STÉPHANE BUSSE
PHILIPPE G. CIARLET
BERNADETTE MIARA

Justification d'un modèle linéaire bi-dimensionnel de coques « faiblement courbées » en coordonnées curvilignes

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 31, nº 3 (1997), p. 409-434
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1997__31_3_409_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE

(Vol 31, n° 3, 1997, p 409 à 434)

JUSTIFICATION D'UN MODÈLE LINÉAIRE BI-DIMENSIONNEL DE COQUES « FAIBLEMENT COURBÉES » EN COORDONNÉES CURVILIGNES (*)

Stéphane BUSSE (1), Philippe G. CIARLET (1), Bernadette MIARA (2)

Résumé — *On considère une famille de coques linéairement élastiques qui sont « faiblement courbées » dans un sens précisé dans l'article On montre que, si les forces appliquées sont d'un ordre de grandeur approprié, les composantes covariantes du champ des déplacements, une fois convenablement « mises à l'échelle », convergent dans H^1 lorsque l'épaisseur des coques tend vers zéro De plus, les limites sont entièrement déterminées par la solution d'un problème bi-dimensionnel qui constitue un modèle de coque « faiblement courbée » en coordonnées curvilignes Ce nouveau modèle complète celui qui avait été obtenu en coordonnées cartésiennes par les deux derniers auteurs*

Abstract — *We consider a family of linearly elastic shells that are « shallow » in a sense specified in the article We show that, if the applied forces are of a specific order of magnitude, the covariant components of the displacement field, once properly scaled, converge in H^1 when the thickness of the shells approaches zero Moreover, the limits are completely determined by the solution of a two-dimensional problem that constitutes a model of « shallow » shell in curvilinear coordinates This new model thus complements the model previously obtained in Cartesian coordinates by the last two authors*

1. INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est d'*identifier* et de *justifier* un modèle *bi-dimensionnel* de *coque « faiblement courbée »* (« shallow » shell en anglais) en coordonnées *curvilignes,* c'est-à-dire un modèle dont les inconnues sont les composantes covariantes du déplacement des points de la surface moyenne de la coque dans la base contravariante naturellement associée à celle-ci.

Cette justification, annoncée dans Busse, Ciarlet & Miara [1996], complète ainsi les travaux antérieurs de Destuynder [1980], Ciarlet & Paumier [1986] et Ciarlet & Miara [1992], où ont été justifiés les modèles non linéaire (par un développement asymptotique formel) et linéaire (par un théorème de convergence, comme dans le présent article) de coques « faiblement courbées » en

(*) Manuscrit reçu le 11 mars 1996
(1) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 4, Place Jussieu, 75005 Paris
(2) Département de Sciences Mathématiques et Physiques, École Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique, Cité Descartes, 2 Boulevard Blaise Pascal, 93160 Noisy-le-Grand

coordonnées *cartésiennes.* Le présent travail est lui-même complété dans Busse [1997], où un modèle *non linéaire* de coque « faiblement courbée » en coordonnées curvilignes est identifié et justifié par un développement asymptotique formel.

La méthode utilisée ici est celle de l'*analyse asymptotique,* telle qu'elle a été développée par Lions [1973] pour des problèmes variationnels « abstraits », puis appliquée dans de nombreux travaux pour justifier les modèles de *corps linéairement élastiques « minces ».* Pour les *plaques,* voir notamment Ciarlet & Destuynder [1979], Ciarlet & Kesavan [1981], Destuynder [1981], Raoult [1985, 1988], Ciarlet [1990, 1997], Le Dret [1991] ; des approches voisines ont été également employées avec succès par Caillerie [1980] et Kohn & Vogelius [1985]. Pour les *coques « générales »,* c'est-à-dire dont la surface moyenne est indépendante de l'épaisseur, voir les travaux « de pionnier » de Destuynder [1980, 1985] et Sanchez-Palencia [1990], ainsi que Caillerie & Sanchez-Palencia [1995], Miara & Sanchez-Palencia [1995], Ciarlet & Lods [1996a, 1996b], Ciarlet, Lods & Miara [1996], et Ciarlet [1998]. Pour les *poutres droites,* voir Bermudez & Viaño [1984], Geymonat, Krasucki & Marigo [1987], Le Dret [1995], Trabucho & Viaño [1996] ; signalons enfin Alvarez-Dios & Viaño [1995], qui viennent de justifier un modèle de *poutre « faiblement courbée »* en coordonnées cartésiennes. On se reportera à Ciarlet [1990, 1997, 1998] pour des bibliographies beaucoup plus complètes sur le sujet, en ce qui concerne notamment l'analyse asymptotique dans le cas non *linéaire.*

Décrivons brièvement le contenu de cet article. On considère une famille de *coques linéairement élastiques,* dont l'épaisseur $2\,\varepsilon > 0$ est destinée à tendre vers 0. Pour chaque $\varepsilon > 0$, la configuration de référence est de la forme $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\varepsilon})$, où $\Omega^{\varepsilon} = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, ω désignant un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^2$ de frontière γ lipschitzienne, et

$$\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3^{\varepsilon}) = (x_1, x_2, \theta^{\varepsilon}(x_1, x_2)) + x_3^{\varepsilon}\, \mathbf{a}^{\varepsilon}(x_1, x_2)\,,$$

pour $(x_1, x_2, x_3^{\varepsilon}) \in \bar{\Omega}^{\varepsilon}$, où $\theta^{\varepsilon} : \bar{\omega} \to \mathbf{R}$ désigne une fonction donnée, et $\mathbf{a}^{\varepsilon}$ désigne un vecteur normal unitaire variant continûment le long de la surface moyenne $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}(\bar{\omega})$ de la coque. On suppose la coque fixée sur une portion de sa surface latérale de la forme $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ où $\gamma_0 \subset \gamma$ est de longueur strictement positive.

En élasticité linéarisée, les composantes covariantes u_i^{ε} du déplacement $u_i^{\varepsilon}\,\mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ des points de la coque, les trois vecteurs $\mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ constituant la base contravariante d'un point courant de $\mathbf{\Phi}^{\varepsilon}(\bar{\Omega}^{\varepsilon})$, résolvent un *problème variationnel* de la forme (*cf.* (2.3), (2.4)) :

$$\mathbf{u}^{\varepsilon} = (u_i^{\varepsilon}) \in \mathbf{V}(\Omega^{\varepsilon}) = \{\mathbf{v}^{\varepsilon} = (v_i^{\varepsilon}) \in \mathbf{H}^1(\Omega^{\varepsilon})\,;\ \mathbf{v}^{\varepsilon} = \mathbf{O} \text{ sur } \gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\}\,,$$

$$\int_{\Omega^{\varepsilon}} A^{ijk\ell,\varepsilon}\, e_{k\|\ell}^{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\varepsilon})\, e_{i\|j}^{\varepsilon}(\mathbf{v}^{\varepsilon}) \sqrt{g^{\varepsilon}}\, dx^{\varepsilon} = \int_{\Omega^{\varepsilon}} f^{i,\varepsilon}\, v_i^{\varepsilon} \sqrt{g^{\varepsilon}}\, dx^{\varepsilon}$$

pour tout $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon)$, les fonctions $A^{ijk\ell,\varepsilon}$ désignant les composantes contravariantes du *tenseur de l'élasticité*, les fonctions $e^\varepsilon_{i\|j}(\mathbf{v}^\varepsilon)$ les composantes covariantes du *tenseur linéarisé des déformations*, et les fonctions $f^{i,\varepsilon} \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ les composantes contravariantes des *forces de volume* appliquées à la coque. Les *constantes de Lamé* $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ du matériau constituant la coque sont supposées ici *indépendantes de* ε ; elles apparaissent dans les fonctions $A^{ijk\ell,\varepsilon}$.

On pose $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, on définit l'*inconnue mise à l'échelle* $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ par

$$u^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon)(x) \quad \text{et} \quad u^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x)$$

pour tout $x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon$, où $\pi^\varepsilon(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$, et on fait l'*hypothèse* qu'il existe des fonctions $f^i \in L^2(\Omega)$ et $\theta \in \mathscr{C}^3(\bar{\omega})$ *indépendantes de* ε telles que

$$f^{\alpha,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 f^\alpha(x) \text{ et } f^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 f^3(x) \text{ pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon x \in \Omega^\varepsilon,$$

$$\theta^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon\theta(x_1, x_2) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in \bar{\omega} .$$

L'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon)$ est ainsi solution d'un problème variationnel posé sur l'ouvert Ω *indépendant de* ε (*cf.* (3.5), (3.6)).

Le résultat principal (Théorème 5.1) montre alors que *l'inconnue mise à l'échelle* $\mathbf{u}(\varepsilon)$ *converge dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$ *vers une limite* $\mathbf{u}$, *entièrement déterminée par la solution d'un problème bi-dimensionnel posé sur* ω. De façon plus précise, il existe un champ de vecteurs $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbf{V}(\omega)$, où

$$\mathbf{V}(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega) \,;\, \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\},$$

tel que

$$u_\alpha = \xi_\alpha - x_3\, \partial_\alpha \xi_3 \quad \text{et} \quad u_3 = \xi_3,$$

et $\boldsymbol{\xi}$ résout les équations variationnelles suivantes, qui constituent, aux « mises à l'échelle » près, les *équations bi-dimensionnelles d'une coque « faiblement courbée » en coordonnées curvilignes :*

$$-\int_\omega m^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \eta_3 \, d\omega - \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta} \eta_3\, \partial_{\alpha\beta} \theta \, d\omega + \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta}\, \partial_\beta \eta_\alpha \, d\omega$$

$$= \int_\omega \left\{ \int_{-1}^1 f^i \, dx_3 \right\} \eta_i \, d\omega - \int_\omega \left\{ \int_{-1}^1 x_3 f^\alpha \, dx_3 \right\} \partial_\alpha \eta_3 \, d\omega$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega)$, où

$$m^{\alpha\beta} = -\left\{\frac{4\,\lambda\mu}{3(\lambda+2\,\mu)}\,\Delta\xi_3\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{4\,\mu}{3}\,\partial_{\alpha\beta}\,\xi_3\right\},$$

$$\tilde{n}^{\alpha\beta} = \frac{4\,\lambda\mu}{(\lambda+2\,\mu)}\,\tilde{e}_{\sigma\sigma}(\xi)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\,\mu\tilde{e}_{\alpha\beta}(\xi)\,,$$

$$\tilde{e}_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1}{2}\,(\,\partial_\alpha\,\xi_\beta + \partial_\beta\,\xi_\alpha) - \xi_3\,\partial_{\alpha\beta}\,\theta\,.$$

La démonstration, qui est à rapprocher de celle suivie dans Ciarlet & Miara [1992], repose de façon essentielle sur l'obtention de *majorations a priori indépendantes de* $\varepsilon > 0$ *des normes* $\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$. Ces majorations *a priori* sont elles-mêmes déduites d'une *inégalité de Korn généralisée* (Lemme 4.2) qui, au lieu des fonctions « usuelles » $\frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$, fait intervenir des fonctions plus générales (notées ici $\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})$; *cf.* éqs. (4.4)), qui dépendent de la fonction θ apparaissant dans l'hypothèse asymptotique (3.4) faite sur les fonctions θ^ε. Comme on le verra au § 6, cette hypothèse sert à définir la notion de coque « faiblement courbée ».

2. LE PROBLÈME TRI-DIMENSIONNEL

Les indices et exposants grecs (sauf ε) prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, les indices et les exposants latins (sauf s'ils sont utilisés pour désigner les termes d'une suite) dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. La convention de la sommation par rapport aux indices et exposants répétés est utilisée. La norme euclidienne de $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ est notée $|\mathbf{u}|$ et le produit scalaire euclidien de $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ est noté $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$. Le symbole de Kronecker est noté δ_i^j, δ^{ij}, ou $\delta_{\alpha\beta}$ selon le cas.

Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^2$, de frontière γ lipschitzienne, ω étant localement d'un même côté de γ. On note (x_1, x_2), ou y selon le cas, un point courant de $\bar{\omega}$, on pose $d\omega = dx_1\,dx_2$, $\partial_\alpha = \partial/\partial x_\alpha$, $\partial_{\alpha\beta} = \partial^2/\partial x_\alpha\,\partial x_\beta$, on note ∂_ν la dérivée normale extérieure le long de γ, et on désigne par γ_0 une partie de γ de longueur > 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit les ensembles

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times\,]-\varepsilon, \varepsilon[\quad \text{et} \quad \Gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon]\,,$$

on note $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ un point courant de $\bar{\Omega}^\varepsilon$, et on pose $\partial_i^\varepsilon = \partial/\partial x_i^\varepsilon$; on a donc $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on se donne également une fonction $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$, à laquelle on associe l'application $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$(2.1) \qquad \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)) \text{ pour tout } (x_1, x_2) \in \bar{\omega}\,.$$

En tout point de la *surface*

$$S^\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon(\bar{\omega}),$$

on définit le vecteur normal

$$\mathbf{a}^\varepsilon = (|\partial_1 \theta^\varepsilon|^2 + |\partial_2 \theta^\varepsilon|^2 + 1)^{-1/2}(-\partial_1 \theta^\varepsilon, -\partial_2 \theta^\varepsilon, 1),$$

qui vérifie $|\mathbf{a}^\varepsilon| = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit l'application $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbf{R}^3$ par

$$\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(x^\varepsilon) = \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}^\varepsilon(x_1, x_2) \text{ pour tout } x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon. \tag{2.2}$$

Afin que le problème physique soit bien défini, on suppose qu'*il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que les trois vecteurs* $\partial_i^\varepsilon \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ *soient linéairement indépendants en tout point de* $\bar{\Omega}^\varepsilon$, *et tel que l'application* $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ *soit un* $\mathscr{C}^1$*-difféomorphisme pour* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$; cette propriété est effectivement satisfaite par les applications $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ de la forme particulière considérée ici (*cf.* (3.4)).

Pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on définit les vecteurs $\mathbf{g}_i^\varepsilon$ et $\mathbf{g}^{j,\varepsilon}$ par les relations

$$\mathbf{g}_i^\varepsilon = \partial_i^\varepsilon \boldsymbol{\Phi}^\varepsilon \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^{j,\varepsilon} \cdot \mathbf{g}_i^\varepsilon = \delta_i^j ;$$

ils forment respectivement la *base covariante* et *la base contravariante* en tout point de l'ensemble $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$. On définit également les fonctions

$$g_{ij}^\varepsilon = \mathbf{g}_i^\varepsilon \cdot \mathbf{g}_j^\varepsilon,\ g^{ij,\varepsilon} = \mathbf{g}^{i,\varepsilon} \cdot \mathbf{g}^{j,\varepsilon},\ g^\varepsilon = \det(g_{ij}^\varepsilon),\ \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} = \mathbf{g}^{p,\varepsilon} \cdot \partial_j^\varepsilon \mathbf{g}_i^\varepsilon ;$$

les fonctions g_{ij}^ε et $g^{ij,\varepsilon}$ sont respectivement les composantes *covariantes* et *contravariantes* du tenseur *métrique ;* la fonction g^ε sert à définir l'*élément de volume* $\sqrt{g^\varepsilon}\, dx^\varepsilon$; les fonctions $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}$ sont les *symboles de Christoffel.* On notera que, pour des applications $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ de la forme (2.2), ces derniers vérifient

$$\Gamma_{\alpha 3}^{3,\varepsilon} = \Gamma_{33}^{p,\varepsilon} = 0 .$$

Pour tout $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, on considère une *coque élastique,* de *surface moyenne* S^ε et d'*épaisseur* 2ε, formée d'un matériau *homogène* et *isotrope,* pour lequel la *configuration de référence* $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ est un *état naturel.* Le matériau élastique est donc caractérisé par ses deux *constantes de Lamé* $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (*cf.* Ciarlet [1988, Sect. 3.8]), que l'on suppose *indépendantes de* ε.

Les *inconnues* du problème sont les trois composantes *covariantes* $u_i^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbf{R}$ du *déplacement* $u_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ des points de la coque, le vecteur $u_i^\varepsilon(x^\varepsilon)\, \mathbf{g}^{i,\varepsilon}_{(x^\varepsilon)}$ représentant pour tout $x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ le déplacement du point $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(x^\varepsilon)$. On suppose que *le déplacement s'annule sur la partie* $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$ de la face latérale de la coque.

En *élasticité linéarisée,* l'inconnue $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ résout alors le *problème variationnel* suivant (qui n'est autre que le système usuel de l'élasticité linéarisée exprimé à l'aide des coordonnées curvilignes x_i^ε ; *cf.* e.g. Green & Zerna [1968], Ciarlet [1998]) :

(2.3) $$\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) = \{\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon)\,;\, \mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\},$$

(2.4) $$\int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijk\ell,\varepsilon} e^\varepsilon_{k\|\ell}(\mathbf{u}^\varepsilon)\, e^\varepsilon_{i\|j}(\mathbf{v}^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon}\, dx^\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon}\, dx^\varepsilon$$

pour tout $\mathbf{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon)$, où les fonctions

(2.5) $$A^{ijk\ell,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu(g^{ik,\varepsilon} g^{j\ell,\varepsilon} + g^{i\ell,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})$$

désignent les composantes *contravariantes* du *tenseur de l'élasticité tri-dimensionnelle,* les fonctions

(2.6) $$e^\varepsilon_{i\|j}(\mathbf{v}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\partial_i^\varepsilon v_j^\varepsilon + \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon) - \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} v_p^\varepsilon$$

désignent les composantes *covariantes* du *tenseur linéarisé des déformations* associé à un déplacement $v_i^\varepsilon \mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ des points de l'ensemble $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$, et les fonctions $f^{i,\varepsilon} \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ désignent les composantes *contravariantes* de la densité des *forces de volume appliquées ;* cela signifie que la force « élémentaire » $f^{i,\varepsilon} \mathbf{g}_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon}\, dx^\varepsilon$ est appliquée au volume « élémentaire » $\sqrt{g^\varepsilon}\, dx^\varepsilon$. On notera que, pour les applications $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon$ considérées ici,

(2.7) $$A^{\alpha\beta\sigma 3,\varepsilon} = A^{\alpha 333,\varepsilon} = 0\,.$$

Remarque : On pourrait sans difficulté prendre également en compte des *forces de surface* agissant sur les faces « supérieure » $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$ et « inférieure » $\boldsymbol{\Phi}^\varepsilon(\Gamma_-^\varepsilon)$ de la coque, où $\Gamma_+^\varepsilon = \omega \times \{+\varepsilon\}$ et $\Gamma_-^\varepsilon = \omega \times \{-\varepsilon\}$. ■

3. LE PROBLÈME TRI-DIMENSIONNEL SUR UN OUVERT FIXE ; LES HYPOTHÈSES SUR LES DONNÉES

On pose

$$\Omega = \omega \times \,]-1, 1[\,, \quad \Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1, 1]\,.$$

A un point courant $x = (x_i)$ de l'ensemble $\bar{\Omega}$, on associe, notamment dans les relations (3.1)-(3.3) et (3.7), (3.8), le point $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ de l'ensemble $\bar{\Omega}^\varepsilon$ défini par $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$. On pose $\partial_i = \partial/\partial x_i$ et $\partial_{ij} = \partial^2/\partial x_i \partial x_j$; on a donc $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$ et $\partial_3^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\partial_3$. A l'inconnue $\mathbf{u}^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ et au champ $\mathbf{v}^\varepsilon = (v_i^\varepsilon)$ apparaissant dans le problème variationnel (2.3), (2.4), on associe l'*inconnue mise à l'échelle* $\mathbf{u}(\varepsilon) = (u_i(\varepsilon))$ et le *champ mis à l'échelle* $\mathbf{v} = (v_i)$ définis par les relations

(3.1) $\quad u_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon)(x)$ et $u_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$,

(3.2) $\quad v_\alpha^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 v_\alpha(x)$ et $v_3^\varepsilon(x^\varepsilon) = \varepsilon v_3(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.

On *suppose* qu'il existe des fonctions $f^i \in L^2(\Omega)$ et $\theta \in \mathscr{C}^3(\bar{\omega})$ *indépendantes de* ε telles que

(3.3) $\quad f^{\alpha,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 f^\alpha(x)$ et $f^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 f^3(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$,

(3.4) $\quad \theta^\varepsilon(y) = \varepsilon\theta(y)$ pour tout $y \in \bar{\omega}$.

Les relations (3.3), (3.4) constituent les *hypothèses « asymptotiques » sur les données,* qui jouent un rôle fondamental dans l'analyse asymptotique qui va suivre.

Notons au passage que, pour les applications $\mathbf{\Phi}^\varepsilon$ de la forme (2.2) avec $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$ de la forme (2.1) et θ^ε de la forme (3.4), on peut effectivement établir (Ciarlet & Paumier [1986, Prop. 3.2]) qu'il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\theta) > 0$ tel que les trois vecteurs $\partial_i^\varepsilon \mathbf{\Phi}^\varepsilon$ soient linéairement indépendants en tout point de $\bar{\Omega}^\varepsilon$ et tel que $\mathbf{\Phi}^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbf{\Phi}^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

L'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon)$ résout donc le problème variationnel suivant, posé sur l'ouvert *fixe* Ω :

(3.5) $\quad \mathbf{u}(\varepsilon) \in \mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; \mathbf{v} = \mathbf{O} \text{ sur } \Gamma_0\}$,

(3.6) $$\int_\Omega A^{ijk\ell}(\varepsilon)\, e_{k\|\ell}(\varepsilon ; \mathbf{u}(\varepsilon))\, e_{i\|j}(\varepsilon ; \mathbf{v}) \sqrt{g(\varepsilon)}\, dx = \int_\Omega f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)}\, dx$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$, où les fonctions $A^{ijk\ell}(\varepsilon) : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$, $g(\varepsilon) : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ et $e_{i\|j}(\varepsilon ; \mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ sont définies par les relations

(3.7) $\quad A^{ijk\ell,\varepsilon}(x^\varepsilon) = A^{ijk\ell}(\varepsilon)(x)$, $\quad g^\varepsilon(x^\varepsilon) = g(\varepsilon)(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$,

(3.8) $\quad e_{i\|j}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon)(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 e_{i\|j}(\varepsilon ; \mathbf{v})(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Notre objectif est *l'étude du comportement de l'inconnue mise à l'échelle* $\mathbf{u}(\varepsilon)$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$. On notera à cet égard que le membre de gauche des équations (3.6) *n'est pas défini pour* $\varepsilon = 0$ (*cf.* (4.2), (4.3), *infra*). Il s'agit là d'un *problème de perturbations singulières,* au sens de Lions [1973].

Remarque : Si s est un nombre réel arbitraire, on peut remplacer les relations (3.3) par les relations plus générales

$$f^{\alpha,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^{s+2} f^\alpha(x) \text{ et } f^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon^{s+3} f^3(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega\,,$$

à condition de supposer *simultanément* que les constantes de Lamé du matériau élastique constituant la coque sont de la forme

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^s \lambda \quad \text{et} \quad \mu^\varepsilon = \varepsilon^s \mu\,,$$

où les fonctions $f^i \in L^2(\Omega)$ et les constantes $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ sont à nouveau *indépendantes* de ε. Les fonctions $A^{ijk\ell,\varepsilon}$ de (2.5) ayant alors pour expressions

$$A^{ijk\ell,\varepsilon} = \lambda^\varepsilon g^{ij,\varepsilon} g^{k\ell,\varepsilon} + \mu^\varepsilon(g^{ik,\varepsilon} g^{j\ell,\varepsilon} + g^{i\ell,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon})\,,$$

on vérifie aisément que le problème variationnel résolu par l'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon)$ définie en (3.1) est en effet encore donné par (3.5), (3.6).

Par contre, l'hypothèse (3.4) *ne peut pas être modifiée,* car elle est précisément liée à la définition d'une coque « faiblement courbée » (*cf.* § 6).

4. PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES ; UNE INÉGALITÉ DE KORN TRI-DIMENSIONNELLE GÉNÉRALISÉE

On note $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ les normes des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, et on garde les mêmes notations pour les espaces de fonctions à valeurs vectorielles ou tensorielles. Les deux lemmes qui suivent rassemblent diverses propriétés « techniques » utilisées dans la démonstration du théorème de convergence (Théorème 5.1). Le premier précise le comportement des diverses fonctions introduites en (3.7), (3.8) lorsque $\varepsilon \to 0$. *L'hypothèse* (3.4) *y joue un rôle essentiel ;* on notera à cet égard que les constantes C_i, $1 \leq i \leq 4$, *dépendent* de la fonction θ.

LEMME 4.1 : *Les fonctions* $e_{i\,\|\,j}(\varepsilon\,;\mathbf{v})$ *définies en* (3.8) *sont de la forme*

$$e_{\alpha\,\|\,\beta}(\varepsilon\,;\mathbf{v}) = \tilde{e}_{\alpha\beta}(v) + \varepsilon^2 \tilde{e}^{\#}_{\alpha\beta}(\varepsilon\,;v)\,, \tag{4.1}$$

$$e_{\alpha\,\|\,3}(\varepsilon\,;\mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon}\{\tilde{e}_{\alpha 3}(v) + \varepsilon^2 \tilde{e}^{\#}_{\alpha 3}(\varepsilon\,;v)\}\,, \tag{4.2}$$

$$e_{3\,\|\,3}(\varepsilon\,;\mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{e}_{33}(\mathbf{v})\,, \tag{4.3}$$

où

$$\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - v_3\,\partial_{\alpha\beta}\theta\,, \tag{4.4}$$

$$\tilde{e}_{\alpha 3}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_3 + \partial_3 v_\alpha)\,, \quad \tilde{e}_{33}(\mathbf{v}) = \partial_3 v_3\,,$$

et il existe une constante C_1 *telle que*

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\max_{\alpha,j}\|\tilde{e}^{\#}_{\alpha j}(\varepsilon\,;\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leqslant C_1\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\ \text{pour tout}\ \mathbf{v}\in\mathbf{V}(\Omega)\,. \tag{4.5}$$

La fonction $g(\varepsilon)$ *définie en* (3.7) *est de la forme*

$$g(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^2 g^{\#}(\varepsilon)\,, \tag{4.6}$$

et il existe une constante C_2 *telle que*

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\max_{x\in\bar{\Omega}}|g^{\#}(\varepsilon)(x)| \leqslant C_2. \tag{4.7}$$

Les fonctions $A^{ijk\ell}(\varepsilon)$ *définies en* (3.7) *sont de la forme*

$$A^{ijk\ell}(\varepsilon) = A^{ijk\ell}(0) + \varepsilon^2 A^{ijk\ell}_{\#}(\varepsilon)\,, \tag{4.8}$$

où

$$A^{ijk\ell}(0) = \lambda\delta^{ij}\delta^{k\ell} + \mu(\delta^{ik}\delta^{j\ell} + \delta^{i\ell}\delta^{jk})\,, \tag{4.9}$$

et il existe une constante C_3 *telle que*

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\max_{x\in\bar{\Omega}}|A^{ijk\ell}_{\#}(\varepsilon)(x)| \leqslant C_3\,. \tag{4.10}$$

Enfin, il existe une constante C_4 *telle que*

$$C_4 > 0 \quad \textit{et} \quad A^{ijk\ell}(\varepsilon)(x)\,t_{k\ell}\,t_{ij} \geqslant C_4\,t_{ij}\,t_{ij} \tag{4.11}$$

pour tout $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, *pour tout* $x\in\bar{\Omega}$, *et pour toute matrice symétrique* (t_{ij}).

Démonstration : Dans cette démonstration, l'expression $O(\varepsilon^m)$ désigne toute fonction $h : \bar{\Omega}\times\,]0,\varepsilon_0] \to \mathbb{R}$ ayant la propriété suivante : il existe une constante C telle que

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\max_{x\in\bar{\Omega}}|h(x,\varepsilon)| \leqslant C\varepsilon^m\,.$$

Au champ de vecteurs $\mathbf{g}_i^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbf{R}^3$ et aux fonctions g_{ij}^ε, $g^{ij,\varepsilon}$, $\Gamma_{ij}^{p,\varepsilon} : \bar{\Omega}^\varepsilon \to \mathbf{R}$, on associe le champ de vecteurs $\mathbf{g}_i(\varepsilon) : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}^3$ et les fonctions $g_{ij}(\varepsilon)$, $g^{ij}(\varepsilon)$,$\Gamma_{ij}^p(\varepsilon) : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}$ par les relations

$$\mathbf{g}_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \mathbf{g}_i(\varepsilon)(x) , \quad g_{ij}^\varepsilon(x^\varepsilon) = g_{ij}(\varepsilon)(x) ,$$

$$g^{ij,\varepsilon}(x^\varepsilon) = g^{ij}(\varepsilon)(x) , \quad \Gamma_{ij}^{p,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \Gamma_{ij}^p(\varepsilon)(x) ,$$

les points $x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ et $x \in \bar{\Omega}$ se correspondant comme en (3.7).

Des calculs simples utilisant l'hypothèse (3.4) montrent alors que

$$\mathbf{g}_\alpha(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \delta_{\alpha 1} - \varepsilon^2 x_3 \, \partial_{\alpha 1} \theta & + & O(\varepsilon^4) \\ \delta_{\alpha 2} - \varepsilon^2 x_3 \, \partial_{\alpha 2} \theta & + & O(\varepsilon^4) \\ \varepsilon \partial_\alpha \theta & + & O(\varepsilon^3) \end{pmatrix},$$

$$g_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 (\partial_\alpha \theta \, \partial_\beta \theta - 2 x_3 \, \partial_{\alpha\beta} \theta) + O(\varepsilon^4) ,$$

$$g_{i3}(\varepsilon) = \delta_{i3} ,$$

$$g^{ij}(\varepsilon) = \delta^{ij} + O(\varepsilon^2) ,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) = \varepsilon \, \partial_{\alpha\beta} \theta + O(\varepsilon^3), \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) = - \varepsilon \, \partial_{\alpha\sigma} \theta + O(\varepsilon^3) .$$

Des diverses relations ci-dessus, il est alors aisé de déduire les résultats annoncés ; l'hypothèse « $\theta \in \mathscr{C}^3(\bar{\omega})$ » est utilisée pour établir les relations $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. ■

Dans le deuxième lemme, on établit une *inégalité de Korn « généralisée » ; cf.* (4.13). En effet, au lieu des fonctions « usuelles »

$$e_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) , \tag{4.12}$$

elle fait intervenir les fonctions $\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})$ définies en (4.4), qui se réduisent aux fonctions $e_{ij}(\mathbf{v})$ lorsque $\theta = 0$. On notera à cet égard que, quelle que soit la fonction θ,

$$e_{i3}(\mathbf{v}) = \tilde{e}_{i3}(\mathbf{v}) .$$

Cette inégalité de Korn généralisée est *cruciale :* elle permet en effet d'obtenir les majorations *a priori* fondamentales satisfaites par la famille $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon > 0}$ (voir l'Étape (i) de la démonstration du Théorème 5.1).

LEMME 4.2 : *Étant donné une fonction* $\theta \in \mathscr{C}^2(\bar{\omega})$, *on définit les fonctions* $\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})$ *comme en* (4.4). *Alors il existe une constante* C_5 *telle que*

$$\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leqslant C_5 \left\{ \sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2} \tag{4.13}$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$, *où* $\mathbf{V}(\Omega)$ *est l'espace défini en* (3.5).

Démonstration : C'est une extension de celle de l'inégalité de Korn « usuelle » donnée par Duvaut & Lions [1972]. Elle comporte quatre étapes.

(i) *L'espace*

$$\tilde{\mathbf{E}}(\Omega) = \{\mathbf{v} = (v_i) \in L^2(\Omega) \, ; \tilde{e}_{ij}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)\}$$

coïncide avec l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Dans la définition de l'espace $\tilde{\mathbf{E}}(\Omega)$, les relations « $\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ » sont naturellement à comprendre au sens des distributions ; par exemple, « $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)$ » signifie qu'il existe une fonction de $L^2(\Omega)$, notée $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$, telle que

$$\int_\Omega \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) \, \varphi \, dx = - \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2} (v_\alpha \, \partial_\beta \varphi + v_\beta \, \partial_\alpha \varphi) + v_3 \, \varphi \, \partial_{\alpha\beta} \theta \right\} dx$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Soit $\mathbf{v} = (v_i)$ un élément de l'espace $\tilde{\mathbf{E}}(\Omega)$; alors

$$e_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = (\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) + v_3 \, \partial_{\alpha\beta} \theta) \in L^2(\Omega) \,, \quad e_{i3}(\mathbf{v}) = \tilde{e}_{i3}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \,,$$

les fonctions $e_{ij}(\mathbf{v})$ étant définies en (4.12). L'identité classique

$$\partial_{jk} v_i = \partial_j e_{ik}(\mathbf{v}) + \partial_k e_{ij}(\mathbf{v}) - \partial_i e_{jk}(\mathbf{v}) \,,$$

montre alors que $\partial_{jk} v_i \in H^{-1}(\Omega)$. Comme $\partial_j v_i \in H^{-1}(\Omega)$, un *lemme de J. L. Lions* (mentionné la première fois dans la Note (27), p. 320 de Magenes & Stampacchia [1958] et démontré dans Duvaut & Lions [1972, p. 111 et suivantes] pour des ouverts à frontière régulière, étendu enfin à des ouverts à frontière « seulement » lipschitzienne dans Borchers & Sohr [1990] et Amrouche & Girault [1994]) montre que $\partial_j v_i \in L^2(\Omega)$. Par suite $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, et l'inclusion $\tilde{\mathbf{E}}(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ est établie. L'inclusion opposée est évidente.

(ii) *L'application* $\|\cdot\|$ *définie par*

$$\|\mathbf{v}\| = \left\{ \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$$

est une norme sur l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$, *équivalente à la norme* $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

L'injection canonique de l'espace $\mathbf{H}^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ dans l'espace $\tilde{\mathbf{E}}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est continue, et surjective d'après (i). L'espace $\tilde{\mathbf{E}}(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|$ étant un espace de Hilbert, le théorème de l'application ouverte montre que les deux normes sont équivalentes.

(iii) *La semi-norme* $|\cdot|$ *définie par*

$$|\mathbf{v}| = \left\{ \sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 \right\}^{1/2}$$

est une norme sur l'espace $\mathbf{V}(\Omega)$ *défini en* (3.5).

Soit $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\Omega)$ tel que $\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v}) = 0$. Comme $e_{i3}(\mathbf{v}) = \tilde{e}_{i3}(\mathbf{v}) = 0$, il existe des fonctions $\eta_\alpha \in H^1(\omega)$ vérifiant $\eta_\alpha = 0$ sur γ_0 et une fonction $\eta_3 \in H^2(\omega)$ vérifiant $\eta_3 = \partial_\nu \eta_3 = 0$ sur γ_0 telles que (*cf.* Ciarlet & Destuynder [1979] ou Ciarlet [1990, Th. 1.4.1])

$$v_\alpha = \eta_\alpha - x_3 \, \partial_\alpha \eta_3, \quad v_3 = \eta_3.$$

Les relations $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v}) = 0$ entraînent alors que

$$\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha - 2\,\eta_3\,\partial_{\alpha\beta}\theta = 2\,x_3\,\partial_{\alpha\beta}\eta_3.$$

Par suite, $\partial_{\alpha\beta}\eta_3 = 0$ dans ω car le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est indépendant de x_3. L'ouvert ω étant connexe, la fonction η_3 est donc affine par rapport à x_1, x_2 ; comme de plus $\eta_3 = \partial_\nu \eta_3 = 0$ sur γ_0, la fonction η_3 s'annule dans ω (la longueur de γ_0 est > 0 par hypothèse). Les fonctions η_α, qui vérifient alors $\partial_\alpha \eta_\beta + \partial_\beta \eta_\alpha = 0$ dans ω et $\eta_\alpha = 0$ sur γ_0, s'annulent donc elles aussi.

(iv) *Il existe une constante* C_5 *telle que l'inégalité* (4.13) *ait lieu pour tout* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$.

Sinon, il existerait des fonctions $\mathbf{v}^k \in \mathbf{V}(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, telles que

$$\|\mathbf{v}^k\|_{1,\Omega} = 1 \text{ pour tout } k \geqslant 1,$$

$$|\mathbf{v}^k| \to 0 \text{ lorsque } k \to \infty.$$

La suite $(\mathbf{v}^k)_{k=1}^\infty$ étant bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, il existe une suite extraite $(\mathbf{v}^\ell)_{\ell=1}^\infty$ qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Comme $|\mathbf{v}^\ell| \to 0$, cette suite extraite est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$, donc aussi pour la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ d'après (ii).

Il existe donc $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ tel que la suite $(\mathbf{v}^{\ell})_{\ell=1}^{\infty}$ converge vers $\mathbf{v}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Or d'une part $\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} = \lim_{\ell \to \infty} \|\mathbf{v}^{\ell}\|_{1,\Omega} = 1$; d'autre part, $|\mathbf{v}| = \lim_{\ell \to \infty} |\mathbf{v}^{\ell}| = 0$, et donc $\mathbf{v} = \mathbf{O}$ d'après (iii), ce qui est impossible. ∎

5. CONVERGENCE LORSQUE $\varepsilon \to 0$

Dans le résultat qui suit, on établit que, lorsque $\varepsilon \to 0$, l'inconnue mise à l'échelle $\mathbf{u}(\varepsilon)$ définie en (3.1) converge dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ vers une limite qui peut être construite (*cf.* (5.3)) à partir de la solution d'un problème posé sur l'ouvert ω (*cf.* (5.4)), donc « bi-dimensionnel ».

THÉORÈME 5.1 : (a) *Il existe* $\mathbf{u} = (u_i) \in \mathbf{V}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\ ;\ \mathbf{v} = \mathbf{O}\ sur\ \Gamma_0\}$ *tel que*

(5.1) $$\mathbf{u}(\varepsilon) \to \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega)\,.$$

(b) *On définit l'espace*

(5.2) $$\mathbf{V}(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)\ ;\ \eta_i = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0\}\,.$$

Alors il existe $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbf{V}(\omega)$ *tel que*

(5.3) $$u_\alpha = \xi_\alpha - x_3\, \partial_\alpha \xi_3 \quad \text{et} \quad u_3 = \xi_3\,.$$

(c) *L'élément* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i) \in \mathbf{V}(\omega)$ *résout les équations variationnelles*

(5.4) $$-\int_\omega m^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \eta_3\, d\omega - \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta}\, \eta_3\, \partial_{\alpha\beta} \theta\, d\omega + \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta}\, \partial_\beta \eta_\alpha\, d\omega = \int_\omega p^i\, \eta_i\, d\omega - \int_\omega q^\alpha\, \partial_\alpha \eta_3\, d\omega$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega)$, *où l'on a posé*

(5.5) $$m^{\alpha\beta} = -\left\{\frac{4\,\lambda\mu}{3(\lambda + 2\,\mu)}\, \Delta\xi_3\, \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\,\mu}{3}\, \partial_{\alpha\beta} \xi_3\right\},$$

(5.6) $$\tilde{n}^{\alpha\beta} = \frac{4\,\lambda\mu}{\lambda + 2\,\mu}\, \tilde{e}_{\sigma\sigma}(\boldsymbol{\xi})\, \delta_{\alpha\beta} + 4\,\mu \tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})\,,$$

(5.7) $$\tilde{e}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2}\,(\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha) - \xi_3\, \partial_{\alpha\beta} \theta\,,$$

(5.8) $$p^i = \int_{-1}^{1} f^i\, dx_3,$$

(5.9) $$q^\alpha = \int_{-1}^{1} x_3 f^\alpha\, dx_3.$$

(d) *Les équations variationnelles* (5.4) *ont une solution* $\xi \in \mathbf{V}(\omega)$ *et une seule.*

Démonstration : Elle comporte sept étapes.

(i) *Il existe une constante* ε_1 *vérifiant* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$ *et une constante* M_1 *telle que*

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leqslant M_1 \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.10}$$

On fait $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$ dans les équations variationnelles (3.6). Les relations (4.6), (4.7) et l'uniforme définie positivité (4.11) du tenseur $(A^{ijk\ell}(\varepsilon))$ montrent alors que, pour $\varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_0, (2\,C_2)^{-1/2}\}$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} C_4 \sum_{i,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Omega A^{ijk\ell}(\varepsilon)\, e_{k\|\ell}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\, e_{i\|j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)}\,dx$$

$$= \int_\Omega f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)}\,dx \leqslant \{1 + \varepsilon^2 C_2\}^{1/2} \left\{\sum_i \|f^i\|_{0,\Omega}^2\right\}^{1/2} \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}.$$

Pour ε suffisamment petit, il existe donc une constante c_1 dépendant des fonctions θ et f^i telle que

$$\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 \leqslant c_1 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}. \tag{5.11}$$

Les relations (4.1)-(4.3), les majorations (4.5), l'inégalité $(A - B)^2 \geqslant A^2/2 - B^2$, et l'inégalité de Korn généralisée (4.13) montrent ensuite que, pour $\varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_0, 1\}$,

$$\sum_{i,j} \|e_{i\|j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 \geqslant \sum_{\alpha,\beta} \|\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \varepsilon^2 \tilde{e}_{\alpha\beta}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2$$

$$+ 2\sum_\alpha \|\tilde{e}_{\alpha 3}(\mathbf{u}(\varepsilon)) + \varepsilon^2 \tilde{e}_{\alpha 3}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 + \|\tilde{e}_{33}(\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 - 8\,\varepsilon^4 (C_1)^2 \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2$$

$$\geqslant \left\{\frac{1}{2}(C_5)^{-2} - 8\,\varepsilon^4 (C_1)^2\right\} \|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2.$$

Pour ε suffisamment petit, il existe donc une constante c_2 dépendant de la fonction θ telle que

$$\|\mathbf{u}(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 \leqslant c_2 \sum_{i,j} \|e_{i\,\|\,j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2. \tag{5.12}$$

La relation (5.10) est alors une conséquence de (5.11) et (5.12).

(ii) *On définit le tenseur symétrique* $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) = (\tilde{\kappa}_{ij}(\varepsilon))$ *par les relations*

$$\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon)), \tilde{\kappa}_{\alpha 3}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\,\tilde{e}_{\alpha 3}(\mathbf{u}(\varepsilon)), \tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,\tilde{e}_{33}(\mathbf{u}(\varepsilon)). \tag{5.13}$$

Alors il existe une constante M_2 *telle que*

$$\|\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\|_{0,\Omega} \leqslant M_2 \text{ pour tout } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.14}$$

D'après les définitions (5.13) et les relations (4.1)-(4.3),

$$\|\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{\alpha,\beta} \|e_{\alpha\,\|\,\beta}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon)) - \varepsilon^2 \tilde{e}_{\alpha\beta}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2$$

$$+ 2\sum_{\alpha} \|e_{\alpha\,\|\,3}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon)) - \varepsilon\tilde{e}_{\alpha 3}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 + \|e_{3\,\|\,3}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2$$

$$\leqslant 2\sum_{i,j} \|e_{i\,\|\,j}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2 + 2\,\varepsilon^4 \sum_{\alpha,\beta} \|\tilde{e}_{\alpha\beta}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2$$

$$+ 4\,\varepsilon^2 \sum_{\alpha} \|\tilde{e}_{\alpha 3}^{\#}(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega}^2,$$

et la relation (5.14) découle alors de l'inégalité ci-dessus, des majorations (4.5), et de la majoration (5.10) établie à l'Étape (i).

(iii) *D'après l'Étape* (i), *il existe une suite extraite, qu'on continuera à indicer par* $\varepsilon > 0$, *et un élément* $\mathbf{u} = (u_i) \in \mathbf{V}(\Omega)$ *tels que*

$$\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0, \tag{5.15}$$

en notant $\rightharpoonup$ *la convergence faible. Alors il existe des fonctions* $\xi_\alpha \in H^1(\omega)$ et $\xi_3 \in H^2(\omega)$ *vérifiant* $\xi_i = \partial_\nu \xi_3 = 0$ sur γ_0 *telles que*

$$u_\alpha = \xi_\alpha - x_3\,\partial_\alpha\,\xi_3 \quad \text{et} \quad u_3 = \xi_3. \tag{5.16}$$

Des définitions (4.12), (5.13) et de la majoration (5.14), on déduit que

$$\|e_{\alpha 3}(\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leqslant \varepsilon M_2 \quad \text{et} \quad \|e_{33}(\mathbf{u}(\varepsilon))\|_{0,\Omega} \leqslant \varepsilon^2 M_2.$$

La faible semi-continuité inférieure de la norme $\| \cdot \|_{0,\Omega}$ entraînant ainsi

$$\| e_{i3}(\mathbf{u}) \|_{0,\Omega} \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \| e_{i3}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \|_{0,\Omega} = 0 ,$$

il s'ensuit que $e_{i3}(\mathbf{u}) = 0$; par suite, les composantes u_i de la limite $\mathbf{u}$ de (5.15) sont de la forme (5.16) (*cf.* à nouveau Ciarlet & Destuynder [1979] ou Ciarlet [1990, Th. 1.4.1]).

(iv) *D'après l'Étape* (ii), *il existe une suite extraite, qu'on peut supposer être la même que celle trouvée en* (iii), *et un élément* $\tilde{\boldsymbol{\kappa}} = (\tilde{\kappa}_{ij}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ *tels que*

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) \rightharpoonup \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \text{ dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0 . \tag{5.17}$$

Alors

$$\tilde{\kappa}_{\alpha\beta} = \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}), \; \tilde{\kappa}_{\alpha 3} = 0, \; \tilde{\kappa}_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \tilde{e}_{\sigma\sigma}(\mathbf{u}) . \tag{5.18}$$

Puisque $\mathbf{u}(\varepsilon) \rightharpoonup \mathbf{u}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (Étape (iii)), la définition (4.4) des fonctions $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})$ montre que chaque fonction $\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u}(\varepsilon))$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers la fonction $\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u})$.

Avec les relations (4.1)-(4.3), (4.6), (4.8), $A^{\alpha\beta\sigma 3}(\varepsilon) = A^{\alpha 333}(\varepsilon) = 0$ (*cf.* (2.7) et (3.7)) et les définitions (5.13) des fonctions $\tilde{\kappa}_{ij}(\varepsilon)$, les équations variationnelles (3.6) satisfaites par $\mathbf{u}(\varepsilon)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Big(\{ [A^{\alpha\beta\sigma\tau}(0) + \varepsilon^2 A_{\#}^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon)] [\tilde{\kappa}_{\sigma\tau}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{e}_{\sigma\tau}^{\#}(\varepsilon ; \mathbf{u}(\varepsilon))] \\ &+ [A^{\alpha\beta 33}(0) + \varepsilon^2 A_{\#}^{\alpha\beta 33}(\varepsilon)] \, \tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon)\} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\alpha v_\beta + \frac{1}{2} \partial_\beta v_\alpha - v_3 \partial_{\alpha\beta} \theta + \varepsilon^2 \tilde{e}_{\alpha\beta}^{\#}(\varepsilon ; \mathbf{v}) \right\} \\ &+ \{ 4 [A^{\alpha 3\sigma 3}(0) + \varepsilon^2 A_{\#}^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon)] [\tilde{\kappa}_{\sigma 3} + \varepsilon \tilde{e}_{\sigma 3}^{\#}(\varepsilon ; \mathbf{u}(\varepsilon))] \} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} \partial_\alpha v_3 + \frac{1}{2\varepsilon} \partial_3 v_\alpha + \varepsilon \tilde{e}_{\alpha 3}^{\#}(\varepsilon ; \mathbf{v}) \right\} \\ &+ \{ [A^{33\sigma\tau}(0) + \varepsilon^2 A_{\#}^{33\sigma\tau}(\varepsilon)] [\tilde{\kappa}_{\sigma\tau}(\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{e}_{\sigma\tau}^{\#}(\varepsilon ; \mathbf{u}(\varepsilon))] \\ &+ [A^{3333}(0) + \varepsilon^2 A_{\#}^{3333}(\varepsilon)] \, \tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon) \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_3 v_3 \right\} \Big) \sqrt{1 + \varepsilon^2 g^{\#}(\varepsilon)} \, dx \\ &= \int_\Omega f^i v_i \sqrt{1 + \varepsilon^2 g^{\#}(\varepsilon)} \, dx \text{ pour tout } \mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\Omega) . \end{aligned} \tag{5.19}$$

Multipliant ces équations par ε, faisant $v_3 = 0$, et utilisant la définition (4.9), on obtient :

$$2 \int_\Omega A^{\alpha 3 \sigma 3}(0)\, \tilde{\kappa}_{\sigma 3}(\varepsilon)\, \partial_3 v_\alpha \, dx = 2\mu \int_\Omega \tilde{\kappa}_{\alpha 3}(\varepsilon)\, \partial_3 v_\alpha \, dx = \varepsilon \mathscr{R}(\varepsilon ; \tilde{\mathbf{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}),$$

le facteur de ε dans le membre de droite ayant la propriété suivante, qui découle des inégalités (4.5), (4.7), (4.10), (5.10), (5.14) : il existe une constante c_3 telle que

$$\sup_{0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1} |\mathscr{R}(\varepsilon ; \tilde{\mathbf{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v})| \leqslant c_3 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\Omega)$ tel que $v_3 = 0$. Un tel élément $\mathbf{v}$ étant fixé, faisons tendre ε vers 0 ; il vient alors $\int_\Omega \tilde{\kappa}_{\alpha 3}\, \partial_3 v_\alpha \, dx = 0$ d'après la convergence faible (5.17). On en déduit que $\tilde{\kappa}_{\alpha 3} = 0$ en faisant varier les fonctions v_α.

Multipliant ensuite les équations (5.19) par ε^2, faisant $v_\alpha = 0$, et utilisant la définition (4.9), on obtient de la même façon :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{A^{33\sigma\tau}(0)\, \tilde{\kappa}_{\sigma\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(0)\, \tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon)\}\, \partial_3 v_3 \, dx \\ &= \int_\Omega \{\lambda \tilde{\kappa}_{\sigma\sigma}(\varepsilon) + (\lambda + 2\mu) \tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon)\}\, \partial_3 v_3 \, dx \\ &= \varepsilon \mathscr{S}(\varepsilon ; \tilde{\mathbf{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v}), \end{aligned}$$

le facteur de ε ayant la propriété suivante, qui découle à nouveau des inégalités (4.5), (4.7), (4.10), (5.10), (5.14) : il existe une constante c_4 telle que

$$\sup_{0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1} |\mathscr{S}(\varepsilon ; \tilde{\mathbf{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v})| \leqslant c_4 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\Omega)$ tel que $v_\alpha = 0$. Un tel élément $\mathbf{v}$ étant fixé, faisons tendre ε vers 0 ; il vient $\int_\Omega \{\lambda \tilde{\kappa}_{\sigma\sigma} + (\lambda + 2\mu)\, \tilde{\kappa}_{33}\}\, \partial_3 v_3 \, dx = 0$ d'après la convergence faible (5.17). On en déduit que $\lambda \tilde{\kappa}_{\sigma\sigma} + (\lambda + 2\mu)\, \tilde{\kappa}_{33} = 0$ en faisant varier la fonction v_3.

(v) *L'élément* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$, *qui appartient à l'espace* $\mathbf{V}(\omega)$ *défini en* (5.2) (cette appartenance a été établie à l'Étape (iii)), *résout les équations variationnelles* (5.4).

Dans les équations variationnelles (5.19), assujettissons les fonctions $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ à vérifier

$$e_{i3}(\mathbf{v}) = 0 \text{ dans } \Omega . \tag{5.20}$$

Les équations (5.19) s'écrivent alors sous la forme

$$\int_\Omega \{\lambda \tilde{\kappa}_{pp}(\varepsilon)\, \delta_{\alpha\beta} + 2\,\mu \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}(\varepsilon)\}\, \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\, dx$$

$$= \int_\Omega f^i\, v_i\, dx + \varepsilon \mathcal{T}(\varepsilon\,;\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v})\,,$$

le facteur de ε dans le membre de droite ayant la propriété suivante : il existe une constante c_5 telle que

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1} |\mathcal{T}(\varepsilon\,;\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon), \mathbf{u}(\varepsilon), \mathbf{v})| \leq c_5 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}$$

pour tout $\mathbf{v} = (v_i) \in \mathbf{V}(\Omega)$ vérifiant (5.20).

Faisons alors tendre ε vers zéro à $\mathbf{v}$ fixé, en prenant en compte les convergences faibles (5.17) et les relations (5.18) ; on obtient ainsi

$$\int_\Omega \{\lambda \tilde{\kappa}_{pp}\, \delta_{\alpha\beta} + 2\,\mu\, \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}\}\, \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\, dx \tag{5.21}$$

$$= \int_\Omega \left\{\frac{2\,\lambda\mu}{\lambda + 2\,\mu}\, \tilde{e}_{\sigma\sigma}(\mathbf{u})\, \delta_{\alpha\beta} + 2\,\mu \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{u})\right\} \tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\, dx = \int_\Omega f^i\, v_i\, dx\,.$$

Or les composantes u_i de $\mathbf{u}$ sont de la forme (5.16) et, de la même façon, les composantes v_i d'une fonction $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega)$ vérifiant (5.20) sont de la forme

$$v_\alpha = \eta_\alpha - x_3\, \partial_\alpha \eta_3 \quad \text{et} \quad v_3 = \eta_3, \text{ avec } \boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in \mathbf{V}(\omega)\,. \tag{5.22}$$

Un simple calcul, consistant à reporter les expressions (5.16) et (5.22) dans les équations (5.21), montre alors que $\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)$ vérifie les équations variationnelles (5.4).

(vi) *Les équations variationnelles* (5.4) *ont une solution* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{V}(\omega)$ *et une seule.*

Il est facile de voir (Ciarlet & Destuynder [1979]) que l'application $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega) \to ((\eta_\alpha - x_3\, \partial_\alpha \eta_3), \eta_3) \in \mathbf{V}_{KL}(\Omega)$, où

$$\mathbf{V}_{KL}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\,;\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0, e_{i3}(\mathbf{v}) = 0\}\,,$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que les équations variationnelles (5.21) ont une solution et une seule. Or la forme bilinéaire $B(\,.\,,\,.\,)$ définie par le membre de gauche de ces équations vérifie

$$B(\mathbf{v},\mathbf{v}) \geqslant 2\,\mu \sum_{\alpha,\beta} \|\tilde{e}_{\alpha\beta}(\mathbf{v})\|^2_{0,\Omega} = 2\,\mu \sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{v})\|^2_{0,\Omega}$$

$$\text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{KL}(\Omega)\,,$$

et $\left\{\sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\,.\,)\|^2_{0,\Omega}\right\}^{1/2}$ est une norme sur l'espace $\mathbf{V}(\Omega)$ (dont $\mathbf{V}_{KL}(\Omega)$ est un sous-espace fermé), équivalente à $\|\,.\,\|_{1,\Omega}$ (Lemme 4.2).

(vii) *Soit* $\mathbf{u}$ *la limite faible dans* $\mathbf{H}^1(\Omega)$ *de la suite extraite trouvée à l'Étape* (iii). *Alors en fait, toute la famille* $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ *converge fortement vers* $\mathbf{u}$.

Les équations variationnelles (5.21) ayant une solution unique, *toute* la famille $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ vers $\mathbf{u}$. La limite faible $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de la suite extraite trouvée à l'Étape (iv) est donc elle aussi unique (*cf.* les relations (5.18)), de sorte que *toute* la famille $(\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge faiblement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ vers $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$.

Pour montrer que la famille $(\mathbf{u}(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ converge *fortement* vers $\mathbf{u}$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, il suffit d'après le Lemme 4.2 de montrer que

$$\tilde{e}_{ij}(\mathbf{u}(\varepsilon)) \to \tilde{e}_{ij}(\mathbf{u}) \text{ dans } L^2(\Omega)\,. \tag{5.23}$$

En fait, on va montrer que

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) \to \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \text{ dans } L^2(\Omega)\,, \tag{5.24}$$

et les convergences (5.23) en découleront, puisque (on rappelle que $\tilde{e}_{i3}(\mathbf{u}) = 0$; *cf.* l'Étape (iii))

$$\sum_{i,j} \|\tilde{e}_{ij}(\mathbf{u}(\varepsilon)) - \tilde{e}_{ij}(\mathbf{u})\|^2_{0,\Omega} = \sum_{\alpha,\beta} \|\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \tilde{\kappa}_{\alpha\beta}\|^2_{0,\Omega}$$
$$+ 2\,\varepsilon^2 \sum_{\alpha} \|\tilde{\kappa}_{\alpha3}(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega} + \varepsilon^4 \|\tilde{\kappa}_{33}(\varepsilon)\|^2_{0,\Omega}.$$

Si $\mathbf{S} = (s_{ij})$ et $\mathbf{T} = (t_{ij})$ sont deux matrices symétriques, on pose (les nombres $A^{ijk\ell}(0)$ ont été définis en (4.9))

$$\mathbb{A}\mathbf{S} : \mathbf{T} = A^{ijk\ell}(0)\, t_{k\ell}\, t_{ij} = \lambda s_{pp}\, t_{qq} + 2\,\mu s_{ij}\, t_{ij}.$$

Grâce aux relations (4.1)-(4.10) et (5.10), les équations variationnelles (3.6) écrites avec $\mathbf{v} = \mathbf{u}(\varepsilon)$ se mettent sous la forme :

$$\int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\,dx = \int_\Omega f^i u_i(\varepsilon)\,dx + \varepsilon r(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))\,, \tag{5.25}$$

et il existe une constante c_6 telle que

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1} |r(\varepsilon\,;\mathbf{u}(\varepsilon))| \leqslant c_6. \tag{5.26}$$

Des relations (5.25), (5.26) et de la convergence faible (5.15), on déduit alors que

$$\int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\,dx \to \int_\Omega f^i u_i\,dx \text{ lorsque } \varepsilon \to 0\,. \tag{5.27}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} 2\mu|\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) - \tilde{\boldsymbol{\kappa}}|_\Omega^2 &\leqslant \int_\Omega \mathbb{A}(\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) - \tilde{\boldsymbol{\kappa}}) : (\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) - \tilde{\boldsymbol{\kappa}})\,dx \\ &= \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\,dx + \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}} : (\tilde{\boldsymbol{\kappa}} - 2\,\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon))\,dx\,, \end{aligned} \tag{5.28}$$

de sorte que, grâce à la convergence faible (5.17) et à la convergence (5.27),

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon) : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon)\,dx + \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}} : (\tilde{\boldsymbol{\kappa}} - 2\,\tilde{\boldsymbol{\kappa}}(\varepsilon))\,dx \right\} \\ = \int_\Omega f^i u_i\,dx - \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}} : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}\,dx\,. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Or, faisant $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ dans les équations variationnelles (5.21) et tenant compte des relations (5.18), on voit facilement que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{\kappa}} : \tilde{\boldsymbol{\kappa}}\,dx &= \int_\Omega \{\lambda\tilde{\kappa}_{pp}\tilde{\kappa}_{qq} + 2\,\mu\tilde{\kappa}_{ij}\tilde{\kappa}_{ij}\}\,dx \\ &= \int_\Omega \{\lambda\tilde{\kappa}_{pp}\,\delta_{\alpha\beta} + 2\,\mu\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}\}\,\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}\,dx = \int_\Omega f^i u_i\,dx\,. \end{aligned} \tag{5.30}$$

La convergence (5.24) découle alors des relations (5.28)-(5.30), et ceci conclut la démonstration. ∎

Remarque : Posons

$$b^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{4\,\lambda\mu}{\lambda + 2\,\mu}\,\delta^{\alpha\beta}\,\delta^{\sigma\tau} + 2\,\mu(\delta^{\alpha\sigma}\,\delta^{\beta\tau} + \delta^{\alpha\tau}\,\delta^{\beta\sigma})\,.$$

Alors les relations (5.5), (5.6) prennent la forme

$$m^{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\,b^{\alpha\beta\sigma\tau}\,\partial_{\sigma\tau}\,\xi_3 \quad \text{et} \quad \tilde{n}^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta\sigma\tau}\tilde{e}_{\sigma\tau}(\boldsymbol{\xi})\,.$$

Cette écriture lève en particulier l'inconsistance observée dans ces mêmes relations en ce qui concerne l'usage des indices et des exposants. ∎

6. LES ÉQUATIONS BI-DIMENSIONNELLES D'UNE COQUE « FAIBLEMENT COURBÉE » EN COORDONNÉES CURVILIGNES

Il convient maintenant de revenir aux variables et fonctions ayant une signification « physique ». Il suffit pour cela, au vu des formules (3.1), (3.2), de définir des fonctions $\xi_i^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbf{R}$ et $u_i^\varepsilon(0) : \{\Omega^\varepsilon\}^- \to \mathbf{R}$ par

(6.1) $\xi_\alpha^\varepsilon(y) = \varepsilon^2\,\xi_\alpha(y)$ *et* $\xi_3^\varepsilon(y) = \varepsilon\xi_3(y)$ pour presque tout $y \in \omega$,

(6.2) $$u_\alpha^\varepsilon(0)\,(x^\varepsilon) = \varepsilon^2\,u_\alpha(x) \quad \text{et} \quad u_3^\varepsilon(0)\,(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3(x)$$

pour presque tout $x \in \Omega$,

les fonctions u_i et ξ_i étant celles trouvées au Théorème 5.1, et les points $x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$ et $x \in \Omega$ se correspondant comme dans les formules (3.1). On obtient ainsi le corollaire suivant du Théorème 5.1 :

THÉORÈME 6.1 : (a) *Les fonctions ξ_i^ε définies en* (6.1) *vérifient :*

(6.3) $$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = (\xi_i^\varepsilon) \in \mathbf{V}(\omega) = \{\boldsymbol{\eta} = (\eta_i) \in H^1(\omega) \times H^1(\omega) \times H^2(\omega)\,;\ \eta_i = \partial_\nu\,\eta_3 = 0\ sur\ \gamma_0\}\,,$$

(6.4) $$-\int_\omega m^{\alpha\beta,\,\varepsilon}\,\partial_{\alpha\beta}\,\eta_3\,d\omega - \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta,\,\varepsilon}\,\eta_3\,\partial_{\alpha\beta}\,\theta^\varepsilon\,d\omega + \int_\omega \tilde{n}^{\alpha\beta,\,\varepsilon}\,\partial_\beta\,\eta_\alpha\,d\omega = \int_\omega p^{i,\,\varepsilon}\,\eta_i\,d\omega - \int_\omega q^{\alpha,\,\varepsilon}\,\partial_\alpha\,\eta_3\,d\omega$$

pour tout $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{V}(\omega)$, *où l'on a posé*

$$m^{\alpha\beta,\varepsilon} = -\varepsilon^3\left\{\frac{4\lambda\mu}{3(\lambda+2\mu)}\Delta\xi_3^\varepsilon\,\delta_{\alpha\beta} + \frac{4\mu}{3}\partial_{\alpha\beta}\xi_3^\varepsilon\right\}, \tag{6.5}$$

$$\tilde{n}^{\alpha\beta,\varepsilon} = \varepsilon\left\{\frac{4\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\tilde{e}_{\sigma\sigma}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)\,\delta_{\alpha\beta} + 4\mu\tilde{e}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}^\varepsilon)\right\}, \tag{6.6}$$

$$\tilde{e}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\boldsymbol{\xi}^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha\xi_\beta^\varepsilon + \partial_\beta\xi_\alpha^\varepsilon) - \xi_3^\varepsilon\,\partial_{\alpha\beta}\theta^\varepsilon, \tag{6.7}$$

$$p^{i,\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^{i,\varepsilon}\,dx_3^\varepsilon, \tag{6.8}$$

$$q^{\alpha,\varepsilon} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3^\varepsilon f^{\alpha,\varepsilon}\,dx_3^\varepsilon. \tag{6.9}$$

(b) *On suppose* $f^{i,\varepsilon} \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ *et* $\theta^\varepsilon \in \mathscr{C}^3(\bar{\omega})$. *Alors le problème variationnel* (6.3), (6.4) *a une solution et une seule.*

(c) *Les fonctions* $u_i^\varepsilon(0)$ *définies en* (6.2) *sont données par*

$$u_\alpha^\varepsilon(0) = \xi_\alpha^\varepsilon - x_3^\varepsilon\,\partial_\alpha\xi_3^\varepsilon, \tag{6.10}$$

$$u_3^\varepsilon(0) = \xi_3^\varepsilon. \tag{6.11}$$

■

Il reste enfin à écrire le *problème aux limites « formellement » résolu*, c'est-à-dire lorsque les données et la solution sont suffisamment « régulières » pour justifier l'usage de *formules de Green* ad'hoc ; dans (6.16), ∂_τ désigne la dérivée tangentielle le long de γ dans la direction du vecteur unitaire (τ_α) faisant un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec la normale extérieure unitaire (ν_α).

THÉORÈME 6.2 : *La solution* $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = (\xi_i^\varepsilon)$ *du problème variationnel* (6.3), (6.4) *vérifie, au moins « formellement » :*

$$-\partial_{\alpha\beta}m^{\alpha\beta,\varepsilon} - \tilde{n}^{\alpha\beta,\varepsilon}\,\partial_{\alpha\beta}\theta^\varepsilon = p^{3,\varepsilon} + \partial_\alpha q^{\alpha,\varepsilon}\ \textit{dans}\ \omega, \tag{6.12}$$

$$-\partial_\beta\tilde{n}^{\alpha\beta,\varepsilon} = p^{\alpha,\varepsilon}\ \textit{dans}\ \omega, \tag{6.13}$$

$$\xi_i^\varepsilon = \partial_\nu\xi_3^\varepsilon = 0\ \textit{sur}\ \gamma_0, \tag{6.14}$$

$$m^{\alpha\beta,\varepsilon}\,\nu_\alpha\,\nu_\beta = 0\ \textit{sur}\ \gamma_1 = \gamma - \gamma_0, \tag{6.15}$$

$$(\partial_\alpha m^{\alpha\beta,\varepsilon})\,\nu_\beta + \partial_\tau(m^{\alpha\beta,\varepsilon}\,\nu_\alpha\,\tau_\beta) = -q^{\alpha,\varepsilon}\,\nu_\alpha\ \textit{sur}\ \gamma_1, \tag{6.16}$$

$$n^{\alpha\beta,\varepsilon}\,\nu_\beta = 0\ \textit{sur}\ \gamma_1. \tag{6.17}$$

■

Le problème variationnel (6.3), (6.4), ou le problème aux limites équivalent (6.12)-(6.17), constitue les *équations bi-dimensionnelles d'une coque linéairement élastique « faiblement courbée » en coordonnées curvilignes.*

Sans *aucune* hypothèse *a priori* de nature géométrique ou mécanique, nous avons donc rigoureusement justifié ces équations par un résultat de *convergence,* en montrant que les composantes covariantes du champ de déplacement tri-dimensionnel, une fois rapportées à l'ouvert fixe Ω par les « mises à l'échelle » (3.1), convergent dans $H^1(\Omega)$ vers des limites qui, par l'intermédiaire des formules (5.3), sont entièrement déterminées par la solution des équations variationnelles (5.4) (ces dernières ne sont autres que les équations (6.4) « mises à l'échelle »).

Le modèle bi-dimensionnel trouvé ici est celui de *Novozhilov* [1959] pour lequel, moyennant une certaine restriction géométrique dont on s'est affranchi ici, Destuynder [1980] avait obtenu un premier résultat de convergence par une approche différente.

Ce modèle est également à rapprocher des modèles de coques « faiblement courbée » en coordonnées curvilignes proposés par Koiter [1970], Green & Zerna [1968, p. 400], Dikmen [1982, p. 158]. A l'inverse du présent modèle, ces modèles sont obtenus à partir de diverses hypothèses *a priori,* censées prendre en compte de façon satisfaisante la « faible courbure » de la surface moyenne. Par exemple, Dikmen [1982, p. 158] définit une coque « faiblement courbée » comme « une coque où le plus petit rayon de courbure est suffisamment grand pour que, localement, la coque soit presque plate », etc.

L'analyse asymptotique a également permis de justifier une hypothèse *a priori* de nature géométrique, en montrant que *le déplacement « limite »* $u_i^\varepsilon(0)\,\mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ (les vecteurs $\mathbf{g}^{i,\varepsilon}$ constituent la base contravariante en chaque point de la coque ; *cf.* Section 2) *est un champ de Kirchhoff-Love,* au sens que ses composantes covariantes $u_i^\varepsilon(0)$ sont de la forme (6.10), (6.11).

Une autre conclusion importante de ce travail est que *l'hypothèse « $\theta^\varepsilon(y) = \varepsilon\theta(y)$ pour tout $y \in \bar{\omega}$ » définit la notion de coque linéairement élastique « faiblement courbée » aussi bien en coordonnées curvilignes qu'en coordonnées cartésiennes* (*cf.* Ciarlet & Miara [1992, éq. (3.14)]). Elle signifie qu'il est loisible d'utiliser l'un quelconque des deux modèles bi-dimensionnels obtenus (en coordonnées curvilignes dans le présent article, ou en coordonnées cartésiennes dans Ciarlet & Miara [1992]) dès que *la fonction $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \to \mathbf{R}$* (qui mesure « l'écart » entre la surface moyenne de la coque et un plan de référence à choisir « au mieux ») *est de l'ordre de l'épaisseur de la coque.* Il convient de noter que la *même* hypothèse définit pareillement les coques *non linéairement élastiques « faiblement courbées »* aussi bien en coordonnées cartésiennes qu'en coordonnées curvilignes (*cf.* Ciarlet & Paumier [1986] et Busse [1997]).

Le champ de déplacement de la surface moyenne obtenu à partir de la solution du problème (6.3)-(6.9) et celui obtenu à partir de la solution du problème trouvé en coordonnées cartésiennes (*cf.* Ciarlet & Miara [1992, éqs. (6.3)-(6.9)]) *ne coïncident pas* en général. On peut néanmoins vérifier que, au moins *formellement,* les composantes tangentielles et normales obtenues dans les deux cas ont les *mêmes « parties principales »* par rapport à ε. En ce sens, la cohérence des deux approches est assurée.

Remarques :

(1) On vérifie immédiatement que, si la coque est une *plaque* « faiblement inclinée » (i.e., la fonction θ est de la forme $\theta(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$), les équations (6.3)-(6.9) coïncident avec celles d'une plaque en coordonnées « naturelles » (*cf.* e.g. Ciarlet [1990, Th. 3.5-2]).

(2) Les mises à l'échelle (3.1) sur les composantes du déplacement, et les hypothèses (3.3) sur les composantes des forces appliquées, sont les *mêmes* que pour une *plaque* (Ciarlet & Destuynder [1979]) ou une *coque « faiblement courbée » en coordonnées cartésiennes* (Ciarlet & Miara [1992]). On est par contre conduit à faire des mises à l'échelle et des hypothèses *différentes* (elles doivent être les mêmes pour les trois composantes du déplacement, et les mêmes pour les trois composantes des forces appliquées) lorsqu'on considère des coques *« générales »* (*cf.* Ciarlet & Lods [1996a, 1996b], Ciarlet, Lods & Miara [1996]). ■

Ce travail fait partie du Programme Capital Humain et Mobilité « Shells : Mathematical Modeling and Analysis, Scientific Computing » de la Commission des Communautés Européennes (Contrat n° ERBCHRXCT 940536).

RÉFÉRENCES

J. A. ALVAREZ-DIOS, J. M. VIAÑO, 1995, Une théorie asymptotique de flexion-extension pour les poutres élastiques faiblement courbées, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **321,** Série I, 1395-1400.

C. AMROUCHE, V. GIRAULT, 1994, Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension, *Czech. Math. J.,* **44,** 109-140.

A. BERMUDEZ, J. M. VIAÑO, 1984, Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques, *RAIRO Analyse Numérique,* **18,** 347-376.

W. BORCHERS, H. SOHR, 1990, On the equations rot $v = g$ and div $u = f$ with zero boundary conditions, *Hokkaido Math. J.,* **19,** 67-87.

S. BUSSE, 1997, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

S. BUSSE, P. G. CIARLET, B. MIARA, 1996, Coques « faiblement courbées » en coordonnées curvilignes, *C.R. Acad. Sci. Paris,* Sér. I, à paraître.

D. CAILLERIE, 1980, The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body, *Math. Methods Appl. Sci.,* **2,** 251-270.

D. CAILLERIE, E. SANCHEZ-PALENCIA, 1995, Elastic thin shells : asymptotic theory in the anisotropic and heterogeneous cases, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **5**, 473-496.

P. G. CIARLET, 1988, *Mathematical Elasticity, Vol. I : Three-Dimensional Elasticity,* North-Holland.

P. G. CIARLET, 1990, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures : An Asymptotic Analysis,* Masson, Paris.

P. G. CIARLET, 1997, *Mathematical Elasticity, Vol. II : Theory of Plates,* North-Holland.

P. G. CIARLET, 1998, *Mathematical Elasticity, Vol. III : Theory of Shells,* North-Holland, à paraître.

P. G. CIARLET, P. DESTUYNDER, 1979, A justification of the two-dimensional plate model, *J. Mécanique,* **18,** 315-344.

P. G. CIARLET, S. KESAVAN, 1981, Two-dimensional approximation of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **26,** 149-172.

P. G. CIARLET, V. LODS, 1996a, Asymptotic analysis of linearly elastic shells. I : Justification of membrane shell equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, à paraître.

P. G. CIARLET, V. LODS, 1996b, Asymptotic analysis of linearly elastic shells : « Generalized membrane shells », à paraître.

P. G. CIARLET, V. LODS, & MIARA, 1996, Asymptotic analysis of linearly elastic shells. II : Justification of flexural shell equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, à paraître.

P. G. CIARLET, B. MIARA, 1992, Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45,** 327-360.

P. G. CIARLET, J. C. PAUMIER, 1986, A justification of the Marguerre-von Kármán equations, *Computational Mechanics,* **1,** 177-202.

P. DESTUYNDER 1980, *Sur une Justification des Modèles de Plaques et de Coques par les Méthodes Asymptotiques,* Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

P. DESTUYNDER 1981, Comparaison entre les modèles tri-dimensionnels et bi-dimensionnels de plaques en élasticité, *RAIRO Analyse Numérique,* **15,** 331-369.

P. DESTUYNDER, 1985, A classification of thin shell theories, *Acta Applicandae Mathematicae,* **4,** 15-63.

M. DIKMEN, 1982, *Theory of Thin Elastic Shells,* Pitman, Boston.

G. DUVAUT, J. L. LIONS, 1972, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique,* Dunod, Paris.

G. GEYMONAT, F. KRASUCKI, J. J. MARIGO, 1987, Stress distribution in anisotropic elastic composite beams, in *Applications of Multiple Scalings in Mechanics* (P. G. Ciarlet & E. Sanchez-Palencia, Editors), pp. 18-133, Masson, Paris.

A. E. GREEN, W. ZERNA, 1968, *Theoretical Elasticity, Second Edition,* Oxford University Press.

R. V. KOHN, M. VOGELIUS, 1985, A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II : A convergence proof, *Quart. Appl. Math.*, **43,** 1-21.

W. T. KOITER, 1970, On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.*, **B73,** 169-195.

H. LE DRET, 1991, *Problèmes Variationnels dans les Multi-Domaines : Modélisation des Jonctions et Applications,* Masson, Paris.

H. LE DRET, 1995, Convergence of displacements and stresses in linearly elastic slender rods as the thickness goes to zero, *Asymptotic Anal.,* **10,** 367-402.

J. L. LIONS, 1973, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal,* Lectures Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer-Verlag.

E. MAGENES, G. STAMPACCHIA, 1958, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **12,** 247-358.

B. MIARA, E. SANCHEZ-PALENCIA, 1996, Asymptotic analysis of linearly elastic shells, *Asymptotic Anal.,* **12,** 41-54.

V. V. NOVOZHILOV, 1959, *Thin Shell Theory,* Walters Noordhoff Publishers.

A. RAOULT, 1985, Construction d'un modèle d'évolution de plaques avec termes d'inertie de rotation, *Annali di Matematica Pura ed Applicata,* **139,** 361-400.

A. RAOULT, 1988, *Analyse Mathématique de Quelques Modèles de Plaques et de Poutres Élastiques ou Élasto-Plastiques,* Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

E. SANCHEZ-PALENCIA, 1990, Passages à la limite de l'élasticité tri-dimensionnelle à la théorie asymptotique des coques minces, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. II,* **311,** 909-916.

L. TRABUCHO, J. M. VIAÑO, 1996, Mathematical modelling of rods, in *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV* (P. G. Ciarlet & J. L. Lions, Editors), pp. 487-974, North-Holland.