

LOUIS RODER TCHEUGOUÉ TÉBOU
**Contrôle distribué de l'équation des ondes
dans des domaines minces**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
31, n° 7 (1997), p. 871-890

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_7_871_0

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



CONTRÔLE DISTRIBUÉ DE L'ÉQUATION DES ONDES DANS DES DOMAINES MINCES (*)

by Louis Roder TCHEUGOUÉ TÉBOU ⁽¹⁾

Résumé — Nous étudions par la méthode HUM de J L Lions, la contrôlabilité exacte interne d'un corps tridimensionnel de faible épaisseur. Ensuite nous faisons tendre le paramètre représentant l'épaisseur vers zéro et nous établissons que la limite du contrôle exact est le contrôle exact du système limite bidimensionnel. Nous démontrons aussi des résultats de convergence forte pour la suite des contrôles.

Abstract — We study by the method HUM of J L Lions, the exact internal controllability of the vibrations of a body of small thickness. Afterwards, we let the thickness parameter go to zero and we prove that the limit of the sequence of exact controls is the exact control of the 2-dimensional limit system. We also prove strong convergence results for the sequence of controls.

1. INTRODUCTION

Soit Ω un ouvert borné et suffisamment régulier de \mathbb{R}^2 . Le domaine mince d'épaisseur e est noté O^e et est donné par $O^e = \Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[$. Le domaine dilaté noté O est donné par $O = \Omega \times]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$ et T désigne un nombre réel quelconque strictement positif.

On se donne $\{y^0, y^1\}$ dans des espaces de Hilbert appropriés et l'on se propose de trouver un contrôle v distribué dans tout l'ouvert O^e tel que, si y est la solution du système

$$(1.1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = v & \text{dans } O^e \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{e}{2} \right\} \times]0, T[\\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[\times]0, T[\\ y(0) = y^0, \quad y'(0) = y^1 & \text{dans } O^e \end{cases}$$

on ait

$$(1.2) \quad y(T) = y'(T) = 0 \text{ dans } O^e.$$

(*) Received April 1996, accepted July 1996

(¹) Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

Maintenant, nous allons nous ramener à un domaine fixe en procédant comme dans [9]. Pour ce faire, on introduit la transformation suivante :

$$(x_1, x_2, x_3) \in O^e \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in O$$

où l'on a posé

$$z_\alpha = x_\alpha \quad \alpha \in \{1, 2\}, \quad z_3 = \frac{x_3}{e}.$$

De même, pour toute fonction f , on pose

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_e(z_1, z_2, z_3).$$

Avec tout cela, le problème à résoudre devient : pour $\{y_e^0, y_e^1\}$ convenablement choisis, trouver un contrôle v_e distribué dans tout l'ouvert O tel que si y_e vérifie

$$(1.3) \quad \begin{cases} y_e'' - \Delta_e y_e = v_e & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial y_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times]0, T[\\ y_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\times]0, T[\\ y_e(0) = y_e^0, \quad y_e'(0) = y_e^1 & \text{dans } O \end{cases}$$

avec

$$\Delta_e = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + e^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}$$

on ait

$$(1.4) \quad y_e(T) = y_e'(T) = 0 \text{ dans } O.$$

Avant de poursuivre, nous rappelons que la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines minces a été d'abord abordée par J. L. Lions dans [7, chap. 5] dans le cadre de la contrôlabilité exacte frontière, puis ont suivi les travaux de J. Yan (cf. [12]) et de J. Saint Jean Paulin-M. Vanninathan (cf. [9]), dans le même cadre.

Dans notre travail, il est plutôt question du cas des contrôles distribués dans tout l'ouvert O ; les résultats de contrôlabilité dans ce cas sont plus simples à établir que dans [7, 9, 12]. En effet, les résultats de contrôlabilité des Sections 2 et 3 se démontrent facilement en utilisant les idées de Haraux [4]. Dans la Section 4 nous considérons le cas où les données initiales y_e^0 et y_e^1 sont très régulières ; la technique introduite dans [4] n'est plus appropriée parce que

les données initiales du système adjoint homogène (cf. (2.2)) manquent de régularité. Nous avons alors utilisé une technique basée sur la dualité et le théorème de Hahn-Banach. Une fois que, pour ϵ fixé, le problème de contrôlabilité exacte est résolu dans les différents cas considérés aux Sections 2, 3 et 4, on fait tendre ϵ vers zéro et l'on montre que v_ϵ converge dans un sens convenable vers une limite v qui est le contrôle exact du système limite associé à (1.3). Pour finir, nous démontrons que sous des hypothèses appropriées sur les données initiales y_ϵ^0 et y_ϵ^1 , on peut approcher le problème de contrôlabilité 3-D par le problème de contrôlabilité 2-D. La suite de cette étude se présente comme suit :

- 2. Contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté et convergence de la suite des contrôles.
- 3. Cas des données initiales moins régulières.
- 4. Cas des données initiales plus régulières.

2. CONTRÔLABILITÉ EXACTE DANS L'OUVERT DILATÉ ET CONVERGENCE DE LA SUITE DES CONTRÔLES

Dans tout ce paragraphe ainsi que dans ceux qui suivront, on pose

$$V = \left\{ u \in H^1(O) ; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right\}$$

et on munit l'espace V de la norme suivante

$$(2.1) \quad \|u\|_\epsilon^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z_2} \right)^2 + e^{-2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_3} \right)^2 \right\} d\tilde{z} dz_3$$

puis on désigne par V_ϵ , l'espace de Hilbert ainsi obtenu et V'_ϵ désignera l'espace dual de V_ϵ .

Nous allons à présent mettre en œuvre la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M., présentée dans [6], pour résoudre le problème de contrôlabilité exacte. Introduisons φ_ϵ , solution du système

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varphi''_\epsilon - \Delta_\epsilon \varphi_\epsilon = 0 & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial \varphi_\epsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times]0, T[\\ \varphi_\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ \varphi_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^0, \quad \varphi'_\epsilon(0) = \varphi_\epsilon^1 & \text{dans } O. \end{cases}$$

Remarque 2.1 : On montre que lorsque $\varphi_\epsilon^0 \in L^2(O)$ et $\varphi_\epsilon^1 \in V'_\epsilon$, alors la solution φ_ϵ de (2.2), vérifie :

$$(2.3) \quad \varphi_\epsilon \in \mathcal{C}([0, T] ; L^2(O)) \cap \mathcal{C}^1([0, T] ; V'_\epsilon).$$

Le lemme suivant sera utile pour la suite :

LEMME 2.2 : *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , indépendantes de e , telles que*

$$(2.4) \quad c_1 \{ \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e^1\|_{V_e'}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_e\|_{L^2(O \times]0, T[)} \leq c_2 \{ \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e^1\|_{V_e'}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Ce lemme se démontre sans difficulté ; il suffit d'utiliser les techniques de [4].

Posons

$$(2.5) \quad F_e = L^2(O) \times V_e', \quad F_e' = V_e \times L^2(O)$$

et définissons

$$(2.6) \quad \|\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}\|_{F_e} = \left\{ \int_0^T \int_O (\varphi_e)^2 dz dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce au Lemme 2.2, on sait que $\|\cdot\|_{F_e}$ est une norme sur F_e uniformément équivalente à la norme de F_e .

Considérons le système rétrograde

$$(2.7) \quad \begin{cases} \psi_e'' - \Delta_e \psi_e = -\varphi_e & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial \psi_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times]0, T[\\ \psi_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ \psi_e(T) = 0, \quad \psi_e'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

D'après [6], on sait que le problème (2.7) possède une et une seule solution ψ_e vérifiant

$$(2.8) \quad \psi_e \in \mathcal{C}([0, T]; V_e) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(O)).$$

Définissons alors l'opérateur

$$(2.9) \quad A_e : F_e \rightarrow F_e'$$

par

$$(2.10) \quad A_e \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} = \{\psi_e'(0), -\psi_e(0)\}.$$

On vérifie sans peine la relation suivante :

$$(2.11) \quad {}_{F'_e} \langle A_e \{ \varphi_e^0, \varphi_e^1 \}, \{ \varphi_e^0, \varphi_e^1 \} \rangle_{F_e} = \| \{ \varphi_e^0, \varphi_e^1 \} \|_{F_e}^2$$

d'où l'on déduit

$$(2.12) \quad \| A_e \|_{\mathcal{L}(F_e, F'_e)} \geq 1 .$$

D'autre part, on montre facilement que A_e est continu et satisfait à la condition

$$(2.13) \quad \| A_e \|_{\mathcal{L}(F_e, F'_e)} \leq 1 .$$

Donc A_e est un isomorphisme de F_e sur F'_e . Par conséquent, prenant le couple des données initiales $\{ y_e^0, y_e^1 \}$ du système (1.3) dans F'_e , l'équation

$$(2.14) \quad A_e \{ \varphi_e^0, \varphi_e^1 \} = \{ y_e^1, -y_e^0 \}$$

admet une solution unique dans F_e . En vertu de la définition de A_e , on a

$$(2.15) \quad \psi'_e(0) = y_e^1, \quad \psi_e(0) = y_e^0.$$

Si l'on choisit le vecteur contrôle par

$$(2.16) \quad v_e = -\varphi_e$$

alors, on constate que ψ_e est solution de (1.3). Or avec (2.16), le système (1.3) possède une et une seule solution y_e ; donc $y_e = \psi_e$. Comme ψ_e vérifie

$$(2.17) \quad \psi_e(T) = 0, \quad \psi'_e(T) = 0 \quad \text{dans } O$$

on a donc (1.4). Ainsi est établi le résultat suivant :

THÉORÈME 2.3 : *Pour tout nombre réel strictement positif T , pour tout couple de données initiales $\{ y_e^0, y_e^1 \}$ du système (1.3), pris dans F'_e , le système (1.3) est exactement contrôlable et le contrôle exact v_e est donné par (2.16).*

En outre, v_e est le contrôle qui minimise la quantité $\int_0^T \int_O u^2 dz dt$ sur l'ensemble des contrôles admissibles.

Maintenant nous allons étudier le comportement limite du système (1.3). Pour ce faire, on suppose que les données initiales y_e^0 et y_e^1 vérifient

$$(2.18) \quad \begin{cases} \| y_e^0 \|_e \leq c & \text{et } y_e^0 \rightharpoonup \bar{y}^0 \text{ dans } H^1(O) \text{ faible} \\ y_e^1 \rightharpoonup \bar{y}^1 & \text{dans } L^2(O) \text{ faible} \end{cases}$$

où c est une constante positive indépendante de e . On a alors le

THÉORÈME 2.4 : Lorsque e tend vers zéro, le contrôle exact v_e du système (1.3) donné par H.U.M., est tel que

$$(2.19) \quad v_e \rightharpoonup \bar{v} \quad \text{dans } L^2(O \times]0, T[) \text{ faible}$$

où \bar{v} est indépendant de z_3 et \bar{v} est le contrôle exact du système

$$(2.20) \quad \begin{cases} \bar{y}'' - \Delta_2 \bar{y} = \bar{v} & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \bar{y}(0) = \bar{y}^0, \quad \bar{y}'(0) = \mathcal{M}(\bar{y}^1) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\mathcal{M}(\bar{y}^1)$ et Δ_2 définis par

$$(2.21) \quad \mathcal{M}(\bar{y}^1)(z_1, z_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \bar{y}^1(z_1, z_2, z_3) dz_3 \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}.$$

En outre, on a

$$(2.22) \quad \begin{cases} y_e \rightharpoonup \bar{y} & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible}^* \\ y_e' \rightharpoonup \bar{y}' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible}^*. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des deux lemmes suivants

LEMME 2.5 : Sous les hypothèses (2.18), soit φ_e la solution de (2.2) avec φ_e^0 et φ_e^1 données par (2.14). Alors, pour une sous-suite convenable extraite de $\{e\}$, que nous notons encore $\{e\}$ pour simplifier, on a

$$(2.23) \quad \begin{cases} \varphi_e^0 \rightharpoonup \varphi_*^0 & \text{dans } L^2(O) \text{ faible} \\ \mathcal{M}(\varphi_e^1) \rightharpoonup \varphi_*^1 & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible}^* \end{cases}$$

ainsi que

$$(2.24) \quad \varphi_e \rightharpoonup \varphi_* \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(O)) \text{ faible}$$

où φ_* est la solution du système

$$(2.25) \quad \begin{cases} \varphi_*'' - \Delta_2 \varphi_* = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi_*(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0), \quad \varphi_*'(0) = \varphi_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

LEMME 2.6 : On suppose que (2.18) a lieu. Soit ψ_e la solution de (2.7) avec φ_e définie par (2.2) et (2.14). Alors, pour une sous-suite convenable extraite de $\{e\}$, que nous notons encore $\{e\}$ pour simplifier, on a

$$(2.26) \quad \psi_e \rightharpoonup \psi_* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } *$$

ainsi que

$$(2.27) \quad \psi'_e \rightharpoonup \psi'_* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } *$$

où ψ_* est la solution du système

$$(2.28) \quad \begin{cases} \psi_*'' - \Delta_2 \psi_* = -\varphi_* & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi_*(T) = 0, \quad \psi'_*(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Esquisse de la Preuve du Lemme 2.5 : Grâce au Lemme 2.2 ainsi qu'à (2.14) et (2.18), on a les estimations suivantes

$$(2.29) \quad \begin{cases} \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)} \leq c & (2.29.1) \\ \|\varphi_e^1\|_{V'_e} \leq c & (2.29.2) \\ \|\varphi_e\|_{L^2(O) \times]0, T[} \leq c. & (2.29.3) \end{cases}$$

Il découle de (2.29.2) que

$$(2.30) \quad \|\mathcal{M}(\varphi_e^1)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c.$$

On déduit alors de (2.29.1), (2.29.3) et (2.30) qu'à une extraction de sous-suite près, on a (2.23) et (2.24). Maintenant, nous allons montrer que φ_* est solution de (2.25). Puisque, les données initiales de (2.2) sont peu régulières, on ne peut pas faire tendre e vers zéro directement dans le système (2.2) ; nous allons donc procéder comme dans [2]. Introduisons la fonction r_e définie par

$$(2.31) \quad r_e(z, t) = \int_0^t \varphi_e(z, s) ds + \tau_e(z)$$

où τ_e est la solution de

$$(2.32) \quad \begin{cases} -\Delta_e \tau_e = -\varphi_e^1 & \text{dans } O \\ \frac{\partial \tau_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \\ \tau_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que r_e est la solution du système

$$(2.33) \quad \begin{cases} r_e'' - \Delta_e r_e = 0 & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial r_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times]0, T[\\ r_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ r_e(0) = \tau_e, \quad r_e'(0) = \varphi_e^0 & \text{dans } O \end{cases}$$

et qu'on a l'égalité de l'énergie

$$(2.34) \quad \|\varphi_e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_e(t)\|_e^2 = \|\varphi_e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau_e\|_e^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'autre part, grâce à (2.29) et (2.30), on montre sans difficulté qu'à une sous-suite extraite de $\{e\}$ près, on a

$$(2.35) \quad \tau_e \rightharpoonup \tau_* \quad \text{dans } H^1(O) \text{ faible}$$

et

$$(2.36) \quad \begin{cases} r_e \rightharpoonup r & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ r_e' \rightharpoonup r' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } * \end{cases}$$

avec r indépendante de z_3 et vérifiant

$$(2.37) \quad \begin{cases} r'' - \Delta_2 r = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ r = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ r(0) = \tau_*, \quad r'(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De plus, la fonction τ_* est la solution du système

$$(2.38) \quad \begin{cases} -\Delta_2 \tau_* = -\varphi_*^1 & \text{dans } \Omega \\ \tau_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si on pose $h = r'$, on vérifie à l'aide de (2.37), (2.38) et de la relation suivante

$$(2.39) \quad r \in \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T];$$

$$L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

que h est la solution du système

$$(2.40) \quad \begin{cases} h'' - \Delta_2 h = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ h(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0), \quad h'(0) = \varphi_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Puisque $\varphi_e = r'_e$, la combinaison de (2.24) et (2.36) donne

$$(2.41) \quad \varphi_* = r' = h$$

d'où l'on déduit que φ_* est bien la solution de (2.25). \square

Esquisse de la preuve du Lemme 2.6 : Pour tout $t \in [0, T]$, on a l'inégalité de l'énergie

$$(2.42) \quad \|\psi'_e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_e(t)\|_e^2 \leq c(T) \{ \|\psi'_e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_e(0)\|_e^2 + \|\varphi_e\|_{L^2(O \times]0, T[)}^2 \}$$

d'où l'on déduit, en utilisant (2.15), (2.18) et (2.29.3), que

$$(2.43) \quad \begin{cases} \|\psi'_e\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \\ \|\psi_e\|_{L^\infty(0, T; H^1(O))} \leq c. \end{cases}$$

A une sous-suite extraite de $\{e\}$ près, on a donc les convergences

$$(2.44) \quad \begin{cases} \psi_e \rightharpoonup \psi_* & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ \psi'_e \rightharpoonup \psi'_* & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où ψ_* est une fonction indépendante de z_3 vérifiant (2.28). \square

Esquisse de la preuve du Théorème 2.4 : Grâce à (2.15), (2.18) ainsi qu'au Lemme 2.6, on a

$$(2.45) \quad \psi_*(0) = \tilde{y}^0, \quad \psi'_*(0) = \mathcal{M}(\tilde{y}^1) \quad \text{dans } \Omega.$$

Puisque $y_e = \psi_e$ et $v_e = -\varphi_e$ (voir (2.16)), on a alors (2.19) et (2.22) avec

$$(2.46) \quad \tilde{v} = -\varphi_*, \quad \tilde{y} = \psi_*$$

pour une sous-suite convenable extraite de $\{e\}$; ceci montre que \tilde{y} est la solution de (2.20). L'application de la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M., au système (2.20) permet de déterminer \tilde{v} de façon unique; donc toute la suite v_e converge vers \tilde{v} et par suite, toute la suite y_e converge vers \tilde{y} . \square

On a le résultat de convergence forte de la suite des contrôles.

THÉORÈME 2.7 : On suppose qu'en plus de (2.18), les données initiales du système (1.3) vérifient

$$(2.47) \quad \begin{cases} -\Delta_e y_e^0 = g_e \otimes 1 & \text{dans } O \\ \frac{\partial y_e^0}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \\ y_e^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ g_e \in H^{-1}(\Omega), g_e \rightarrow g & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort} \end{cases}$$

et

$$(2.48) \quad y_e^1 = z_e^1 \otimes 1; \quad z_e^1 \in L^2(\Omega); \quad z_e^1 \rightarrow y^1 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Alors la suite des contrôles $\{v_e\}$ satisfait

$$(2.49) \quad v_e \rightarrow \tilde{v} \quad \text{dans } L^2(O \times]0, T[) \text{ fort.}$$

Preuve : On rappelle que $v_e = -\varphi_e$. On vérifie alors sans peine que

$$(2.50) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_O (v_e)^2 dz dt = \int_O y_e^1 \varphi_e^0 dz - v_e \langle \varphi_e^1, y_e^0 \rangle_{v_e} \\ = \int_O y_e^1 \varphi_e^0 dz + v_e \langle g_e, \mathcal{M}(\tau_e) \rangle_{v_e}. \end{cases}$$

Passant à la limite dans (2.50) et utilisant (2.47), (2.48), (2.35) et (2.38), on obtient

$$(2.51) \quad \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^T \int_O (v_e)^2 dz dt = \int_O \tilde{y}^1 \varphi_*^0 dz - {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \varphi_*^1, \tilde{y}^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

L'application de la méthode H.U.M. au système (2.5) montre que

$$(2.52) \quad \int_0^T \int_O (\tilde{v})^2 d\tilde{z} dt = \int_O \tilde{y}^1 \varphi_*^0 d\tilde{z} - {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \varphi_*^1, \tilde{y}^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Combinant alors (2.4), (2.51) et (2.52), on obtient (2.10) et la preuve du Théorème 2.7 est terminée. \square

3. CAS DES DONNÉES INITIALES MOINS RÉGULIÈRES

Dans le problème que nous venons de résoudre, les données initiales y_e^0 et y_e^1 du système (1.3) étaient prises respectivement dans V_e et $L^2(O)$. Maintenant, nous allons les choisir dans $L^2(O)$ et V'_e respectivement ; dans ce cas, les données initiales φ_e^0 et φ_e^1 du système (2.2) vérifient

$$(3.1) \quad \varphi_e^0 \in V_e, \quad \varphi_e^1 \in L^2(O).$$

Dans cette section et la section suivante, c désigne différentes constantes positives indépendantes de e .

On a le

THÉORÈME 3.1 : *Pour tout $T > 0$, il existe un contrôle $v_e \in [H^1(0, T; L^2(O))]'$ tel que la solution y_e de (1.3) satisfasse la condition $y_e(T) = y'_e(T) = 0$ dans O . Plus précisément, on a $v_e = \varphi''_e$, où la fonction φ_e est la solution du système (2.2). En outre, v_e est le contrôle qui minimise la quantité $\|u\|_{[H^1(0, T, L^2(O))]'}$ sur l'ensemble des contrôles admissibles.*

Pour démontrer ce théorème, on commence par démontrer le

LEMME 3.2 : *Il existe deux constantes c_1 et c_2 , positives et indépendantes de e telles que*

$$(3.2) \quad c_1 \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi'_e\|_{L^2(O \times]0, T])}$$

$$\leq c_2 \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 \}^{\frac{1}{2}}$$

et on procède comme dans la preuve du Théorème 2.3.

Maintenant, nous allons faire tendre le paramètre e vers zéro ; on a le

THÉORÈME 3.3 : *On suppose que les données initiales y_e^0 et y_e^1 du système (1.3) vérifient*

$$(3.3) \quad \begin{cases} y_e^0 \rightharpoonup y_*^0 \text{ dans } L^2(O) \text{ faible} \\ \|\varphi_e^1\|_{V'_e} \leq c \text{ et } \mathcal{M}(y_e^1) \rightharpoonup y_*^1 \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible}^* . \end{cases}$$

Alors, lorsque e tend vers zéro, on a

$$(3.4) \quad v_e \rightharpoonup v^* \text{ dans } [H^1(0, T; L^2(O))]' \text{ faible}^*$$

où v^* est le contrôle exact du système

$$(3.5) \quad \begin{cases} y_*'' - \Delta_2 y_* = v^* & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ y_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ y_*(0) = y_*^0, \quad y_*'(0) = y_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

En outre, on a

$$(3.6) \quad y_e \rightharpoonup y_* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

La preuve de ce théorème découle aisément des lemmes suivants

LEMME 3.4 : Sous les hypothèses (3.3), les données initiales de (2.2), φ_e^0 et φ_e^1 vérifient à une sous-suite extraite près

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varphi_e^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } H^1(O) \text{ faible} \\ \varphi_e^1 \rightharpoonup \varphi^1 & \text{dans } L^2(O) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ^0 est une fonction indépendante de z_3 .

En outre, on a

$$(3.8) \quad \begin{cases} \varphi_e \rightharpoonup \varphi & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ \varphi_e \rightharpoonup \varphi' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où φ est la solution du système

$$(3.9) \quad \begin{cases} \varphi'' - \Delta_2 \varphi = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \varphi'(0) = \mathcal{M}(\varphi^1) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

LEMME 3.5 : Lorsque e tend vers zéro, la solution ψ_e de (2.7) vérifie

$$(3.10) \quad \psi_e \rightharpoonup \psi \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } *$$

avec ψ satisfaisant à

$$(3.11) \quad \begin{cases} \psi'' - \Delta_2 \psi = \varphi'' & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi(T) = 0, \quad \psi'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

Ces lemmes se démontrent de la même manière que les lemmes 2.5 et 2.6.

Dans la situation présente, on a le résultat de convergence forte de la suite des contrôles

THÉORÈME 3.6 : *On suppose qu'en plus de (3.3), les données initiales du système (1.3) vérifient*

$$(3.12) \quad y_e^0 = z_e^0 \otimes 1; \quad z_e^0 \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad z_e^0 \rightarrow y_*^0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ fort}$$

et

$$(3.13) \quad y_e^1 = z_e^1 \otimes 1; \quad z_e^1 \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad z_e^1 \rightarrow y_*^1 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega) \text{ fort}.$$

Alors, lorsque e tend vers zéro, on a

$$(3.14) \quad v_e \rightarrow v^* \quad \text{dans} \quad [H^1(0, T; L^2(O))]' \text{ fort}.$$

Preuve : Nous avons (3.4) et nous savons que

$$(3.15) \quad v_e = \varphi_e'' \in [H^1(0, T; L^2(O))]'.$$

Pour établir (3.14), il nous suffit de montrer que pour toute suite $\{f_e\}$ vérifiant

$$(3.16) \quad f_e \in H^1(0, T; L^2(O)) \quad \text{et} \quad f_e \rightharpoonup f \text{ dans } H^1(0, T; L^2(O)) \text{ faible}$$

on a

$$(3.17) \quad [H^1(0, T; L^2(O))] \langle v_e, f_e \rangle_{H^1(0, T; L^2(O))} \rightarrow [H^1(0, T; L^2(O))] \langle v^*, f \rangle_{H^1(0, T; L^2(O))}.$$

Si on démontre cette propriété, on en déduit facilement (3.14) par application du théorème de Hahn-Banach. On sait que

$$(3.18) \quad \begin{cases} [H^1(0, T; L^2(O))] \langle v_e, f_e \rangle_{H^1(0, T; L^2(O))} = - \int_0^T \int_O \varphi_e' f_e' dz dt \\ [H^1(0, T; L^2(O))] \langle v^*, f \rangle_{H^1(0, T; L^2(O))} = - \int_0^T \int_O \varphi' f' dz dt \end{cases}$$

de sorte que la propriété précédente sera démontrée si nous montrons que

$$(3.19) \quad \varphi_e' \rightarrow \varphi' \quad \text{dans} \quad L^2(0, T; L^2(O)) \text{ fort}.$$

Grâce au Lemme 3.4 et, à (3.12) et (3.13), on montre comme dans le cas du Théorème 2.7 que (3.19) a bien lieu ; ceci achève la preuve du Théorème 3.6. \square

4. CAS DES DONNÉES INITIALES PLUS RÉGULIÈRES

Dans cette section nous nous intéressons au cas où les données initiales de (1.3) sont plus régulières ; nous allons préciser cela par la suite. Pour le moment nous allons introduire quelques notations utiles pour la suite. Soit $\{\lambda_{k,e}, k \geq 1\}$ la suite des valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_e$. On sait que les éléments de cette suite sont tous strictement positifs et que cette suite est croissante et tend vers l'infini. Introduisons à présent la suite $\{Z_{k,e}, k \geq 1\}$ des sous-espaces vectoriels de V_e de dimension finie telle que si $u \in Z_{k,e}$ alors on a

$$(4.1) \quad \begin{cases} -\Delta_e u = \lambda_{k,e} u & \text{dans } O \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[. \end{cases}$$

On note Z_e l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{k \geq 1} Z_{k,e}$; tout élément u de Z_e s'écrit $u = \sum_1^\infty u_{k,e}$ avec $u_{k,e} \in Z_{k,e}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la norme

$$(4.2) \quad \|u\|_{\alpha,e}^2 = \sum_1^\infty \lambda_{k,e}^{2\alpha} |u_{k,e}|^2$$

où ici et dans la suite, $|f|$ désigne la norme usuelle de f dans $L^2(O)$.

On désigne par D_e^α le complété de Z_e pour la norme $\|\cdot\|_{\alpha,e}$; on a en particulier pour tout $u \in Z_e$

$$(4.3) \quad \|u\|_{\frac{1}{2},e} = \|u\|_{V_e}, \quad \|u\|_{0,e} = |u|, \quad \|u\|_{-\frac{1}{2},e} = \|u\|_{V_e'}.$$

Pour d'autres détails concernant les espaces D_e^α , nous renvoyons le lecteur à [5]. On choisit les données initiales de (1.3) comme suit

$$(4.4) \quad \{y_e^0, y_e^1\} \in D_e^1 \times V_e.$$

Dans ce cas, les données initiales de (2.2) vérifient

$$(4.5) \quad \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} \in V_e' \times D_e^{-1}$$

où nous avons posé $D_e^{-1} = [D_e^1]'$. La solution φ_e de (2.2) vérifie maintenant

$$(4.6) \quad \varphi_e \in \mathcal{C}([0, T]; V_e') \cap \mathcal{C}^1([0, T]; D_e^{-1}).$$

L'énergie du système (2.2) donnée pour tout $t \in [0, T]$ par

$$E_e(t) = \frac{1}{2} \{ \|\varphi_e(t)\|_{V'_e}^2 + \|\varphi'_e(t)\|_{D_e^{-1}}^2 \}$$

est indépendante du temps ; on a

$$(4.7) \quad E_e(t) = E_e(0) = \frac{1}{2} \{ \|\varphi_e^0\|_{V'_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \}.$$

Dans la suite, (\cdot, \cdot) désigne le produit de dualité entre V'_e et V_e , et $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le produit de dualité entre D_e^{-1} et D_e^1 . Pour démontrer le résultat de contrôlabilité exacte, nous avons besoin du lemme suivant

LEMME 4.1 : *Il existe deux constantes positives k_1 et k_2 , indépendantes de e et il existe $e_0 > 0$ tels que pour tout $e < e_0$, on ait*

$$(4.8) \quad \begin{cases} k_1 \{ \|\varphi_e^0\|_{V'_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_e\|_{L^2(0, T; V'_e)} \\ \|\varphi_e\|_{L^2(0, T; V'_e)} \leq k_2 \{ \|\varphi_e^0\|_{V'_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \}^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Preuve : La deuxième inégalité de (4.8) est facile à établir ; elle découle immédiatement du fait que l'énergie E_e est constante au cours du temps. Cette deuxième inégalité est valable pour tout $e > 0$. Maintenant, nous allons démontrer la première inégalité de (4.8) ; pour ce faire, introduisons ζ_e solution du système

$$(4.9) \quad \begin{cases} \zeta_e'' - \Delta \zeta_e = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \frac{\partial \zeta_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \times]0, T[\\ \zeta_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [\times]0, T[\\ \zeta_e(0) = \zeta_e^0 \in D_e^1, \quad \zeta'_e(0) = \zeta_e^1 \in V_e. \end{cases}$$

On sait (cf. [5]), que la solution ζ_e de (4.9) vérifie

$$(4.10) \quad \zeta_e \in \mathcal{C}([0, T]; D_e^1) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; V_e).$$

Soit $r \in \mathcal{C}^2([0, T])$ telle que $r(T) = r'(T) = r'(0) = 0, \quad r(0) = 1.$

Multiplions la première équation de (2.2) par $r\xi_e$ et intégrons par parties sur $O \times]0, T[$; il vient alors

$$(4.11) \quad \begin{cases} \{(-\varphi_e^0, \xi_e^1) + \langle \varphi_e^1, \xi_e^0 \rangle\} r(0) - 2 \int_0^T (\varphi_e(t), \xi_e'(t)) r'(t) dt - \\ - \int_0^T (\varphi_e(t), \xi_e(t)) r''(t) dt = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, on sait qu'il existe $\xi_e^0 \in D_e^1$ et $\xi_e^1 \in V_e$ tels que

$$(4.12) \quad \begin{cases} (-\varphi_e^0, \xi_e^1) = \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2; & \|\xi_e^1\|_{V_e} = \|\varphi_e^0\|_{V_e} \\ \langle \varphi_e^1, \xi_e^0 \rangle = \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2; & \|\xi_e^0\|_{D_e^1} = \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}. \end{cases}$$

Prenant dans (4.11), ξ_e^0 et ξ_e^1 données par (4.12), on obtient

$$(4.13) \quad \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 = 2 \int_0^T (\varphi_e(t), \xi_e'(t)) r'(t) dt \\ + \int_0^T (\varphi_e(t), \xi_e(t)) r''(t) dt$$

d'où l'on déduit

$$(4.14) \quad \begin{cases} \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \} \leq \\ \leq c(r) \times 2 \|\varphi_e\|_{L^2(0, T, V_e)} \left\{ \int_0^T \{ \|\xi_e'(t)\|_{V_e}^2 + \|\xi_e(t)\|_{V_e}^2 \} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

avec $c(r) = \text{Max} \{ 2 \|r'\|_{L^\infty(0, T)}, \|r''\|_{L^\infty(0, T)} \}$.

Or l'on a

$$(4.15) \quad \|u\|_{V_e}^2 \leq \frac{1}{\lambda_{1,e}} \|u\|_{D_e^1}^2 \quad \forall u \in D_e^1.$$

Reportant (4.15) dans (4.14), on trouve

$$(4.16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e'}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \} \\ & \leq c(r) \times 2 \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,e}}} \right\} \|\varphi_e\|_{L^2(0,T;V_e')} \\ & \times \left\{ \int_0^T \{ \|\xi_e'(t)\|_{V_e}^2 + \|\xi_e(t)\|_{D_e^1}^2 \} dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, pour le système (4.9), on a, compte tenu de (4.12), l'égalité

$$(4.17) \quad \|\xi_e'(t)\|_{V_e}^2 + \|\xi_e(t)\|_{D_e^1}^2 = \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e'}^2 + \|\varphi_e^1\|_{D_e^{-1}}^2 \}.$$

Combinant (4.16) et (4.17), et prenant $r(t) = \frac{t^2}{T^3} (-3T + 2t) + 1$, on trouve

$$(4.18) \quad \{ \|\varphi_e^0\|_{V_e'}^2 + \|\varphi_e^1\|_{[H^2(O) \cap V_e]}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq c(e) \|\varphi_e\|_{L^2(0,T;V_e')}$$

avec $c(e) = 2\sqrt{T}c(r) \text{Max} \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,e}}} \right\}$.

On montre par les techniques de [11] que lorsque e tend vers zéro, on a

$$(4.19) \quad \lambda_{1,e} \rightarrow \lambda_1$$

où λ_1 est la première valeur propre du problème de valeurs propres

$$(4.20) \quad -\Delta_2 u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega; \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

On déduit de (4.19) qu'il existe $e_0 > 0$ tel que pour tout $e < e_0$, on ait

$$(4.21) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda_{1,e}}} \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_1}}$$

de sorte que pour tout $e < e_0$, la constante $c(e)$ est majorée par une constante indépendante de e ; ceci achève la preuve de la première inégalité de (4.8) et en même temps celle du Lemme 4.1. \square

Dans tout ce qui suit, on suppose que l'élément générique e est plus petit que la constante e_0 du Lemme 4.1.

Avec le Lemme 4.1, on démontre le théorème de contrôlabilité exacte.

THÉORÈME 4.2 : *Pour tout temps T strictement positif et pour tout couple de données initiales $\{y_e^0, y_e^1\} \in D_e^1 \times V_e$ de (1.3), il existe un contrôle*

$$(4.23) \quad v_e \in L^2(0, T; V_e)$$

tel que la solution y_e de (1.3) vérifie $y_e(T) = y'_e(T) = 0$ dans O .

Plus précisément, la méthode H.U.M. donne pour presque tout $t \in]0, T[$

$$(4.24) \quad v_e(t) = G_e(\varphi_e(t))$$

où G_e est l'inverse de l'opérateur $-\Delta_e$. En outre, v_e est le contrôle qui minimise la quantité $\int_0^T \int_O \|u\|_{V_e}^2 dz dt$ sur l'ensemble des contrôles admissibles.

La démonstration de ce théorème se fait aisément par application de la méthode H.U.M. de J. L. Lions [6].

Dans la situation actuelle, on a le résultat de convergence faible.

THÉORÈME 4.3 : On suppose que les données initiales y_e^0 et y_e^1 vérifient

$$(4.25) \quad \begin{cases} \| \Delta_e y_e^0 \|_{L^2(O)} \leq c \text{ et } y_e^0 \rightharpoonup y_{**}^0 \text{ dans } H^1(O) \text{ faible} \\ y_e^1 \rightharpoonup y_{**}^1 \text{ dans } H^1(O) \text{ faible} \end{cases}$$

Alors, lorsque e tend vers zéro, le contrôle exact v_e du système (1.3) donné par H.U.M., est tel que

$$(4.26) \quad v_e \rightharpoonup v_{**} \text{ dans } L^2(0, T; H^1(O)) \text{ faible}$$

où v_{**} est indépendant de z_3 et v_{**} est le contrôle exact du système

$$(4.27) \quad \begin{cases} y_{**}'' - \Delta_2 y_{**} = v_{**} \text{ dans } \Omega \times]0, T[\\ y_{**} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ y_{**}(0) = y_{**}^0, \quad y_{**}'(0) = y_{**}^1 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

En outre, on a

$$(4.28) \quad \begin{cases} y_e \rightharpoonup y_{**} \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible} * \\ y_e' \rightharpoonup y_{**}' \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible} * \\ \Delta_e y_e \rightharpoonup \Delta_2 y_{**} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible} * . \end{cases}$$

Remarque 4.4 : Le Théorème 4.3 se démontre de la même manière que le Théorème 2.4 ; on démontre des lemmes de convergence pour les suites $\{\varphi_e\}$ et $\{\psi_e\}$ et l'on en déduit la preuve du Théorème 4.3.

Remarque 4.5 : On vérifie sans peine que les fonctions y_{**}^0 et y_{**}^1 sont indépendantes de z_3 et qu'en outre, $\Delta_2 y_{**}^0 \in L^2(\Omega)$.

On a le résultat de convergence forte de la suite des contrôles.

THÉORÈME 4.6 : *On suppose qu'en plus de (4.25), les données initiales du système (1.3) vérifient*

$$(4.29) \quad \begin{aligned} y_e^0 &= z_e^0 \otimes 1 ; \quad z_e^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) ; \\ z_e^0 &\rightarrow y_{**}^0 \quad \text{dans } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ fort} \end{aligned}$$

et

$$(4.30) \quad \begin{cases} -\Delta_e y_e^1 = g_e \otimes 1 & \text{dans } O \\ \frac{\partial y_e^1}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \\ y_e^1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\\ g_e \in H^{-1}(\Omega), \quad g_e \rightarrow g & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Alors la suite des contrôles $\{v_e\}$ satisfait

$$(4.31) \quad v_e \rightarrow v_{**} \quad \text{dans } L^2(0, T; H^1(O)) \text{ fort.}$$

Pour démontrer ce dernier théorème, on remarque que φ_e^0 est telle qu'il existe une unique fonction $\sigma_e \in V_e$ vérifiant

$$(4.32) \quad \begin{cases} -\Delta_e \sigma_e = -\varphi_e^0 & \text{dans } O \\ \frac{\partial \sigma_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\} \\ \sigma_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[. \end{cases}$$

La suite de la démonstration se fait comme dans la preuve du Théorème 2.7.

Remarque finale : Tout ce que nous venons de faire reste valable lorsque l'on remplace l'opérateur $-\Delta_e$ par l'opérateur autoadjoint \mathcal{A}_e défini par

$$\mathcal{A}_e \varphi = -a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} - 2e^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_3} - e^{-2} a_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3^2}$$

où les coefficients a_{ij} sont des fonctions mesurables et bornées dans O vérifiant les conditions habituelles d'ellipticité.

Tout ce que nous avons fait dans les quatre paragraphes pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ s'étend facilement au cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N \neq 2$).

Remerciement : L'auteur remercie les professeurs V. Komornik et J. Saint Jean Paulin pour de fructueuses discussions sur le sujet traité.

RÉFÉRENCES

- [1] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications* (Masson, Paris, 1983).
- [2] D. CIORANESCU, P. DONATO, 1989, Exact internal controllability in perforated domains. *J. Math. Pures et Appl.*, **68**, 185-213.
- [3] P. GRISVARD, 1989, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. *J. Maths pures et appliquées*, **68**, 215-259.
- [4] A. HARAUX, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminar 1987-1988, H. Brezis and J. L. Lions Eds., Res. Notes in Math., Pitman.
- [5] V. KOMORNIK, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method* (Masson & John Wiley, Paris, 1994).
- [6] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1. R.M.A. (Masson, Paris, 1988).
- [7] J. L. LIONS, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 2, R.M.A. (Masson, Paris, 1988).
- [8] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1 (Dunod, Paris, 1968).
- [9] J. SAINT JEAN PAULIN, M. VANNINATHAN, 1994, Exact controllability of vibrations of thin bodies. *Portugaliae Mathematica*, **51**, 421-453.
- [10] L. R. TCHEUGOUÉ TÉBOU, 1996, Contrôlabilité exacte interne des vibrations d'un corps mince, à paraître dans C.R.A.S., 321.
- [11] M. VANNINATHAN, Thesis, Paris, 1979.
- [12] J. YAN, 1992, Contrôlabilité exacte pour des domaines minces. *Asymptotic Analysis*, **5**, 461-471.