M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

STÉPHANE CORDIER
YUE-JUN PENG

Système Euler-Poisson non linéaire. Existence globale de solutions faibles entropiques

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, nº 1 (1998), p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_1_1_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE

(Vol 32, n° 1, 1998, p 1 à 23)

SYSTÈME EULER-POISSON NON LINÉAIRE. EXISTENCE GLOBALE DE SOLUTIONS FAIBLES ENTROPIQUES (*)

Stéphane CORDIER (1)
Yue-Jun PENG (2)

Résumé — *Nous prouvons un résultat d'existence globale de solutions faibles entropiques pour le système des équations d'Euler isotherme couplé à l'équation de Poisson pour des électrons satisfaisant l'équilibre de Maxwell-Boltzmann La méthode numérique est basée sur le schéma de Glimm pour la partie hyperbolique et une intégration directe des termes sources © Elsevier, Paris*

Mots-Clés équations d'Euler, modèle électrostatique, méthode de Glimm, solutions faibles, entropie.

Abstract — *We prove the global existence of an entropy weak solution to the system of isothermal Euler equations for ions coupled with the Poisson equation involving Maxwellian electrons The method is based on a splitting of the hyperbolic part treated with a Glimm scheme and the source terms which are directly integrated © Elsevier, Paris*

Key words Euler equations, electrostatic model, Glimm method, weak solutions, entropy

1. INTRODUCTION

Dans ce travail, on considère un modèle mono-dimensionnel de plasma constitué d'électrons et d'ions. Les électrons sont supposés en équilibre thermodynamique et les ions sont décrits par un modèle fluide isotherme pour des particules chargées soumises à l'action du champ électrique auto-consistant. La présence de particules neutres est modélisée par un terme de collisions entre ions et neutres.

Ce modèle est assez classique en physique des plasmas mais, il n'existe pas de résultat d'existence globale en temps de solutions faibles entropiques pour ce système avec des conditions initiales arbitraires. Un premier résultat a été obtenu récemment par Poupaud, Rascle et Vila pour un modèle isotherme de semiconducteurs [18]. Les auteurs s'intéressent alors à un modèle fluide pour des électrons en présence d'un fond d'ions fixes. Une technique similaire, basée sur la méthode de Glimm, a été utilisée pour montrer l'existence de solutions pour un modèle fluide pour les ions et les électrons [4]. Un autre résultat a été obtenu indépendamment par une méthode de compacité par compensation pour un modèle de semiconducteurs [14].

Ce modèle peut être dérivé à partir d'un modèle cinétique complet comportant les équations de Vlasov pour les ions et les électrons couplées avec l'équation de Poisson. On suppose alors que les électrons sont en équilibre de Maxwell-Boltzmann, i.e. la fonction de distribution des électrons est de la forme :

$$f_e(x, v, t) = \exp\left(\frac{-\frac{1}{2} m_e v^2 + e\phi}{k_B T_e} \right) \tag{1.1}$$

où m_e est la masse des électrons, ϕ le potentiel électrique, e la charge élémentaire des électrons, k_B la constante de Boltzmann et T_e la température électronique supposée constante. La fonction de distribution des ions est, elle, supposée Maxwellienne de température donnée T_i (constante). De façon équivalente, on peut supposer que la pression ionique suit la loi des gaz parfaits

$$p(n) = nk_B T_i, \tag{1.2}$$

(*) Manuscrit reçu le 22 mai 1995, accepté le 17 juillet 1996
(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI BP 187, 75252 Paris cedex 05, France
mail cordier@ann jussieu fr
(2) Laboratoire de mathématiques appliquées, Université Clermont Ferrand II, 63117 Aubière cedex, France
mail peng@ucfma univ-bpclermont fr

Nous renvoyons à [18] pour une revue des analyses mathématiques du système Euler-Poisson Nous allons utiliser une méthode de Glimm et nous devons contrôler uniformément la variation totale du champ électrique

Dans la Section 2, nous précisons le modèle utilisé en détaillant l'adimensionnement adéquat et les hypothèses physiques sous-jacentes, puis nous énonçons le résultat principal Le reste de l'article est consacré à sa démonstration dont les étapes sont les suivantes construction du schéma numérique (Section 3), rappel de propriétés classiques des solutions au problème de Riemann par la méthode de Glimm (Section 4), estimations uniformes pour la norme de la variation totale (Section 5) et enfin, convergence des solutions construites vers une solution faible entropique pour le système Euler-Poisson non linéaire (Section 6) Les domaines d'application de ce type de modèles sont présentés en conclusion

2. DÉRIVATION DU MODÈLE ET PRINCIPAUX RÉSULTATS

On considère un modèle fluide mono-dimensionnel de plasma constitué d'électrons en équilibre de Maxwell-Boltzmann et d'ions, considéré comme un fluide (à l'équilibre thermodynamique local) de particules chargées soumis à un champ électrique auto-consistant donné par l'équation de Poisson

Les ions sont décrits par leur densité $n(x, t)$ et leur vitesse moyenne $u(x, t)$ Ces variables macroscopiques vérifient le système des équations d'Euler (conservations de la masse et de la quantité de mouvement) pour des particules chargées en prenant en compte les collisions avec un gaz de neutres supposé dans un état d'équilibre connu

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial (nu)}{\partial x} = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2 1}$$

$$\frac{\partial (nu)}{\partial t} + \frac{\partial (nu^2 + nT_i)}{\partial x} = -\sigma n(u - u_*) + nE,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2 2}$$

où la fonction $\sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}$ représente la fréquence de collisions entre les ions et les particules neutres de vitesse moyenne donné u_* et $E = -\dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ le champ électrique Ces équations ont été adimensionnées de la façon (usuelle) suivante la densité n (respectivement les longueurs x) par une unité de densité arbitraire n_0 (respectivement L), les vitesses u et u_* par la vitesse thermique ionique $v_{th} = \sqrt{\dfrac{k_B T_i}{m_i}}$, les températures par T_e et le potentiel électrique par $\phi_0 = \dfrac{k_B T_e}{e}$ Les constantes physiques k_B, e, m_i sont adimensionnées à 1 pour ces échelles

Les électrons satisfont un équilibre de Maxwell-Boltzmann (1 1) et sont donc décrits par leur densité macroscopique sous la forme

$$n_e(x, t) = \int_{v \in \mathbb{R}} f_e(x, v, t)\, dv = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \tag{2 3}$$

Cette hypothèse est physiquement justifiée par l'approximation de masse des électrons négligeable devant celle des ions En effet, l'équation de conservation de la quantité de mouvement électronique s'écrit

$$m_e \left\{ \frac{\partial (n_e u_e)}{\partial t} + \frac{\partial (n_e u_e^2)}{\partial t} \right\} + \frac{\partial n_e T_e}{\partial x} = -\sigma_e n_e m_e (u_e - u_*) - n_e E,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2 4}$$

avec u_e la vitesse moyenne des électrons, T_e leur température et σ_e leur fréquence de collisions avec les neutres Lorsque l'on fait tendre m_e vers 0 dans (2 4), on obtient formellement

$$\frac{\partial n_e}{\partial x} = n_e \frac{\partial \phi}{\partial x},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{2 5}$$

L'adimensionnement décrit ci-dessus (en choisissant $T_e = 1$ comme température de référence) conduit à la forme sans dimension suivante de la relation de Maxwell-Boltzmann

$$n_e(x, t) = \exp(\phi) . \tag{2.6}$$

Le potentiel électrique est alors donné par l'équation de Poisson qui s'écrit sous forme adimensionnée :

$$-\left(\frac{\lambda_D}{L}\right)^2 \partial_{xx}\phi = \frac{\partial E}{\partial x} = n - n_e , \tag{2.7}$$

où $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}}$ est la longueur de Debye et ϵ_0 la permitivité du vide. Pour simplifier les notations, on prendra $L = \lambda_D$ dans ce travail, sans restreindre la généralité du problème à longueur de Debye fixée. Cependant, dans de nombreuses situations physiques le paramètre $\lambda = \left(\frac{\lambda_D}{L}\right)$ est très petit et il est alors indispensable de faire une analyse asymptotique du modèle (ce qui correspond physiquement à la limite quasi-neutre du plasma, voir [7] pour une présentation physique de ce passage à la limite). Cette analyse a motivé de nombreux travaux mathématiques récents pour des modèles « simplifiés » (par exemple, ions fixes [10], apparition de mesures de défaut [11], modèles de semiconducteurs [15], modèles stationnaires [1], [16] et [13]). D'autre part, des résultats ont été obtenus pour des modèles fluides à la fois pour les électrons et les ions (solutions ondes progressives [5], théorème d'existence [4]).

La validité physique du modèle ainsi décrit tient à la remarque suivante. On peut montrer à partir de la théorie cinétique collisionnelle des plasmas que les temps de relaxation des fonctions de distribution par interaction mutuelle varie comme la racine carrée de la masse des particules (à température et densité comparable). Soit τ_e le temps de relaxation des électrons vers la Maxwellienne (respectivement τ_ι celui des ions) et τ_E le temps de relaxation des énergies. On a alors :

$$\tau_E = \left(\frac{m_\iota}{m_e}\right)^{1/2} \tau_\iota = \left(\frac{m_\iota}{m_e}\right) \tau_e . \tag{2.8}$$

Il est donc légitime de considérer un modèle fluide pour les ions et un équilibre de Maxwell-Boltzmann pour les électrons plus légers avec des températures différentes mais du même ordre de grandeur. Nous renvoyons à [7] pour une discussion détaillée de la physique des plasmas.

Dans cet article, on note (E-PNL) le système des équations (2.1)-(2.2)-(2.6)-(2.7) auquel on ajoute les conditions initiales :

$$n(0, x) = n^0(x) , \quad x \in \mathbb{R} , \tag{2.9}$$

$$u(0, x) = u^0(x) , \quad x \in \mathbb{R} . \tag{2.10}$$

On suppose que seule une région bornée est hors de l'équilibre ; plus précisément, on suppose que le plasma est uniforme et électriquement neutre à l'extérieur de cette région i.e. il existe des constantes $n^\pm$, L^0 et $u^\pm$ telles que

$$n^0(x) = n^\pm, \quad \pm x > L^0, \tag{2.11}$$

$$u^0(x) = u_*(x) = u^\pm, \quad \pm x > L^0, \tag{2.12}$$

où $\pm x > L^0$ représente naturellement $+x > L^0$ ou bien $x < -L^0$. Nous montrons que la région hors équilibre s'étend à vitesse finie i.e. il existe une fonction croissante de t telle que $L(0) = L^0$ et

$$n(x,t) = n^{\pm}, \quad \pm x > L(t), t > 0, \tag{2.13}$$

$$u(x,t) = u^{\pm}, \quad \pm x > L(t), t > 0. \tag{2.14}$$

Cette propriété est due à la propagation à vitesse finie du support des solutions d'un système hyperbolique. En effet, le champ électrique est nul à l'extérieur et la vitesse à l'infini reste donc constante. On peut noter que cette propriété de la vitesse à l'infini est basée sur l'hypothèse physique de vitesse égale à l'infini pour les neutres et les ions et sur l'absence de champ électrique extérieur. On ajoute au problème elliptique non linéaire (2.7) qui s'écrit sous forme adimensionnée

$$(PNL) \; -\partial_{xx}\phi = n(x,t) - \exp(\phi), \tag{2.15}$$

des conditions aux limites de type Neumann

$$\partial_x \phi(\pm L(t)) = 0. \tag{2.16}$$

L'équation (PNL) n'est donc valable que dans le domaine hors équilibre $[-L(t), L(t)]$. La borne $L(t)$ est soit une fonction affine du temps t dont la pente est fixée *a priori* pour vérifier la condition C.F.L. pour tout $t \in [0, T]$, soit une fonction continue et croissante qu'on ne peut pas décrire explicitement mais que l'on va construire. Nous présenterons la seconde solution car elle permet d'obtenir un résultat d'existence pour un temps d'existence T arbitrairement grand.

Les conditions aux limites n'imposent pas que le plasma est neutre en $x = \pm L(t)$. Cependant elles peuvent être vues comme une approximation des conditions sur le problème posé sur la droite réelle que l'on tente d'approcher. Il n'est pas possible de résoudre le problème avec la méthode que nous présentons sur toute la droite réelle car on perd alors la propagation à vitesse finie du support de la perturbation électrique et l'estimation de la variation totale du champ électrique qui sont les deux propriétés essentielles de la construction. De plus, cette propriété est cruciale du point de vue numérique. Nous allons montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1 : *On suppose*

$$n^0 \geqslant n_{\min} > 0, \sigma \geqslant 0, \sigma, n^0, u_* \in BV(\mathbb{R}). \tag{2.17}$$

Soit $T > 0$, il existe une fonction L pour $t \in [0, T]$, continue, croissante, vérifiant $L(0) = L^0$ et telle que le problème (E-PNL) possède une solution (n, u, ϕ) faible entropique sur $[0, T]$ pour les conditions initiales (2.9)-(2.10) vérifiant les hypothèses (2.11)-(2.12) et des conditions aux limites données par (2.16).

Rappelons qu'une solution des équations d'Euler est dite entropique si elle vérifie

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su + nT_i u)}{\partial x} - nuE + n\sigma(u - u_*)\, u \leqslant 0, \tag{2.18}$$

au sens des distributions, où l'entropie spécifique ionique $S(x,t)$ est définie par

$$S = \frac{1}{2} nu^2 + nT_i \ln(n). \tag{2.19}$$

Les étapes de la démonstration sont les suivantes :

On construit des solutions approchées du problème (E-PNL) dans la partie 3. La méthode utilisée est constituée d'une méthode de Glimm pour la partie hyperbolique sans les termes de source (champ électrique et collisions ions-neutres) qui sont pris en compte en intégrant une équation différentielle ordinaire pour la vitesse. La résolution numérique de l'équation de Poisson non linéaire peut être réalisée par plusieurs méthodes soit éléments finis, soit linéarisation [13], [19] ou bien encore sur-solutions [20]. Nous ne détaillerons pas ces méthodes et nous utiliserons uniquement certaines propriétés des solutions.

Ensuite, nous rappelons quelques propriétés classiques pour les solutions du problème de Riemann associé au système des équations d'Euler isotherme. Le résultat principal est la décroissance de la variation totale de $\ln(n)$ en temps avec le schéma de Glimm (voir [9] et aussi [17]). Nous utilisons également un argument de domaine invariant pour le problème de Riemann dans le plan (n, u) pour contrôler la norme $\| u \|_{L^\infty}$ qui détermine la condition C.F.L.

La preuve de la convergence suit ensuite la méthode utilisée dans [18].

3. DESCRIPTION DU SCHÉMA NUMÉRIQUE

On fixe un temps $T > 0$ arbitrairement grand et on cherche à construire une solution au système (E-PNL) pour $t \in (0, T)$. On considère des solutions approchées constantes au temps $t_p < T$ sur les intervalles de la forme

$$I_i = [x_i - h/2, x_i + h/2], x_i = ih, i \in \mathbb{Z}, \tag{3.1}$$

où la suite t_p est définie par $t_0 = 0$ et :

$$t_p = \sum_{k \leq p} \tau_k, v_p \tau_p = h, \quad v_p > 0, p \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

La suite $(v_p)_{p \geq 0}$ est croissante et sera construite ultérieurement. Soit $n^{0,h}$ l'approximation des conditions initiales constantes sur les intervalles I_i. On suppose que les valeurs approchées (n_p, u_p) de la solution (n, u) du système des équations d'Euler constantes sur les intervalles I_i sont connues à l'instant t_p et vérifient les conditions suivantes

$$n_p > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

$$n_p(x) = n^{\pm}, \quad \pm x > L^0 + ph, \tag{3.4}$$

$$u_p(x) = u^{\pm}, \quad \pm x > L^0 + ph. \tag{3.5}$$

Nous allons maintenant définir (n_{p+1}, u_{p+1}). On résout le problème de Riemann pour le système (2.1)-(2.2) sans second membre :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2 + nc^2)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{3.7}$$

avec $c = \sqrt{T_i}$.

Soient $V^- = (n^-, u^-)$, $V^+ = (n^+, u^+)$ les conditions initiales pour $x < 0$ et $x > 0$ respectivement, on sait que le problème de Riemann pour le système (3.6)-(3.7) possède une unique solution admissible de la forme $\mathscr{V}(V^-, V^+, \xi)$ où $\xi = \frac{x}{t}$. Dans la suite, nous notons $f(i)$ la valeur d'une fonction $f(x)$ au point x_i et f^h l'approximation par les fonctions constantes par morceaux de f. On définit ainsi :

$$V_{p+\frac{1}{2}}(i) = \mathscr{V}(V_p(i), V_p(i+1), -(1-\beta_p)\, v_{p+1}) \quad \text{pour} \quad \beta_p \geq \frac{1}{2}, \tag{3.8}$$

$$V_{p+\frac{1}{2}}(i) = \mathscr{V}(V_p(i-1), V_p(i), \beta_p\, v_{p+1}) \quad \text{pour} \quad \beta_p < \frac{1}{2}. \tag{3.9}$$

La suite $(\beta_p)_{p \geqslant 0}$ est une suite aléatoire à valeurs dans [0,1] associée au schéma de Glimm (i e le schéma converge pour presque toute suite $(\beta_p)_{p \geqslant 0}$, voir Section 6) Suivant les idées de [18], on introduit une correction de la charge de façon à obtenir une borne uniforme de la densité totale on définit la densité discrétisée n_{p+1} au temps t_{p+1}, par récurrence

$$\delta_0 = \int_{-L^0}^{L^0} n^0(x)\, dx\,, \tag{3 10}$$

$$\delta_{p+1} = \delta_p + (n^- u^- - n^+ u^+)\, \tau_{p+1} + (n^- + n^+)\, h\,, \tag{3 11}$$

$$\gamma_p = \delta_p \Big/ \int_{-L_p}^{L_p} n_{p-\frac{1}{2}}(y)\, dy \tag{3 12}$$

$$\tilde{n}_p = n_{p-\frac{1}{2}}\, \gamma_p, \quad n_p = n_{p-\frac{1}{2}} \tag{3 13}$$

Cette correction permet de satisfaire l'analogue discret de la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-L}^{L} n(x,t)\, dx = n^- u^- - n^+ u^+, \quad \forall L > L(t) \tag{3 14}$$

En effet, on a la

PROPOSITION 3 1 *La densité $\tilde{n}_p$ vérifie $\forall p$*

$$\int_{-L_p}^{L_p} \tilde{n}_p(x)\, dx = \int_{-L^0}^{L^0} \tilde{n}^0(x)\, dx + (n^- u^- - n^+ u^+)\, t_p + (n^- + n^+)\, ph \tag{3 15}$$

La preuve est immédiate avec (3 10)-(3 11)-(3 12)-(3 13) On vérifie facilement que les propriétés (3 3) et (3 4) sont satisfaites pour $p+1$ On résout alors le problème elliptique avec

PROPOSITION 3 2 *Soit $\tilde{n}_{p+1} \in L^\infty(-L_p, L_p)$ avec $\tilde{n}_{p+1} \geqslant n_{inf} > 0$, il existe une unique solution $\phi_{p+1} \in W^{2,\infty}(L_p, L_p)$ au problème (PNL) de Poisson non linéaire (2 15)-(2 16) pour $n = \tilde{n}_{p+1}$ et $L_p = L^0 + ph$ telle que il existe $C > 0$ et*

$$\|\phi\|_\infty \leqslant \phi^\infty \overset{def}{=} \|\ln n\|_\infty + \max\left(|\ln(n^+)|, |\ln(n^-)|\right), \tag{3 16}$$

$$\|\partial_{xx}\phi\|_\infty \leqslant \phi^{2,\infty} \overset{def}{=} \max\left(\exp(\phi^\infty), \|n\|_\infty\right) \leqslant C \exp(\|\ln n\|_\infty) \tag{3 17}$$

Démonstration On montre que le système (PNL) est bien posé par une méthode de sur et sous solution soit ϕ_0 la fonction affine telle que $\phi_0(\pm L_p) = \ln(n^+)$, la fonction $\psi = \phi - \phi_0$ est solution du problème elliptique non linéaire homogène

$$-\partial_{xx}\psi = n - \exp(\phi_0 + \psi)\,, \tag{3 18}$$

si et seulement si ϕ est solution de (PNL) On dispose alors de sous et sur solutions évidentes du problème en $\bar{\psi} = \max(0, \ln(\|n\|_\infty) - \min \phi_0)$ et $\underline{\psi} = \min(0, \ln(n_{inf}) - \max \phi_0)$ On peut donc appliquer la théorie classique (voir Théorème 10-3 dans [20]) ou bien vérifier les estimations directement (dimension 1) De plus, la fonction exp étant C^∞ et le second membre $n \in L^\infty$, on a une solution $\phi \in W^{2,\infty}$ Les estimations (3 16) et (3 17) s'obtiennent immédiatement L'unicité provient de la monotonie de la fonction exp

□

Remarque 3.3 : Ce résultat d'existence a été précédemment énoncé dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^N$ avec des conditions aux limites légèrement différentes [10] et dans le cas de $\mathbb{R}^N$ [8]. Nous avons rappelé la démonstration pour préciser les estimations sur les normes des solutions ϕ.

Le champ électrique E_{p+1} associé à ϕ_{p+1} est dans $W^{1,\infty}(-L_p, L_p)$ et prolongé par 0 à l'extérieur. On définit alors u_{p+1} en résolvant l'équation (2.2) sans terme de divergence. On obtient une équation différentielle ordinaire pour la vitesse prenant en compte les effets des collisions et du champ électrique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sigma(u - u_*) + E, t > 0 . \tag{3.19}$$

La résolution exacte en temps du problème approché en espace donne :

$$u_{p+1}(i) = u_{p+\frac{1}{2}}(i) \exp(-\sigma^h(i)\,\tau_{p+1}) + \left(u_*^h(i) + \frac{E_{p+1}(i)}{\sigma^h(i)}\right)(1 - \exp(-\sigma^h(i)\,\tau_{p+1}))\,, \tag{3.20}$$

avec la convention de notation suivante :

$$\frac{1 - \exp^{-\sigma\tau}}{\sigma} = \tau\,, \quad \text{pour} \quad \sigma = 0\,. \tag{3.21}$$

On a donc défini la solution au temps t_{p+1}.

Remarque 3.4 : En l'absence de collisions avec les particules neutres, l'équation (3.20) décrit uniquement l'accélération due au champ électrique :

$$u_{p+1}(i) = u_{p+\frac{1}{2}}(i) + E_{p+1}(i)\,\tau_{p+1}\,. \tag{3.22}$$

4. PROBLÈME DE RIEMANN

Dans cette partie, nous rappelons les propriétés des solutions du problème de Riemann pour (3.6)-(3.7), i.e. le problème de Cauchy pour des données initiales constituées de 2 états constants :

$$V(x, t=0) = (n^0(x), u^0(x)) = \begin{cases} V(x,0) = V^-, & \text{pour } x < 0\,, \\ V(x,0) = V^+, & \text{pour } x < 0\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

Les caractéristiques de (3.6)-(3.7) sont vraiment non linéaires associées aux vitesses $u \pm c$ et aux invariants de Riemann $u \pm \eta$ où $\eta \overset{def}{=} c \ln(n)$. Rappelons que résoudre le problème de Riemann revient à construire un état intermédiaire V^0 tel que :

— (V^-, V^0) soit connecté par une 1-onde,
— (V^0, V^+) soit connecté par une 2-onde.

Les k-ondes sont caractérisées par leur invariant de Riemann pour les ondes de détentes et les relations de chocs et d'entropie pour les chocs. On introduit la fonction suivante :

$$F(t) = \begin{cases} t & \forall t < 0\,, \\ 2\,c \sinh\left(\frac{t}{2\,c}\right) & \forall t \geqslant 0\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Alors, η^0 est l'unique solution (F étant croissante) de

$$u^- - u^+ = F(\eta^0 - \eta^-) + F(\eta^0 - \eta^+)\,, \tag{4.3}$$

et u^0 est donné par

$$u^0 = u^+ + F(\eta^0 - \eta^+) \tag{4.4}$$

On définit une fonctionnelle de Glimm simplifiée par

$$G(V^-, V^+) = |\eta^0 - \eta^-| + |\eta^0 - \eta^+| \tag{4.5}$$

La fonction G est utilisée pour évaluer la variation totale TV de la solution (η étant monotone pour les k-ondes)

$$G(V^-, V^+) = TV(\eta(\cdot\,, t)) \quad \text{pour} \quad t > 0\,, \tag{4.6}$$

où $\eta(x, t) = c \ln(n(x, t))$ avec $(n(x, t), u(x, t)) = \mathscr{V}\left(V^-, V^+, \frac{x}{t}\right)$ est la solution du problème de Riemann. On rappelle maintenant quelques propriétés essentielles de la fonctionnelle de Glimm dont les preuves simplifiées sont présentées dans [18].

PROPOSITION 4.1. *Soient* $V^1, V^2, V^3 \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, *on a*

$$G(V^1, V^3) \leqslant G(V^1, V^2) + G(V^2, V^3) \tag{4.7}$$

De plus, si V^2 *est un état intermédiaire de la solution du problème de Riemann pour le système (3.6) (3.7) et les conditions initiales* (V^1, V^3) *i.e.*

$$V^2 = \mathscr{V}(V^-, V^+, \xi_2) \text{ pour un } \xi_2 \in \mathbb{R}\,, \tag{4.8}$$

alors

$$G(V^1, V^3) = G(V^1, V^2) + G(V^2, V^3) \tag{4.9}$$

La proposition suivante permet d'évaluer l'effet d'une perturbation (par exemple, l'effet du champ électrique ou celui des collisions) de la vitesse définie par (3.21) sur la fonctionnelle G.

PROPOSITION 4.2. *Soient* $V^- = (n^-, u^-)$ *et* $V^+ = (n^+, u^+) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, *on définit*

$$\tilde{V}^{\pm} = (n^{\pm}, u^{\pm} + \Delta^{\pm})\,, \quad \Delta^{\pm} \in \mathbb{R}\,, \tag{4.10}$$

$$\hat{V}^{\pm} = (n^{\pm}, \alpha u^{\pm})\,, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\,, \tag{4.11}$$

alors, on a

$$G(\tilde{V}^-, \tilde{V}^+) \leqslant G(V^-, V^+) + |\Delta^+ - \Delta^-|\,, \tag{4.12}$$

$$G(\hat{V}^-, \hat{V}^+) \leqslant G(V^-, V^+) \tag{4.13}$$

Enfin, rappelons une propriété de type domaine invariant pour la solution du problème de Riemann qui permettra d'obtenir des estimations *a priori* en norme L^∞.

PROPOSITION 4.3 : *Soient* $\Omega = \{V \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\,;\, |u - u_M| \leq \eta_M - \eta\}$ *et* $V^{\pm}$, *2 états constants dans* Ω, *alors on a*

$$\mathscr{V}(V^-, V^+, \xi) \in \Omega\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{4.14}$$

5. ESTIMATIONS UNIFORMES

On utilise les notations de la partie précédente. Soit V^h une fonction :

$$V^h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\,, \tag{5.1}$$

constante (et égale à $(V^h(i))$ sur les intervalles I_i. On définit la fonctionnelle :

$$J(V^h) = \sum_{i \in Z} G(V^h(i), V^h(i+1))\,, \tag{5.2}$$

qui permet d'estimer les variations totales TV des solutions approchées définies dans la Section 3. On montre

LEMME 5.1 : *Soit* $\{V_p\}_{p \geq 0}$ *une suite de fonctions définies en Section 3, on a*

$$J(V_{p+\frac{1}{2}}) \leq J(V_p)\,, \tag{5.3}$$

$$J(V_{p+1}) \leq J(V_p) + \tau_{p+1}\{TV(E_{p+1}) + \|\sigma^h\|_{L^\infty} TV(u_*^h)$$
$$\{+ TV(\sigma^h)\,(\,\|u_{p+\frac{1}{2}}\|_\infty + \|u_*^h\|_{L^\infty} + \tau_1 \|E_{p+1}\|_\infty)\}\,. \tag{5.4}$$

Démonstration : La première inégalité (5.3) est une application directe de la proposition 4.1. Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$. L'équation (3.21) s'écrit :

$$u_{p+1} = \alpha^h u_{p+\frac{1}{2}} + \Delta^h\,, \tag{5.5}$$

avec

$$\alpha^h = \exp(-\sigma^h \tau_{p+1})\,, \tag{5.6}$$

$$\Delta^h = (1 - \alpha^h)\,(u_*^h + (E_{p+1}/\sigma^h))\,. \tag{5.7}$$

On définit alors

$$\Delta^- = \Delta^h_{(i)}, \quad \Delta^+ = \Delta^h_{(i+1)} + (\alpha^h_{(i+1)} - \alpha^h_{(i)})\, u_{p+\left(\frac{1}{2}\right)i+1}\,, \tag{5.8}$$

$$\hat{V}^- = (n_{p+\frac{1}{2}(i)}, \alpha^h_{(i)} u_{p+\frac{1}{2}(i)})\,, \quad \hat{V}^+ = (n_{p+\frac{1}{2}(i)}, \alpha^h_{(i)} u_{p+\frac{1}{2}(i+1)})\,. \tag{5.9}$$

La seconde inéqualité s'obtient alors à partir de la proposition 4.2

$$G(\hat{V}^-, \hat{V}^+) \leq G(V_{p+\frac{1}{2}}(i), V_{p+\frac{1}{2}}(i+1))\,, \tag{5.10}$$

$$G(V_{p+1(i)}, V_{p+1(i+1)}) \leq G(\hat{V}^-, \hat{V}^+) + |\Delta^+ - \Delta^-|\,. \tag{5.11}$$

On en déduit

$$J(V_{p+1}) \leqslant J(V_{p+\frac{1}{2}}) + TV(\Delta^h) + TV(\alpha^h)\ \|u_{p+\frac{1}{2}}\|_\infty . \tag{5.12}$$

On peut, par ailleurs montrer les estimations suivantes

$$TV(\alpha^h) \leqslant \tau_{p+1}\, TV(\sigma^h) ,$$

$$\left\|\left(\frac{1-\alpha^h}{\sigma^h}\right)\right\|_{L^\infty} \leqslant \tau_{p+1} ,$$

$$TV\left(\frac{1-\alpha^h}{\sigma^h}\right) \leqslant (\tau_{p+1})^2\, TV(\sigma^h) ,$$

$$\|(1-\alpha^h)\, u_*^h\|_{L^\infty} \leqslant \|\sigma^h\|_{L^\infty}\, \tau_{p+1}\, \|u_*^h\|_{L^\infty} ,$$

$$\begin{aligned} TV((1-\alpha^h)\, u_*^h) &\leqslant \|u_*^h\|_{L^\infty}\, TV(1-\alpha^h) + \|1-\alpha^h\|_{L^\infty}\, TV(u_*^h) , \\ &\leqslant \tau_{p+1}(\|\sigma^h\|_{L^\infty}\, TV(u_*^h) + TV(\sigma^h)\ \|u_*^h\|_{L^\infty}) . \end{aligned}$$

où l'on a utilisé, en posant $g(s) = \dfrac{1-\exp(-s)}{s}$,

$$\sup_{s>0} g(s) = 1, \quad \sup_{s>0} g'(s) \leqslant 1 .$$

On en déduit une majoration de la norme $TV(\Delta^h)$:

$$\begin{aligned} TV(\Delta^h) &\leqslant TV((1-\alpha^h)\, u_*^h) + \|E_{p+1}\|_\infty\, TV\left(\frac{1-\alpha^h}{\sigma^h}\right) + TV(E_{p+1})\ \left\|\frac{1-\alpha^h}{\sigma^h}\right\|_\infty , \\ &\leqslant \tau_{p+1}(TV(E_{p+1}) + \|\sigma^h\|_{L^\infty}\, TV(u_*^h) + TV(\sigma^h)\,(\tau_{p+1}\ \|E_{p+1}\|_\infty + \|u_*^h\|_\infty)) . \end{aligned}$$

Ces deux inégalités permettent d'obtenir (5.4) à partir de (5.12).

On a les estimations *a priori* suivante

PROPOSITION 5.2 : *Il existe des constantes $C_T > 0$ et $E_T > 0$ telles que*

$$\int_{L_p}^{L_p} \tilde{n}_p(x)\, dx \leqslant C_T(1+ph) \tag{5.13}$$

$$\|E_p\|_\infty \leqslant TV(E_p) \leqslant E_T(1+ph) \tag{5.14}$$

Dans la suite C ou C_T désigne une constante positive générique qui ne dépend que de T et des données du problème $(L, \|n^0\|_\infty, n^\pm, u^\pm, \dots)$.

Démonstration : L'estimation uniforme sur la masse totale (5.13) est immédiate avec la proposition 3.1 avec

$$C_T = \int_{-L^0}^{L^0} \tilde{n}^0(x)\, dx + (n^-|u^-| + n^+|u^+|)\, T + n^- + n^+ . \tag{5.15}$$

(cf. eq. 3.15)

On sait que l'équation (PNL) possède une solution ϕ dans $W^{2,\infty}$ d'après la proposition 3.2. En intégrant (PNL) avec les conditions de Neumann homogènes en $x = \pm L(t)$, on obtient

$$- \phi'(x) = \int_{-L(t)}^{x} (n - \exp(\phi))(y)\, dy .$$

Or, on sait que $n \geqslant 0$, $\exp \phi \geqslant 0$ et

$$\int_{-L(t)}^{L(t)} n(y)\, dy = \int_{-L(t)}^{L(t)} \exp(\phi(y))\, dy ,$$

et on en déduit

$$|E(x)| = |\phi'(x)| \leqslant \int_{-L(t)}^{L(t)} (n + \exp(\phi))(y)\, dy \leqslant 2\, C_T(1 + ph) .$$

On a aussi, en utilisant (PNL)

$$TV(E) = \int_{-L(t)}^{L(t)} |E'(y)|\, dy = \int_{-L(t)}^{L(t)} |(n - \exp)|\, dy \leqslant 2\, C_T(1 + ph) .$$

De plus, la fonction Ep étant nulle aux bords, on a $\| E_p \|_\infty \leqslant TV(E_p)$ et nous avons donc montré (5.14) avec $E_T = 2\, C_T$. □

Il faut maintenant obtenir des estimations sur les normes de la variation totale et L^∞ des solutions approchées :

LEMME 5.3 : *Soit $\{v_p = h/\tau_p\}$ une suite strictement croissante et un réel $T > 0$. Alors, on a, pour tout $t_p \leqslant T$*

$$\| \eta_p \|_\infty \leqslant \eta^- + J(V_p) , \tag{5.16}$$

$$\| u_p \|_\infty \leqslant u_T + J(V_p) + E_T ph\, t_p , \tag{5.17}$$

$$\| u_{p+\frac{1}{2}} \|_\infty \leqslant u_T + J(V_{p+1}) + E_T ph\, t_p , \tag{5.18}$$

avec E_T défini par (5.14) et

$$\eta^- = c|\ln(n^-)|,\ u_T = \eta^- + \| u^0 \|_\infty + \| \eta^0 \|_\infty + (E_T + \| \sigma^h \|_{L^\infty} \| u_*^h \|_{L^\infty})\, T . \tag{5.19}$$

Démonstration : L'équation (5.16) s'obtient grâce à (4.6) : $TV(\eta_p) \leqslant J(V_p)$. On introduit

$$M_p = \| u^0 \|_\infty + \| \eta^0 \|_\infty + (E_T(1 + ph) + \| \sigma^h \|_{L^\infty} \| u_*^h \|_{L^\infty})\, t_p . \tag{5.20}$$

On doit montrer :

$$|u_p| \leqslant M_p - \eta_p, \text{ pour tout } p \text{ tel que } t_p \leqslant T \tag{5.21}$$

Eq. (5.21) est satisfaite pour $p = 0$. On la suppose vraie jusqu'au rang p, alors la proposition 4.3 donne

$$|u_{p+\frac{1}{2}}| \leqslant M_p - \eta_{p+\frac{1}{2}} = M_p - \eta_{p+1} . \tag{5.22}$$

Et, d'autre part, on a avec (5.5) :

$$|u_{p+1}| \leqslant |u_{p+\frac{1}{2}}| + \tau_{p+1}(\|E_{p+1}\|_{L^\infty} + \|\sigma^h\|_{L^\infty} \|u_*^h\|_{L^\infty}), \tag{5.23}$$

car $\|(1-\exp(-\sigma^h \tau_{p+1}))\|_{L^\infty} \leqslant \|\sigma^h\|_{L^\infty} \tau_{p+1}$. Ces estimations prouvent, en utilisant (5.14), (5.21) au rang $p+1$, on en déduit (5.17). Enfin, l'inégalité (5.22) donne (5.18). □

Nous pouvons maintenant montrer

LEMME 5.4 : *Soit v_p une suite croissante telle que*

$$\tau_1 \, TV(\sigma^h) < 1/2, \tag{5.24}$$

alors pour tout $t_p < T$, on a :

$$J(V_p) \leqslant J_T \overset{def}{=} \exp(2\, T\, TV(\sigma^h))\,(J(V_0) + T(j_T + C_T^1 v_p)) \tag{5.25}$$

avec

$$j_T = E_T + \|\sigma^h\|_{L^\infty} TV(u_*^h) + TV(\sigma^h)\,(\|u_*^h\|_{L^\infty} + u_T + E_T \tau_1). \tag{5.26}$$

et

$$C_T^1 = E_T(T + TV(\sigma^h)\,(\tau_1 T + T^2)). \tag{5.26bis}$$

Démonstration : Les lemmes 5.1 et 5.3 permettent d'obtenir

$$J(V_{p+1}) \leqslant J(V_p) + \tau_{p+1}[TV(\sigma^h)\, \|u_{p+\frac{1}{2}}\|_\infty + j_T + E_T T(1 + TV(\sigma^h)\,\tau_1)\, v_{p+1} - TV(\sigma^h)\, u_T] \tag{5.27}$$

pour tout $p \leqslant p_0$ tel que $t_{p_0} \leqslant T$ et, où j_T, défini par (5.26), vérifie, en utilisant (5.14)

$$TV(E_{p+1}) + \|\sigma^h\|_{L^\infty} TV(u_*^h) + TV(\sigma^h)\,(\|u_*^h\|_{L^\infty} + \tau_1 \|E_{p+1}\|_\infty)$$
$$\leqslant j_T + E_T T(1 + TV(\sigma^h)\,\tau_1)\, v_{p+1} - TV(\sigma^h)\, u_T .$$

En utilisant (5.18), on obtient

$$\|u_{p+\frac{1}{2}}\|_\infty \leqslant u_T + J(V_{p+1}) + E_T T^2 v_{p+1}$$

on en déduit que

$$J(V_{p+1}) \leqslant J(V_p) + \tau_{p+1}(J(V_{p+1}) + j_T + C_T^1 v_{p+1}) \tag{5.28}$$

Or, (5.24) implique $\tau_p\, TV(\sigma^h) < 1/2\ \forall p \leqslant p_0$. On pose $H_p = J(V_p) \exp(-2\, TV(\sigma^h)\, t_p)$, (5.28) s'écrit alors (en multipliant par $(\exp(-2\, TV(\sigma^h)\, t_p))$

$$H_{p+1} \exp(2\, TV(\sigma^h)\, \tau_{p+1})\,(1 - \tau_{p+1} TV(\sigma^h)) \leqslant H_p + \tau_{p+1}(j_T + C_T^1 v_{p+1}). \tag{5.29}$$

En remarquant $\min_{x \in [0, 1/2]} ((1-x)/\exp(2x)) = 1$, on obtient $H_p \leqslant H_0 + T(j_T + C_T^1 p) v_p)$ ou encore, de façon équivalente, Eq. (5.25). □

Les solutions des problèmes de Riemann pour (3 6)-(3 7) entre t_p et t_{p+1} sur chaque intervalle I_i ne doivent pas interagir , on doit donc vérifier la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (C F L)

$$v_{p+1} \geqslant 2(\| u_p \|_\infty + c) \tag{5 30}$$

La suite v_p est définie par récurrence par

$$v_1 = 2(u_T + c + j_0), j_0 \geqslant J(V^0) , \tag{5 31}$$

$$v_{p+1} = 2(u_T + c + j_p + E_T ph\, t_p), (1 - \tau_p TV(\sigma^h)) j_p = j_{p-1} + \tau_p(J_T + C_T^1 v_p) \tag{5 32}$$

Alors, (5 31) implique

$$J(V_p) \leqslant j_p , \tag{5 33}$$

et on vérifie (5 30) avec (5 17) De plus, on a

LEMME 5 5 *Soit v_p définie par (5 32) avec j_0 suffisamment grand pour que*

$$\tau_1 = h/v_1 \leqslant 1/(2\, TV(\sigma^h)) \tag{5 34}$$

Il existe une constante $v_T > 0$ telle que

$$v_p \leqslant v_T, \quad \forall p \text{ tel que } t_p \leqslant T \tag{5 35}$$

Et, finalement, t_p dépasse T, pour p arbitrairement grand

Démonstration Par construction, les suites j_p et donc v_p sont croissantes En éliminant j_p et j_{p-1} dans (5 32), on obtient, en suivant la preuve du lemme 5 5 de [18], deux constantes C_T^2 et C_T^3 telles que

$$\begin{aligned}(1 - \tau_p TV(\sigma^h)) v_{p+1} &= v_p + 2 \tau_p(J_T + C_T^1 v_p) + 2 E_T h((p + 1) t_{p+1} - p t_p) \\ &\leqslant v_p(1 + C_T^2 \tau_p) + C_T^3 \tau_p\end{aligned}$$

La suite v_p est donc bornée pour tout p tel que $t_p \leqslant T$ □

Remarque 5 6 En fait, toute suite j_p ou de façon équivalente (v_p) majorant celle définie par (5 32) et restant bornée (cf (5 35)) convient Le choix présenté correspond au pas de temps optimal pour satisfaire la condition Courant-Friedrichs-Lewy (C F L)

Finalement, on peut énoncer le résultat suivant

PROPOSITION 5 7 *Soit $T > 0$* et v_1 tel que

$$v_1 > 2(u_T + c + J(V^0)) , \quad v_1 > 2\, TV(\sigma^h) \tag{5 36}$$

La suite (n_p, u_p, ϕ_p) définie en section 3 avec v_p donné par (5 32) vérifie

$$\| u_p \|_\infty + TV(u_p) + \| \eta_p \|_\infty + TV(\eta_p) + \| \phi_p'' \|_\infty \leqslant C_T , \tag{5 37}$$

(avec ($\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(-L_p\, L_p)}$) et la condition (5 30) est vérifiée

Démonstration Sous les hypothèses (5 36), on a déjà montré avec (5 16), (5 17) et (5 25) les estimations sur $\| \eta_p \|_\infty$, $\| u_p \|_\infty$ et $TV(\eta_p) \leqslant J(V_p)$ respectivement L'estimation sur $\| \phi_p'' \|_{\infty\, (-L_p\, L_p)}$ vient directement de (5 16) et de (3 17)

La dernière quantité restant à évaluer est $TV(u_p)$, or, pour $\beta_p < 1/2$, (3 9) et (4 3) impliquent

$$|u_p(i-1) - u_p(i)| = |F(\eta_0 - \eta_p(i-1)) + F(\eta_0 - \eta_p(i))|$$

Étant donné $|F(t)| \leqslant |t| \cosh(t/2c)$, on a

$$|u_p(i-1) - u_p(i)| \leqslant G(V_p(i-1), V_p(i)) \cosh(G(V_p(i-1), V_p(i))/2c),$$

soit,

$$TV(u_p) \leqslant J(V_p) \cosh(J(V_p)/2c)$$

Le même raisonnement permet de conclure dans le cas $\beta_p \geqslant 1/2$ □

6. CONVERGENCE DU SCHÉMA

Soit $h > 0$ On fixe la suite v_p vérifiant (5 32) et une suite (β_p), on considère les suites (n_p, u_p) décrites par la proposition 5 7 On définit les solutions approchées $n^{h\beta}$ et $u^{h\beta}$ par $n^{h\beta}(x, t_p) = n_p$ et $u^{h\beta}(x, t_p) = u_p$ et $V = (n^{h\beta}, u^{h\beta})$ sont les solutions de (3 6) (3 7) sur (t_p, t_{p+1}) Plus précisément,

$$\frac{\partial n^{h\beta}}{\partial t} + \frac{\partial(n^{h\beta} u^{h\beta})}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t_p < t < t_{p+1}, \tag{6 1}$$

$$\frac{\partial(n^{h\beta} u^{h\beta})}{\partial t} + \frac{\partial(n^{h\beta}(u^{h\beta})^2 + n^{h\beta} c^2)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t_p < t < t_{p+1}, \tag{6 2}$$

$$\frac{\partial S^{h\beta}}{\partial t} + \frac{\partial(S^{h\beta} u^{h\beta} + n^{h\beta} T_i u^{h\beta})}{\partial x} \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}, t_p < t < t_{p+1}, \tag{6 3}$$

avec

$$S^{h\beta} = \frac{1}{2} n^{h\beta}(u^{h\beta})^2 + n^{h\beta} T_i \ln(n^{h\beta}) \tag{6 4}$$

Le champ électrique $E_p^{h\beta} = -\frac{\partial \phi^{h\beta}}{\partial x}$ est défini par la proposition 3 2 avec $n = \tilde{n}^{h\beta}$ et $L^h(t) = L + ph + (t - t_p) h/\tau_p$ pour $t \in (t_p, t_{p+1})$ ($\phi_p^{h\beta}$ est donc la solution exacte du problème (PNL))

Notons $n_-^{h\beta}(t_p, .)$ et $u_-^{h\beta}(t_p, .)$, les limites de n^h and u^h lorsque t tend vers t_p par valeurs inférieures et soit Ψ une fonction test sur $\mathbb{R}^2$ L'équation (6 1) s'écrit en formulation faible

$$- \int_{\mathbb{R}} \int_{t_0}^{t_1} n^{h\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (n^{h\beta} u^{h\beta}) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \sum_{t_0 < t_p < t_1} G_p^1$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} n_-^{h\beta}(x, t_1)\, \Psi(x, t_1)\, dx - \int_{\mathbb{R}} n_-^{h\beta}(x, t_1)\, \Psi(x, t_1)\, dx, \tag{6 5}$$

où G_p^1 représentent les termes d'erreur inhérents à la méthode de Glimm

$$G_p^1 = \int_{\mathbb{R}} (n_-^{h\beta}(x, t_p) - n_p(x))\, \Psi(x, t_p)\, dx \tag{6 6}$$

La formulation faible de Eq. (6.2) s'écrit :

$$-\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t_1}(n^{h,\beta}u^{h,\beta})\frac{\partial \Psi}{\partial t}+(n^{h,\beta}(u^{h,\beta})^2+n^{h,\beta}c^2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}=\sum_{t_0<t_p<t_1}(G_p^2+H_p^2)$$

$$+\int_{\mathbb{R}}(n_-^{h,\beta}u_-^{h,\beta})(x,t_1)\,\Psi(x,t_1)\,dx-\int_{\mathbb{R}}(n_-^{h,\beta}u_-^{h,\beta})(x,t_0)\,\Psi(x,t_0)\,dx\,. \tag{6.7}$$

de la même façon, (6.3) donne pour $\Psi \geqslant 0$:

$$-\int_{\mathbb{R}}\int_{t_0}^{t_1}S^{h,\beta}\frac{\partial \Psi}{\partial t}+(S^{h,\beta}u^{h,\beta}+n^{h,\beta}T_\iota u^{h,\beta})\frac{\partial \Psi}{\partial x}\leqslant\sum_{t_0<t_p<t_1}(G_p^3+H_p^3) \tag{6.8}$$

$$+\int_{\mathbb{R}}S_-^{h,\beta}(x,t_1)\,\Psi(x,t_1)\,dx-\int_{\mathbb{R}}S_-^{h,\beta}\,\Psi(x,t_0)\,dx\,,$$

où les termes G_p^j sont encore les termes d'erreur dûs au choix aléatoire du schéma de Glimm :

$$G_p^2=\int_{\mathbb{R}}((n_-^{h,\beta}u_-^{h,\beta})(x,t_p)-(n_p\,u_{p-1/2})(x))\,\Psi(x,t_p)\,dx\,, \tag{6.9}$$

$$G_p^3=\int_{\mathbb{R}}(S_-^{h,\beta}(x,t_p)-S_{p-1/2}(x))\,\Psi(x,t_p)\,dx\,, \tag{6.10}$$

tandis que les H_p^j décrivent les termes sources des équations d'Euler-Poisson

$$H_p^2=\int_{\mathbb{R}}n_{p-1}(x)\,(u_{p-1/2}-u_p)(x)\,\Psi(x,t_p)\,dx\,, \tag{6.11}$$

$$H_p^3=\int_{\mathbb{R}}(S_{p-1/2}(x)-S_p(x))\,\Psi(x,t_p)\,dx\,. \tag{6.12}$$

LEMME 6.1 : *Il existe une constante D_T indépendante de h et de β telle que*

$$|G_p^i|+|H_p^j|\leqslant D_T\|\Psi\|_\infty\,\tau_p,\quad j=2,3\quad i=1,2,3\,. \tag{6.13}$$

Démonstration : Le résultat est immédiat pour les termes H_p^j ($j=2,3$). En effet, compte tenu des estimations sur $|\Delta_h|$ et α_h définis par (5.7) et (5.6) respectivement et tels que $u_{p+1}=\alpha^h\,u_{p+1/2}+\Delta^h$, on a, par exemple pour H_p^2 :

$$\begin{aligned}|H_{p+1}^2| &\leqslant \int_{\mathbb{R}}\|n_p\|_\infty|u_{p+\frac{1}{2}}-u_{p+1}|\;\|\Psi\|_\infty\,dx\,,\\ &\leqslant \|\Psi\|_\infty\;\|n_p\|_\infty(TV(1-\alpha_h)\;\|u_{p+\frac{1}{2}}\|_\infty+TV(\Delta_h))\,, \qquad (6.14)\\ &\leqslant C_T\|\Psi\|_\infty\,\tau_{p+1}\,.\end{aligned}$$

Pour les termes du type G_p^j, on peut montrer également, par exemple pour G_p^1 :

$$|G_p^1| \leqslant \|\Psi\|_\infty \sum_{\iota \in Z} \int_0^h \left|n_-^{h,\beta}\left(x_\iota - \frac{h}{2} + y, t_p\right) - n_-^{h,\beta}\left(x_\iota - \frac{h}{2} + \beta_p y, t_p\right)\right| dy$$

$$\leqslant \|\Psi\|_\infty hTV(n_-^{h,\beta}) \leqslant C_T \|\Psi\|_\infty \tau_p \tag{6.15}$$

car $h = \tau_p v_p$ et la suite v_p est bornée (cf. Lemme 5.5)). □

On a alors le résultat suivant sur la régularité en temps.

PROPOSITION 6.2 : *Soit* $\Delta t > 0$. *Alors, pour tout* $h < \Delta t v_1$, $t \in (0, T - \Delta t)$ *et intervalle borné* I *de* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$\int_I |n^{h,\beta}(x, t + \Delta t) - n^{h,\beta}(x, t)| \, dx \leqslant c_{T,I} \, \Delta t , \tag{6.16}$$

$$\int_I |(n^{h,\beta} u^{h,\beta})(x, t + \Delta t) - (n^{h,\beta} u^{h,\beta})(x, t)| \, dx \leqslant c_{T,I} \, \Delta t . \tag{6.17}$$

De plus, pour tout $\Delta x \in \mathbb{R}$ *tel que* $[x, x + \Delta x] \subset [-L^h(t), L^h(t)]$, *on a*

$$|\phi^{h,\beta}(x + \Delta x, t + \Delta t) - \phi^{h,\beta}(x, t)| \, dx \leqslant C_T(\Delta t + |\Delta x|) . \tag{6.18}$$

Démonstration : Nous allons montrer le résultat pour $n^{h\beta}$, la démonstration est identique pour $(n^{h\beta} u^{h\beta})$. On choisit $t_1 = t_0 + \Delta t$ et $\Psi(x, t) = \psi(x)$ sur $[t_0, t_1]$. On obtient à partir de (6.5) :

$$\int_{\mathbb{R}} (n_{(x, t_0 + \Delta t)}^{h,\beta} - n_{(x, t_0)}^{h,\beta}) \, \psi(x) \, dx = - \sum_{t_0 < t_p < t_0 + \Delta t} G_p^1 - \int_{\mathbb{R}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n^{h,\beta} u^{h,\alpha} \psi_x \, dt \, dx , \tag{6.19}$$

Or, on a, d'après le lemme 6.1,

$$\sum_{t_0 < t_p < t_0 + \Delta t} |G_p^1| \leqslant \|\Psi\|_\infty C_T(\tau_1 + \Delta t) \tag{6.20}$$

et $\tau_1 \leqslant \Delta t$. D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} n^{h,\beta} u^{h,\beta} \psi_x \, dt \, dx \leqslant \sup_{t \in [t_0, t_1]} TV(n^{h,\beta} u^{h,\beta}(\,.\,, t)) \, \|\psi\|_\infty \Delta t . \tag{6.21}$$

On en déduit (6.16). On obtient (6.17) de la même manière. Le résultat sur la régularité du potentiel électrique vient de la proposition 3.2 pour la régularité en espace ($\phi^{h,\beta}$ appartient à $W^{2,\infty}(-L^h(t), L^h(t))$) et de l'estimation (6.16) sur la continuité en temps de $n^{h,\alpha}$. On a un résultat analogue pour la correction de charge γ :

$$|\gamma^{h,\beta}(t + \Delta t) - \gamma^{h,\beta}(t)| \leqslant C_T \, \Delta t . \tag{6.22}$$

□

On a donc le résultat de convergence suivant :

PROPOSITION 6.3 : *Pour tout $\beta \in (0,1)^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite notée (h_k) qui converge vers 0 telle que*

$$n^{h_k,\beta} \to n, \quad n^{h_k,\beta}\, u^{h_k,\beta} \to nu \quad dans \quad C^0([0,T]\,;L^1_{loc}(\mathbb{R}))\,, \tag{6.23}$$

$$L^{h_k} \to L \quad dans \quad C^0([0,T]),\, et \tag{6.24}$$

$$\phi^{h_k,\beta} \to \phi \quad dans \quad C^0(0,T\,;W^{1,\infty}(-L(t),L(t))) \tag{6.25}$$

où L est la fonction continue et croissante définie par (6.24) avec

$$n,\,(nu) \in Lip(0,T,L^1_{loc}(\mathbb{R})) \quad \text{et} \quad \phi \in Lip(0,T\,;W^{1,\infty}(-L(t),L(t)))\,. \tag{6.26}$$

Démonstration : Les suites $n^{h,\beta}(\,.\,,t)$ et $(n^{h,\beta}\,u^{h,\beta})\,(\,.\,,t)$ étant uniformément bornées dans $BV(\mathbb{R})$, elles sont compactes pour la topologie $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ par le théorème d'Ascoli et on peut donc en extraire une sous-suite notée (h_k) qui converge vers 0 et telle que (6.23) soit vérifiée.

Par construction, la fonction $L^{h_k}(t) = L_p + (t-t_p)\,h/\tau_p$ pour $t \in (t_p, t_{p+1})$ est croissante, continue et vérifie pour $t < T \leqslant t_{p_0}$:

$$TV(L^{h_k}) \leqslant p_0\,h_k = \sum_{p \leqslant p_0} \tau_p\,v_p \leqslant Tv_T\,.$$

La fonction L^{h_k} est donc uniformément bornée en norme BV. Le théorème de Helly assure la convergence en tout point t de cette suite de fonction vers une fonction L croissante (à une extraction près). Cette fonction est continue : $\forall t < T$ avec $t + \Delta t \leqslant T$, on a

$$(L^{h_k}(t+\Delta t) - L^{h_k}(t)) < (p_1 - p_0)\,h_k\,,$$

où p_1 et p_0 sont les indices tels que $t_{p_0} \leqslant t < t_{p_0+1}$ et $t_{p_1-1} < t + \Delta_t \leqslant t_{p_1}$. On a

$$t_{p_1} - t_{p_0} = \sum_{p_0+1}^{p_1} \tau_k \geqslant (p_1 - p_0)\,\tau_{p_1}\,.$$

Soit,

$$(p_1 - p_0) \leqslant \frac{t_{p_1} - t_{p_0}}{\tau_{p_1}} \leqslant (\Delta_t + 2\,\tau_1)\,v_T/h_k\,.$$

D'où

$$0 \leqslant (L^{h_k}(t+\Delta t) - L^{h_k}(t)) \leqslant (\Delta_t + 2\,h_k/v_1)\,v_T < 3\,v_T\,\Delta t\,, \tag{6.27}$$

pour tout $\Delta t > h_k/v_1$. On obtient la continuité de L pour tout $\Delta t > 0$ en passant à la limite lorsque k tend vers ∞. En fait, les fonctions L^{h_k} sont même uniformément équicontinues et on peut appliquer directement le théorème d'Ascoli. On a donc montré (6.24). On a aussi, de la même façon, la convergence de γ^{h_k} grâce à (6.22) :

$$\lim_{k\to\infty} \gamma^{h_k} = \gamma, \quad \text{dans} \quad C^0([0,T])\,. \tag{6.28}$$

La convergence de $\tilde{n}^{h_k} = n^{h_k}\,\gamma^{h_k}$ est alors claire.

Pour t fixé, la suite de fonctions ϕ^{h_k} définie par la Proposition 3.2 est bornée dans $W^{2,\infty}$; en effet, il suffit de vérifier dans (3.17) la borne inférieure uniforme $n_{\inf}$ de n qui provient de la borne L^{∞} de η (voir (5.37)), on obtient :

$$n(x,t) > n_{\inf} = \min\left(n_{\min}, \exp(-|\ln(n^-)| - J_T/c)\right)$$

avec J_T défini par (5.26). On peut donc extraire une sous-suite ϕ^{h_k} qui converge dans $W^{1,\infty}(-L(t), L(t))$. Le champ électrique associé converge donc dans $L^{\infty}(-L(t), L(t))$. Le résultat de régularité en temps donné par la proposition (6.2) permet de conclure (6.25). □

Remarque 6.4 : En fait, à t fixé, il y a également convergence d'une sous-suite ϕ^{h_k} dans l'espace $C^1([-L(t), L(t)])$ (dû à l'injection compacte de $W^{2,\infty}$ dans C^1) et donc du champ électrique dans C^0. Cependant, le potentiel électrique (prolongé par $\ln(n^{\pm})$ en dehors de l'intervalle) n'est pas globalement continu. Rappelons que l'équation de Poisson n'est vérifiée que dans le domaine hors équilibre.

Le résultat de régularité en temps vient de la propriété (6.16) et de l'équation (PNL) qui donne

$$-(\phi^k - \phi)'' + \exp(\phi^k) - \exp(\phi) = n^k - n$$

sur l'ensemble $\{(x,t)/t \in [0,T]\,;\, x \in [-L(t), L(t)]\}$ où L est défini par (6.24).

On a

$$\|\phi^k - \phi\|_{1,\infty} \leqslant \|\phi^k - \phi_1^k\|_{1,\infty} + \|\phi_1^k - \phi\|_{1,\infty}.$$

On pose $n^k = \tilde{n}^{h_k,\beta}$, $L^k = L^{h_k}$ définis par la proposition 6.3. La suite n^k converge vers n dans $C^0(0,T; L^p(\mathbb{R}))$ muni de la topologie forte pour tout $p \geqslant 1$, car les fonctions n^k et n vérifient

$$0 < n_{\inf} \leqslant n_k \leqslant n_T\,,$$

$$n_k(x) = n^{\pm} > 0, \quad \forall \pm x > L_T = L(T)\,.$$

La limite n appartient à $L^{\infty}((0,T)\times\mathbb{R})$.

Soit ϕ^k l'unique solution de (PNL) associée à n^k et $L^k(t)$. On sait qu'il existe une fonction régulière $\phi^* \geqslant 0$ (par la méthode des sur et sous solutions) telle que

$$|\phi^k(x)| \leqslant \phi^*(x), \quad \forall x \in [-L_T, L_T]\,.$$

Soit ϕ la solution de (PNL) associée à n et L (cf. Proposition 3.2), $\phi \in L^{\infty}(0,T; W^{2,\infty}(-L(t), L(t)))$.

On commence par se ramener à un intervalle fixe, on note

$$\phi_1^k(x) = \phi^k\left(\frac{xL^k(t)}{L(t)}\right) \quad \text{pour} \quad x \in [-L(t), L(t)]$$

Les suites (ϕ_1^k) et (ϕ^k) étant uniformément bornées dans $L^{\infty}(0,T; W^{2,\infty})$, on les prolonge par une fonction constante (égale à $\phi^k(\pm L^k(t)) = \phi_1^k(\pm L(t))$ en espace sur l'intervalle $[-L_T, L_T]$. La convergence de L^k vers L dans $C^0([0,T])$ implique, en utilisant (PNL)

$$\lim_{k\to\infty} (\phi_1^k - \phi^k) = 0 \quad \text{dans} \quad L^{\infty}(0,T; H^2(-L_T, L_T))\,.$$

En utilisant (PNL), on obtient que $(\phi_1^k - \phi)$ vérifie

$$- \partial_{xx}(\phi_1^k - \phi) + e^{\phi_1^k} - e^{\phi} = n^k - n \tag{6.29}$$

$$\partial_x(\phi_1^k - \phi)(t, \pm L(t)) = 0 .$$

En multipliant (6.29) par $(\phi_1^k - \phi)$ et en intégrant sur $[-L(t), L(t)]$, on obtient

$$\int_{-L(t)}^{L(t)} (\phi_1^{k'} - \phi')^2 (x)\, dx + \int_{-L(t)}^{L(t)} (e^{\phi_1^k} - e^{\phi})(\phi_1^k - \phi)(x)\, dx =$$

$$= \int_{-L(t)}^{L(t)} (n^k - n)(\phi_1^k - \phi)(x)\, dx \leqslant 2 \|\phi^*\|_{L^\infty(-L_T, L_T)} \|n^k - n\|_{L^1(-L_T, L_T)} \tag{6.30}$$

Or $\|n^k - n\|_{L^1(-L_T, L_T)}$ tend vers 0 par la méthode de Glimm, lorsque k tend vers l'infini pour presque tout $t \in [0, T]$. La fonction $\phi \mapsto e^{\phi}$ étant croissante, on en déduit

$$(\phi^k)' \to (\phi)' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T ; L^2(-L(t), L(t)))$$

$$\phi_1^k \to \phi \quad pp(x, t) \in \{[-L(t), L(t)], t \in [0, T]\} .$$

Puis par convergence dominée, on a convergence dans $L^\infty((0, T) ; L^2(-L(t), L(t)))$ et en utilisant à nouveau (6.29), on a la convergence de $(\phi_1^k)''$ vers $(\phi)''$ dans $L^\infty(0, T ; L^2(-L(t), L(t)))$. D'où la

Proposition (6.5) :

La suite (ϕ^k), solution du problème (PNL) associé aux données n^k et L^k, converge vers la solution de (PNL) pour les limites respectives n et L, définis par la proposition 6.3, pour la topologie de $L^\infty((0, T) ; H^2(-L(t), L(t)))$.

Remarque 6.6 : On peut également montrer à partir de (6.30) que le champ électrique vérifie

$$E^k = - \partial_x \phi^k \to E = - \partial_x \phi ,$$

dans $C^0([0, T] ; L^2(-L(t), L(t)))$.

On rappelle le lemme classique (voir preuve dans [18]) d'estimations des termes d'erreur liés au choix aléatoire de la méthode de Glimm :

LEMME 6.7 : *Soit* $g_\Psi^{h, \beta, J} = \sum_{0 < t_p < T} G_p^J$. *Alors, il existe* $C > 0$ *dépendant de* T *et* $\|\Psi\|_\infty$ *telle que*

$$\|g_\Psi^{h, \beta, J}\|_{L^2(d\beta)} \leqslant \sqrt{h}\, C(T, \Psi) . \tag{6.31}$$

Par un argument de séparabilité, on montre qu'il existe une sous-suite (h_k) convergant vers 0 telle que pour tout fonction test Ψ et presque tout β, on ait

$$\lim_{k \to \infty} g_\Psi^{h_k, \beta} = 0 . \tag{6.32}$$

On choisit des suites h_k et β vérifiant (6.30) et telles que la proposition 6.3 soit vérifiée. Alors, le théorème 2.1 s'obtient par :

PROPOSITION 6.8 : *Les limites* (n, nu, ϕ) *construites dans la Proposition 6.3 sont des solutions faibles entropiques du système E-PNL sur* $(0, T)$ *pour une condition limite fixée en* $L(t)$.

Démonstration : On pose $t_0 = 0$ dans (6.5)-(6.7)-(6.8). On prend Ψ une fonction test arbitraire à support compact dans $(-\infty, T) \times \mathbb{R}$. On peut alors passer à la limite dans (6.5), qui ne contient que le terme G_p^1, ce qui conduit à

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^T n \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (nu) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \int_{\mathbb{R}} n^0(x)\, \Psi(x, 0)\, dx . \tag{6.33}$$

Il reste à vérifier que $\gamma = 1$. Il suffit de constater que $n(x,t)$ et $\tilde{n}(x,t) = \gamma(t)\, n(x,t)$ vérifient tous les deux l'équation

$$\int_{-L}^{L} n(x,t)\, dx = \int_{-L}^{L} n^0(x)\, dx + (n^- u^- - n^+ u^+)\, t \tag{6.34}$$

en utilisant (6.33)-(3.14) pour n et (3.15) pour $\tilde{n}$ (voir Proposition 3.1). On en déduit que $n = \tilde{n}$ i.e. $\gamma(t) = 1$.

Pour passer à la limite dans (6.7) et (6.8), il reste à majorer les termes sources H_p^2 et H_p^3. Considérons par exemple, H_p^2, on pose

$$e_p^2 = H_p^2 - \int_{t_{p-1}}^{t_p} \int_{\mathbb{R}} (n^{h_k, \beta} E^{h_k, \beta} + \sigma^{h_k} n^{h_k, \beta}(u^{h_k, \beta} - u_*^{h_k}))\, \Psi(x,t)\, dx\, dt . \tag{6.35}$$

Or, on a, avec (3.21) et (6.11) :

$$H_p^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{t_{p-1}}^{t_p} (n_{p-1/2} E_p + \sigma^{h_k} n_{p-1/2}(u_{p-1/2} - u_*^{k_k}))\, \Psi(x,t)\, dx\, dt . \tag{6.36}$$

avec E_p défini par la proposition 3.2 avec $E_p(i) = E^{h_k, \beta}(x_i, t_p)$. On peut alors montrer (voir la démonstration de la proposition 6.2) :

$$\| n_{p-1/2} - n^{h_k, \beta}(\,.\,, t) \|_{L^1(I)} \leqslant C_T^1 \tau_p, \quad t \in (t_{p-1}, t_p),$$

$$\| n_{p-1/2}\, u_{p-1/2} - n^{h_k, \beta}(\,.\,, t)\, u^{h_k, \beta}(\,.\,, t) \|_{L^1(I)} \leqslant C_T^2 \tau_p, \quad t \in (t_{p-1}, t_p),$$

$$\| E_p(x) - E(\,.\,, t) \|_\infty \leqslant C_T^3 \tau_p, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (t_{p-1}, t_p).$$

D'où

$$e_p^2 \leqslant \left\{ \int_{t_{p-1}}^{t_p} (\, \|\sigma^{h_k}\|_\infty (C_T^2 + \|u_*^{h_k}\|_\infty C_T^1) + \|n^{h_k, \beta}\|_\infty C_T^3)\, dt \right\} \|\Psi\|_\infty \tau_p ,$$

$$e_p^2 \leqslant D_T^1 \tau_p^2, \quad \text{soit} \quad \sum_{0 \leqslant t_p \leqslant T} |e_p^2| \leqslant D_T^2 \tau_p \leqslant D_T^3 h .$$

De plus, la proposition 6.6 assure que la limite $\phi(\,.\,, t)$ (et le champ électrique associé E) est solution du problème de Poisson non linéaire pour une donnée $n(\,.\,, t)$ et des conditions aux limites en $x = \pm L(t)$. □

7. CONCLUSIONS

On a obtenu un théorème d'existence pour un modèle relativement simple (monodimensionnel, isotherme, électrons à l'équilibre) de plasma. Ce modèle peut néanmoins décrire certains phénomènes physiques (quitte à adapter les conditions aux limites dans l'équation de Poisson non linéaire et dans les équations d'Euler qui étaient supposées satisfaites sur toute la droite réelle dans le modèle présenté). Voici quelques extensions possibles du modèle étudié dans ce travail :

- **Modèles de sondes et de gaines [13].**

  Dans ce cas, le potentiel est imposé (condition de Dirichlet pour le problème $((PNL))$ à la paroi exprimant le 'potentiel flottant' mais il n'y a pas alors électro-neutralité à cet endroit. Il faut préciser des conditions sur l'autre bord du domaine pour les équation fluides (comme par exemple, un flux imposé, neutralité...). Ces deux problèmes nécessitent l'étude de couche limite qui peuvent être décrite par des modèles de type Euler-Poisson.

- **Modèles de plasma faiblement ionisés.**

  Dans ce cas, les collisions avec un gaz neutre connu jouent un rôle prédominant, cet effet est pris en compte dans le modèle étudié. La dynamique du gaz neutre majoritaire est en effet peu affecté par celle du plasma et peut être considéré comme une donnée pour le modèle de plasma. C'est le cas rencontré, par exemple, dans les problèmes de sillage. L'écoulement du plasma, bien que minoritaire est déterminant pour le calcul de la surface équivalente radar ou pour prévoir les perturbations de liaison radio à la rentrée dans l'atmosphère.

- **Modèles d'extraction d'ions [1], [2].**

  Les ions sont alors généralement supposées mono-cinétiques ou froids. On cherche souvent des solutions stationnaires. Il faudrait donc développer une étude du comportement des solutions d'Euler-Poisson en temps grand afin de justifier la recherche de ces solutions stationnaires.

- **Modèles d'ionisation, de décharges [16], termes de production.**

  Il est possible d'ajouter des termes de production ou de perte correspondant à des réactions chimiques, de recombinaison, d'ionisation... En effet, ces termes sont généralement des fonctions régulières des grandeurs macroscopiques qui décrivent le plasma. Ils peuvent être pris traité par la méthode de Glimm de la même façon que les termes de collisions avec les neutres considérés ici. Nous renvoyons à [12] pour une théorie générale des systèmes hyperboliques avec termes sources. Cependant, le terme source dû au champ électrique n'entre pas directement dans ce formalisme, car ce n'est pas une fonction locale des grandeurs macroscopiques.

- **Modèles multi-espèces.**

  Notons enfin une extension assez immédiate du résultat au modèle Euler multi-espèce-Poisson non linéaire i.e. les équations de conservations de la masse et de l'impulsion pour N espèces d'ions (de densité n_i et de vitesse u_i) associées à des températures T_i, des masses m_i et des nombres de charges Z_i arbitraires, couplées par l'équation (PNL) et éventuellement par des termes de collisions. En effet, on construit de façon analogue les schémas associés aux différentes espèces d'ions avec le même champ électrique et on choisit le pas de temps le plus petit i.e. la suite v_p maximale. On a vu (*cf.* remarque 5.6) que l'on pouvait remplacer v_p par une suite la majorant, il suffit de considérer $v_p = \max_{i=1..N} v^i_p$.

Certains de ces modèles peuvent être dérivés directement à partir du système (E-PNL) que nous avons étudié : hypothèse d'ions mono-cinétique (ou, de façon équivalente de température nulle), problèmes stationnaires... Pour des problèmes physiques plus réalistes (géométrie multi-dimensionnelle...), il peut être nécessaire de résoudre un problème d'évolution [2] car les techniques utilisées dans le cas 1D (intégrales premières...) ne sont pas facilement généralisables et il est donc satisfaisant de savoir que le problème est (au moins en 1D) bien posé.

Enfin, il peut être envisagé de chercher la limite quasi-neutre des solutions de ce problème. En effet, le choix de la longueur L d'adimensionnement introduit un petit paramètre λ dans l'équation de Poisson (*cf.* Section 2).

Cette limite a été étudiée par de nombreux auteurs pour des modèles fluides ou cinétiques pour les électrons avec des ions immobiles [11] ou pour l'équation de Poisson non linéaire seule [10], [8]. Nous disposons maintenant pour tout $\lambda > 0$ fixé d'une solution faible entropique au problème :

$$\frac{\partial n^\lambda}{\partial t} + \frac{\partial(n^\lambda u^\lambda)}{\partial x} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial(n^\lambda u^\lambda)}{\partial t} + \frac{\partial(n^\lambda (u^\lambda)^2 + n^\lambda T_i)}{\partial x} = -\sigma n^\lambda (u^\lambda - u_*) - n^\lambda \frac{\partial \phi^\lambda}{\partial x}, t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

$$-\lambda^2 \Delta \phi^\lambda = \frac{\partial E^\lambda}{\partial x} = n_i^\lambda - \exp(\phi^\lambda). \tag{7.3}$$

La limite quasi-neutre est la limite si elle existe de $(n^\lambda, u^\lambda, \phi^\lambda)$ lorsque $\lambda \to 0$. La limite formelle est la solution faible entropique (n, u, ϕ) du problème Euler isotherme quasi neutre suivant :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial(nu^2 + n(1 + T_i))}{\partial x} = -\sigma n(u - u_*), t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{7.5}$$

$$\phi = \ln(n), t > 0, x \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Il est clair que la convergence des fonctions continues ϕ^λ vers ϕ ne peut avoir lieu pour une topologie plus forte que $L^\infty \cap BV(\mathbb{R})$ puisque n appartient uniquement à l'espace $L^\infty \cap BV(\mathbb{R})$ et on sait qu'en temps fini, la solution des équations d'Euler (7.4)-(7.5) devient discontinue et donc ϕ devient également discontinue. On ne peut donc pas espérer une plus grande régularité pour des temps arbitrairement longs. Il est donc raisonnable de chercher alors des solutions pour des conditions initiales suffisamment régulières (dans H^s avec s assez grand). Ces solutions existent pour des temps petits et on s'intéresse à leur limite quand $\lambda \to 0$. Ce travail est en cours [6].

REMERCIEMENTS

Le premier auteur remercie Naoufel Ben Abdallah (CNRS, M.I.P. Univ. Toulouse 3) pour ses précieux conseils sur l'équation de Poisson non linéaire.

RÉFÉRENCES

[1] N. Ben Abdallah, S. Mas-Gallic, P.-A. Raviart, 1995, Analysis and asymptotics of a one dimensional ion extraction model, Asymp. Analysis, Vol. 10, p. 1-28.

[2] B. Bodin, 1995, Thèse de l'école Polytechnique, CMAP.

[3] F. Chen, 1974, « Introduction to Plasmas Physics », Plenum Press, New York, 1974.

[4] S. Cordier, 1995, Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system with arbitrary large data for a plasma, *Appl. Math. Lett.*, Vol. 8, n° 1, p. 19-24.

[5] S. Cordier, P. Degond, P. Markowich, C. Schmeiser, 1995, Travelling Wave analysis for Isothermal Euler-Poisson Model of a Plasma, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. V, N° 4, p. 599-645.

[6] S. Cordier, E. Grenier, 1996, Quasineutral limit of Euler-Poisson systems, prépublication du Laboratoire d'analyse numérique, université Paris 6, N° 96030.

[7] J. L. Delcroix, A. Beers, 1994, Physique des Plasmas, CNRS Editions.

[8] S. FABRE, 1995, Étude de l'équation de Poisson couplée à la relation de Boltzmann dans $\mathbb{R}^N$ et quasi neutralité. Note aux comptes rendus de l'académie des sciences, t. 320, Série I, p. 45-48.

[9] J. GLIMM, 1965, Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 : 698-715.

[10] F. GOLSE, R. SENTIS, 1993, Analyse asymptotique de l'équation de Poisson couplée à la relation de Boltzmann. Quasineutralité des plasmas, rapport CEA.

[11] E. GRENIER, 1994, Oscillations in quasineutral plasmas, Comm. PDE, Vol. 31, p. 361-394, 1996.

[12] P. LE FLOCH, 1990, The random choice method applied to the quasilinear hyperbolic systems, R.I. CMAP 218, École polytechnique.

[13] P. H. MAIRE, 1994, Ionisation dans un écoulement aérodynamique, Note C.E.A. 2774.

[14] P. MARCATI, R. NATALINI, 1995, Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors : the Cauchy problem, Proc. Roy. Soc. Edimburg, Sect A, 125, p. 115-131.

[15] P. A. MARKOWICH, C. A. RINGHOFFER, C. SCHMEISER, 1986, An asymptotic analysis of one dimensional semiconductor devices, IMA, *J. Applied Math.*, **37,** pp. 1-24.

[16] S. MAS-GALLIC, P.-A. RAVIART, 1994, Mathematical models of ion extraction and plasma sheaths, G.d.R. S.PAR.CH. 11, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

[17] T. NISHIDA, 1968, Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, *Japan Acad.,* 44 : 642-646, 1968.

[18] F. POUPAUD, M. RASCLE, J. P. VILA, 1994, Global solutions to the isothermal Euler-Poisson system with arbitrary large data, Jal of Diff. Eq. 1995, p. 93-121, Vol. 123.

[19] C. SCHMEISER, 1993, Personnal communication.

[20] SMOLLER, 1987, Shock waves and reaction diffusion equations, Grundlehren in Mathematisschen Wissenschaft, Springer Verlag, no 258.