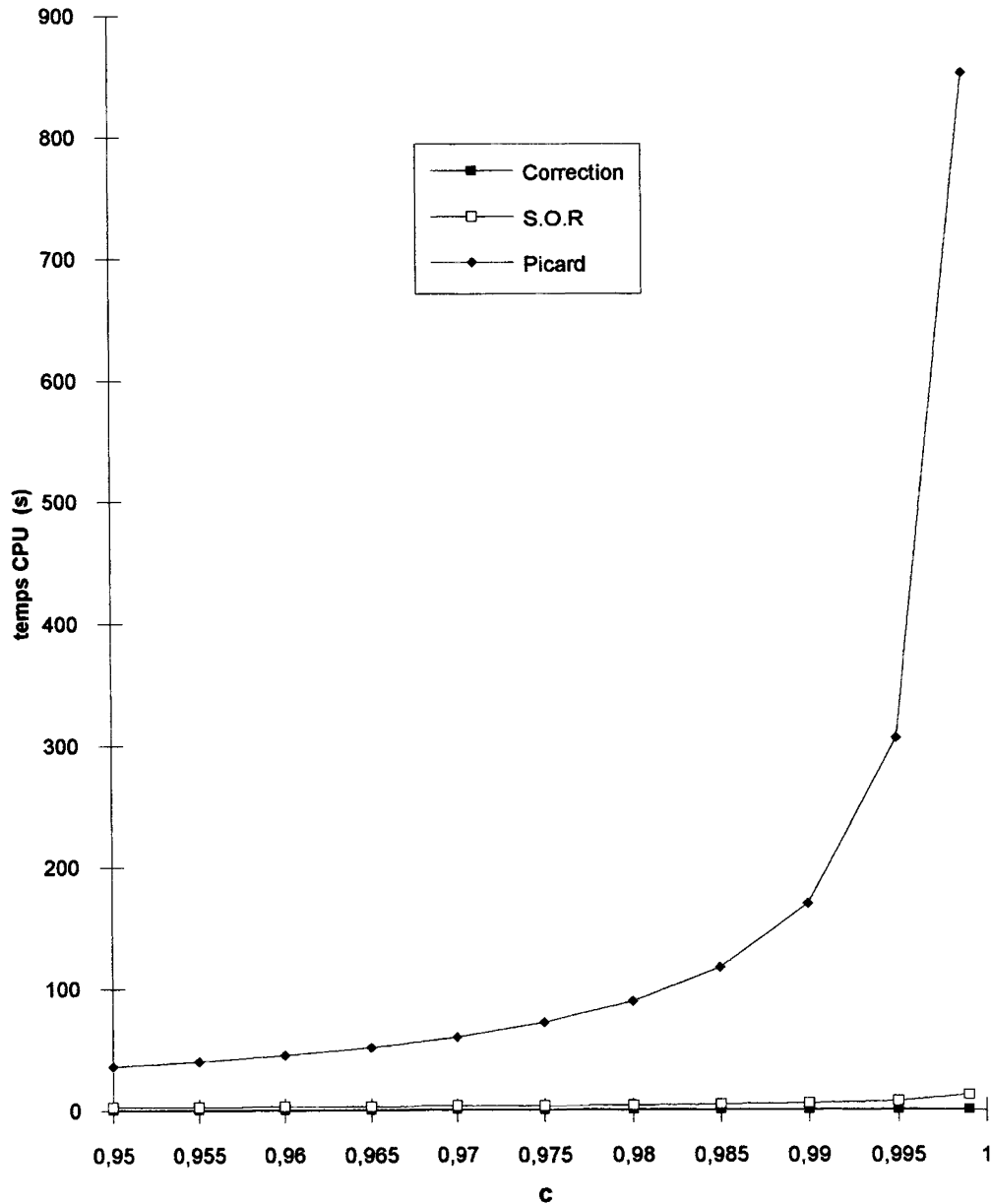


Figure 2. — Comparaison des temps de calcul en fonction de c .

correction, quant à lui, nous permet d'avoir un algorithme très performant. En effet, quelle que soit la valeur du paramètre d'absorption σ , la convergence a lieu en 3 ou 4 itérations. Dans un second temps, nous avons fixé la valeur de σ à 50 et nous avons fait varier le paramètre c de 0,95 à 0,9999. Sur la *figure 2*, nous avons donc représenté le temps de calcul nécessaire à la convergence des différents algorithmes. Là encore, les mêmes conclusions s'imposent. L'algorithme standard est extrêmement lent lorsque c est proche de l'unité. L'algorithme de relaxation semble donner satisfaction (quoique l'on remarque la croissance du temps de calcul en fonction de c). L'algorithme de correction, quant à lui, converge extrêmement rapidement (3 ou 4 itérations) quelque soit la valeur de c dans $]0, 1[$. En conclusion, l'algorithme de relaxation S.O.R. semble être un bon algorithme, mais il présente l'inconvénient d'une recherche préalable du paramètre optimal ω^* , ce qui correspond bien sûr à la recherche du rayon spectral de J (par une méthode de puissance par exemple). L'algorithme de correction proposé est, quant à lui, un algorithme très performant puisque sa convergence semble être pratiquement indépendante de σ et de c (donc du milieu). Sa mise en œuvre est très simple et sa généralisation au cas bidimensionnel est réalisable (travail en cours). Enfin, une parallélisation de ces deux nouveaux algorithmes est aisée. Ce qui diminuera encore plus le temps de calcul.

Remarque 4.2 : La généralisation aussi bien théorique que numérique de la méthode de correction au cas général où σ et k dépendent de la variable spatiale x (cas physique d'un milieu non homogène constitué de deux sous domaines l'un diffusif et l'autre absorbant) est actuellement en cours et fera l'objet d'une communication ultérieure.

RÉFÉRENCES

- [1] S. AKESBI, M. R. LAYDI, M. MOKHTAR-KHARROUBI, Décomposition d'opérateurs et accélération de la convergence en neutronique, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 765-770, 1994.
- [2] S. AKESBI, M. R. LAYDI, M. MOKHTAR-KHARROUBI, Schemes and acceleration in transport theory, Journal of Transport Theory and Stat. Phys. (à paraître).
- [3] S. AKESBI, M. NICOLET, Accélération de la convergence par relaxation en théorie du transport, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 637-640, 1995.
- [4] S. AKESBI, M. NICOLET, Décomposition d'opérateurs pour l'équation de transport stationnaire en géométrie bidimensionnelle. Proc. 26^e Congrès National d'Analyse Numérique, p. 189-190, 1994.
- [5] ALCOUFFE-CLARK-LARSEN, The Diffusion Synthetic acceleration in multiple Time Scales. J. Brackbill, editor Ac. Press (1985).
- [6] P. G. CIARLET, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, 1982.
- [7] R. KRESS, Linear integral equations, Springer Verlag, 1989.
- [8] E. W. LARSEN, Unconditionally stable diffusion-synthetic acceleration methods for the slab geometry discrete-ordinates equations, Part I, Part II. Nucl. Sci. and Eng. 1988.
- [9] P. LASCAUX, R. THEODOR, Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, tome 2, Masson, 1987.
- [10] I. MAREK, Frobenius theory of positive operators, Comparison theorems and applications. Siam. Jour. Appl. Math., vol. 19, n° 3, November 1970.
- [11] M. MOKHTAR-KHARROUBI, On the approximation of a class of transport equations, Transport Theory and Statistical Physics, 22 (4), p. 561-570, 1993.
- [12] P. NELSON, A Survey Convergence Results in Numerical Transport Theory. Com. Proceedings in honor of G. M. Wing's 65th birthday. Transport Theory, Invariant Imbedding, and Integral. Edited by P. Nelson and al., 1989.
- [13] R. SANCHEZ and N. J. McCORMICK, A review of Neutron Transport Approximations. Nucl. Sci. and Eng. 80, p. 481-535, 1982.
- [14] R. S. VARGA, Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs. N.J., 1962.