M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique

J. Baranger

A. Machmoum

Une norme « naturelle » pour la méthode des caractéristiques en éléments finis discontinus : cas 1-D

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, nº 5 (1996), p. 549-574

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_5_549_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 30, n° 5, 1996, p. 549 à 574)

UNE NORME « NATURELLE » POUR LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES EN ÉLÉMENTS FINIS DISCONTINUS : CAS 1-D (*)

par J. BARANGER [1], A. MACHMOUM [1]

Résumé. — *On considère, pour l'équation de convection stationnaire à une variable, la méthode des caractéristiques de pseudo-pas de temps k avec approximation de l'inconnue par des éléments finis P_r discontinus sur un maillage $\mathcal{T}_h$. On construit, pour cette méthode, une norme « naturelle », notée $\| \quad \|_{h,k}$, pour laquelle on montre que le problème variationnel approché (P_h^k) est bien posé et on obtient une majoration d'erreur. On montre que, quand k tend vers zéro, le problème (P_h^k) (resp. la norme $(\| \quad \|_{h,k})$ a pour limite le problème (P_h) (resp. la norme $(\| \quad \|_h)$, associé à la méthode de Galerkin discontinue.*

Abstract. — *We consider for the one dimensional steady transport equation the characteristic method with a pseudo time step k. The unknown is approximated by P_r discontinuous finite elements on mesh $\mathcal{T}_h$. For this method, we exhibit a « natural » norm $\| \quad \|_{h,k}$ for wich we show that the discrete variationnal problem P_h^k is well posed and we give an error estimate. We show that when k goes to zero problem (P_h^k) (resp. the $\| \quad \|_{h,k}$ norm) has as a limit problem (P_h) (resp. the $\| \quad \|_h$ norm) associated to the Galerkin discontinuous method.*

1. INTRODUCTION

On se propose d'étudier, pour une équation du premier ordre, les liens entre la méthode des caractéristiques de pseudo-pas de temps k, telle que décrite dans [3] mais avec approximation de l'inconnue par des éléments finis P_r discontinus, et la méthode de Galerkin discontinue introduite dans [7].

Dans [4] les auteurs remarquent que sur un maillage triangulaire et pour des éléments finis P_r discontinus, la méthode des caractéristiques converge formellement vers celle de Galerkin discontinue lorsque le pseudo-pas de temps tend vers zéro.

La norme d'étude de la méthode de Galerkin discontinue introduite dans [6] est la norme

$$\| u \|_h = (|u|_{0,\Omega}^2 + \langle\langle [u] \rangle\rangle_h^2)^{\frac{1}{2}} ,$$

(*) Manuscrit reçu le 27 avril 1995 et sous forme révisée le 1er avril 1996.

(1) Laboratoire d'Analyse Numérique et CNRS URA 740 Université Lyon 1, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex-France.

où $| \quad |_{0,\Omega}$ est la norme $L^2(\Omega)$, $[\quad]$ est le saut à travers la frontière commune à deux éléments finis et $\langle\langle \quad \rangle\rangle_h$ est définie par :

$$\langle\langle v \rangle\rangle_h^2 = \int_{\Gamma_h \cup \Gamma} v^2 |b \cdot n| \, d\gamma$$

où Γ_h est l'ensemble des faces intérieures à Ω.

On construit dans cet article une norme $\| \quad \|_{h,k}$ qui apparaît comme une norme « naturelle » d'étude de la méthode des caractéristiques. On montre que cette norme converge, lorsque k tend vers zéro vers la norme $\| \quad \|_h$. On obtient également des estimations d'erreur pour la méthode des caractéristiques en norme $\| \quad \|_{h,k}$, cohérentes avec celles de [3] pour la méthode de Galerkin discontinue.

Ces résultats sont actuellement limités au problème à une variable d'espace pour lequel on peut expliciter la solution du système des caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = b(x) . \tag{1.1}$$

Cette étude de la méthode des caractéristiques est motivée par la construction de méthodes performantes pour la simulation d'écoulements de fluides viscoélastiques. Dans les modèles différentiels on doit résoudre une équation de transport du tenseur viscoélastique des contraintes (voir [1]).

Le plan est le suivant : au paragraphe 2 on rappelle la méthode de Galerkin discontinue et les majorations d'erreur en norme $\| \quad \|_h$ et on donne brièvement des résultats de majoration en norme $| \quad |_0$ pour la méthode des caractéristiques analogues à ceux de [3] pour le cas $\nabla \cdot b = 0$. Au paragraphe 3 on étudie le cas des éléments P_0 qui permet d'introduire naturellement l'hypothèse $c - \frac{1}{2} A' \geq c_0 > 0$. Au paragraphe 4 on étudie la forme bilinéaire associée à la méthode des caractéristiques pour des éléments P_r discontinus ; on montre sa convergence vers celle de Galerkin discontinue quand k tend vers zéro et sa coercivité en norme $\| \quad \|_{h,k}$ obtenue grâce à une formule d'intégration par parties « épaisse » ; au dernier paragraphe, on obtient un résultat de majoration d'erreur.

2. MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE ET MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

2.1. Méthode de Galerkin discontinue

Soit Ω un ouvert polygonal borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ et soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\overline{\Omega}$

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K .$$

On désigne par Γ_h la réunion des côtés intérieurs au maillage. On considère le problème stationnaire suivant :

$$(P)\quad \begin{cases} b \,.\, \nabla u + cu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = g & \text{sur} \quad \Gamma^- \end{cases}$$

avec $\Gamma^- = \{x \in \Gamma, b \,.\, n(x) < 0\}$ où n désigne la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur de Ω ; on suppose que le maillage est compatible avec Γ^-. On définit u^+ et u^- par : $u^+(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} u(x + \varepsilon b)$, $u^-(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} u(x - \varepsilon b)$ et le saut de u par : $[u] = u^+ - u^-$.

Soit $u_h \in V_h = \{u_h \in L^2(\Omega)\,;\, u_h|_K \in P_r\}$ où P_r est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à r. La méthode de Galerkin discontinue pour (P) est définie dans [7] par :

$$\int_K (b \,.\, \nabla u_h + cu_h)\, v_h \,dx + \int_{\partial K^-} [u_h]\, v_h |n \,.\, b| \,d\sigma = \int_K f v_h \,dx \qquad \forall v_h \in P_r(K) \quad (2.1)$$

avec la convention $u_h^- = g$ si $\partial K^- \subset \Gamma^-$ où :

$$\partial K^- = \{x \in \partial K, b \,.\, n(x) < 0\} \quad \text{et} \quad \partial K^+ = \{x \in \partial K, b \,.\, n(x) < 0\}.$$

En posant :

$$B(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (b \,.\, \nabla u_h + cu_h)\, v_h \,dx + \sum_{\gamma \in \Gamma_h} \int_\gamma [u_h]\, v_h^+ \,|n \,.\, b| \,d\sigma$$
$$+ \int_{\Gamma^+} u_h v_h \,|n \,.\, b| \,d\sigma \quad (2.2)$$

$$L(v_h) = \int_\Omega f v_h \,dx + \int_{\Gamma^-} g v_h |n \,.\, b| \,d\sigma \quad (2.3)$$

on peut écrire (2.1) sous forme variationnelle :

$$(P_h) \quad B(u_h v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.4)$$

On introduit suivant [6] une norme « naturelle » associée

$$\|u_h\|_h^2 = |u_h|_{0,\Omega}^2 + \int_{\Gamma_h} [u_h]^2 |n \cdot b| \, d\sigma + \int_{\Gamma^-} u_h^2 |n \cdot b| \, d\sigma . \tag{2.5}$$

Et on montre dans [6] l'estimation d'erreur suivante :

THÉORÈME 2.1 : *On suppose que* $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *et qu'il existe une constante* c_0 *telle que* $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq c_0 > 0$ *et* $u \in H^{r+1}(\Omega)$ *alors :*

$$\|u - u_h\|_h = O(h^{r+\frac{1}{2}}) . \tag{2.6}$$

Un exemple numérique présenté dans [9] montre que cette estimation ne peut pas être améliorée sur un maillage quasi-uniforme.

Dans toute la suite, $\Omega =]0, 1[$ et $b \geq b_0 > 0$. Dans ce cas, (P) devient :

$$(P1) \quad \begin{cases} bu' + cu = f \text{ dans } \Omega \\ u(0) = g \end{cases}$$

On utilise les notations suivantes : $K_i = [x_{i-1}, x_i]$ où $x_i = ih$ et $u_h = u_i$ sur K_i avec $i = 1, ..., N$. Une approximation Galerkin discontinue du problème $(P1)$ est de la forme :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu_h' + cu_h)\, v_h \, dx + (u_h^+(x_{i-1}) - u_h^-(x_{i-1}))\, v_h^+(x_{i-1})\, b(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in V_h \tag{2.7}$$

avec $u_h \in V_h = \{u_h \in L^2(]0, 1[) \, ; u_h|_K \in P_r\}$. Dans le cas 1-D (2.2) et (2.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} B(u_h, v_h) = &\sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (bu_h' + cu_h)\, v_h \, dx \\ &+ \sum_{i=2}^{N} (u_h^+(x_{i-1}) - u_h^-(x_{i-1}))\, v_h^+(x_{i-1})\, b(x_{i-1}) \\ &+ u_h^+(x_0)\, v_h^+(x_0)\, b(x_0) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$L(v_h) = \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx + g v_h(x_0) , \tag{2.9}$$

le problème (2.7) devient donc :

$$(P_h) \quad B(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h . \tag{2.10}$$

On rappelle que la coercivité de B s'obtient alors par le calcul suivant qui sera utilisé comme modèle au paragraphe 3. On utilise la formule d'intégration par parties :

$$2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b u_h') \, u_h \, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} b' u_h^2 \, dx = \int_{\partial K_i} u_h^2 \, b \cdot n \, d\sigma \tag{2.11}$$

et l'égalité :

$$\sum_K \int_{\partial K} u_h^2 \, b \, . \, n \, d\sigma = \sum_{i=1}^{N-1} - [u_h^2] \, (x_i) \, b(x_i) - (u_h^+)^2 (x_0) \, b(x_0) + (u_h^-)^2 (x_N) \, b(x_N) \tag{2.12}$$

on trouve :

$$B(u_h, u_h) = \int_0^1 \left(c - \frac{1}{2} b' \right) u_x^2 \, dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (u_h^+ (x_i) - u_h^- (x_i))^2 \, b(x_i) + \frac{1}{2} (u_h^+)^2 (x_0) \, b(x_0) + \frac{1}{2} (u_h^-)^2 (x_N) \, b(x_N) . \tag{2.13}$$

Dans le cas 1-D la norme (2.5) devient :

$$\| u_h \|_h^2 = \int_0^1 u_h^2 \, dx + \sum_{i=1}^{N-1} (u_h^+ (x_i) - u_h^- (x_i))^2 \, b(x_i) + (u_h^+)^2 (x_0) \, b(x_0) + (u_h^-)^2 (x_N) \, b(x_N) . \tag{2.14}$$

2.2. Méthode des caractéristiques

On introduit un paramètre k (pseudo pas de temps) et on note $S(x, t, \tau)$ la solution du système différentiel des caractéristiques :

$$\frac{dS}{d\tau} = b(S)$$

avec $S(x, t, t) = x$. On pose :

$$X^k(x) = S(x, t, t-k) . \tag{2.15}$$

Suivant [3], on approche le problème (P) par :

$$(P^k) \quad \begin{cases} \dfrac{u^k(x) - u^k(X^k(x))}{k} + cu^k = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u^k = g & \text{sur} \quad \Gamma^- . \end{cases}$$

Une formulation variationnelle de (P^k) est de la forme :

$$\frac{1}{k}(u^k, v) - \frac{1}{k}(u^k(X^k(\,.\,)), v) + c(u^k, v)) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{2.16}$$

avec $u^k \in H^1(\Omega)$ et $u^k|_{\Gamma^-} = g$, où $(\,,)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. On peut remarquer que le problème (2.16) a une solution unique (voir [3]).

THÉORÈME 2.2 : *Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (P) et u^k est solution de (P^k), et si on suppose de plus que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} b \in W^{1,\infty}(\Omega) & \\ \nabla \,.\, b = 0 & \textit{dans} \quad \Omega \\ b \,.\, n = 0 & \textit{p.p} \quad \textit{sur}\ \Gamma \end{cases}$$

alors on a :

$$c_0 |u - u^k|_{0,\Omega} \leq C(b, u)\, k .$$

Pour la démonstration du Théorème 2.2, on utilise les mêmes techniques que dans [3] pour un problème de convection-diffusion.

Remarque 2.1 : Dans la démonstration du Théorème 2.2 on utilise l'hypothèse $\nabla \,.\, b = 0$ pour avoir l'égalité : $\int_\Omega G(X^k(x))\, dx = \int_\Omega G(x)\, dx$; en effet, d'après [8], si b est à divergence nulle alors le jacobien de la transformation $x \to X^k(x)$ est égal à 1.

Remarque 2.2 : Dans [3], on montre une majoration d'erreur pour une approximation par EF de (P^k) obtenue par approximation P_1 continue de u^k et P_0 de b. Plus précisément : soit H_h un espace d'éléments finis constants par morceaux sur $\mathcal{T}_h$ et soit b_h une approximation de b dans H_h ; on suppose que $g = 0$ et que $r = 1$. Alors on définit le problème discrétisé en espace de la façon suivante : trouver $u_h^k \in V_h$ tel que :

$$\left(\left(\frac{1}{k} + c\right) u_h^k, z_h\right)_{0,\Omega} - \frac{1}{k}(u_h^k(X_h^k(\,.\,)), z_h)_{0,\Omega} = (f, z_h)_{0,\Omega} \quad \forall z_h \in V_h \tag{2.17}$$

avec $u_h^k = 0$ sur Γ et $X_h^k(x) = S_h(x, (m+1)\,k, mk)$ où S_h est défini par :

$$\frac{dS_h}{d\tau} = b_h(S_h) \tag{2.18}$$

avec $S_h(x, (m+1)\,k, (m+1)\,k) = x$. Le problème (2.17) a une solution unique, de plus on a l'estimation d'erreur suivante :

$$|u_h^k - u|_{0,\Omega} \leqslant o\left(h + \frac{h^2}{k} + k\right). \tag{2.19}$$

3. ÉLÉMENTS FINIS P_0

L'étude qui suit a pour but de trouver une norme naturelle associée à la méthode des caractéristiques telle que, lorsque k tend vers 0, on retrouve la norme de Galerkin discontinue.

Pour simplifier l'écriture, on note u^k par u dans ce paragraphe. Soit ϕ une primitive de $\frac{1}{b}$, on peut alors expliciter $X^k(x)$ défini par (2.15), $X^k(x) = \phi^{-1}(\phi(x) - k)$; soit $\theta_1 = \phi^{-1}(\phi(x_0) + k)$. On considère le problème :

$$(P^k) \quad \begin{cases} \dfrac{u(x) - u(X^k(x))}{k} + cu = f & \text{dans} \quad]0, 1[\\ u(X^k(x)) = g & \text{si} \quad x \in [x_0, \theta_1]\,. \end{cases}$$

Suivant [2], on peut supposer que $u(X^k(x)) = g$ si $x \in [x_0, \theta_1]$. Une formulation variationnelle (P_h^k) du problème approché de (P^k) est donnée par :

$$(P_h^k) \quad \int_{K_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\,dx + \int_{K_i} cu_h(x)\,v_h(x)\,dx$$
$$= \int_{K_i} f(x)\,v_h(x)\,dx \quad \forall v_h \in V_h\,. \tag{3.1}$$

Soit $\theta_i = \phi^{-1}(\phi(x_{i-1}) + k)$. Comme $b > 0$ alors ϕ et ϕ^{-1} sont croissantes. On choisit donc k tel que : $\phi(x_{i-1}) < \phi(x_{i-1}) + k < \phi(x_i)$. On obtient donc la condition CFL suivante :

$$k < \min_{i=1,N} (\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})) .$$

On a alors $x_{i-1} < \theta_i < x_i$.

Etudions tout d'abord le cas où $i = 1$. Dans ce cas, la formulation variationnelle (3.1) devient :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} c u_h(x)\, v_h(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, v_h(x)\, dx . \quad (3.2)$$

Or si $x \in [x_0, \theta_1]$ alors $u_h(X^k(x)) = g$. Donc le problème (3.2) devient :

$$\frac{\theta_1 - x_0}{k} u_1\, v_1 + \int_{x_0}^{x_1} c u_h\, v_h\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f v_h\, dx + \frac{1}{k} \int_{x_0}^{\theta_1} g v_h\, dx . \quad (3.3)$$

Supposons que $i \neq 1$. Donc pour $x_{i-1} < x < \theta_i$, $\phi(x_{i-1}) - k < \phi(x) < \phi(\theta_i) - k = \phi(x_{i-1})$; si on pose $w_{i-1} = \phi^{-1}(\phi(x_{i-1}) - k)$ on obtient donc $w_{i-1} < X^k(x) < x_{i-1}$. Et en utilisant la condition CFL on trouve que $x_{i-2} < w_{i-1}$. Donc :

$$x_{i-2} < X^k(x) < x_{i-1} . \quad (3.4)$$

De même pour $\theta_i < x < x_i$ on a

$$\phi(x_{i-1}) = \phi(\theta_i) - k < \phi(x) - k < \phi(x_i) - k$$

d'où $x_{i-1} < X^k(x) < \phi^{-1}(\phi(x_i) - k) = w_i$ de plus $w_i < x_i$ d'où :

$$x_{i-1} < X^k(x) < x_i . \quad (3.5)$$

Remarquons que le raisonnement fait ci-dessus pour obtenir (3.4) et (3.5) reste aussi valable pour des éléments finis P_r discontinus.

Donc on peut résumer pour $r = 0$ et $i \neq 1$:

$$\text{si} \quad x_{i-1} < x < \theta_i \Rightarrow u_h(x) = u_{i-1}$$

$$\text{et si} \quad \theta_i < x < x_i \Rightarrow u_h(x) = u_i \,.$$

Le problème (3.1) devient donc :

$$\frac{\theta_i - x_{i-1}}{k}(u_i - u_{i-1})v_i + \int_{K_i} c u_h\, v_h\, dx = \int_{K_i} f v_h\, dx \tag{3.6}$$

d'où, en sommant sur les $i = 2, ..., N$, on trouve

$$\sum_{i=2}^{N} \frac{\theta_i - x_{i-1}}{k}(u_i - u_{i-1})\, v_i + \int_{x_1}^{1} c u_h\, v_h\, dx = \int_{x_1}^{1} f v_h\, dx \,. \tag{3.7}$$

Sous la condition CFL, la formulation variationnelle (P_h^k) est équivalente à :

$$\frac{\theta_1 - x_0}{k} u_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{\theta_i - x_{i-1}}{k}(u_i - u_{i-1})v_i + \int_0^1 c u_h\, v_h\, dx$$
$$= \int_0^1 f v_h\, dx + \frac{1}{k}\int_0^1 g v_h\, dx \,. \tag{3.8}$$

On définit B_c et L_c par :

$$B_c(u_h\, v_h) = \frac{\theta_1 - x_0}{k} u_1\, v_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{\theta_i - x_{i-1}}{k}(u_i - u_{i-1})v_i$$

$$+ \int_0^1 c u_h\, v_h\, dx = dx \tag{3.9}$$

$$L_c(v_h) = \int_0^1 f v_h\, dx + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{\theta_1} g v_h\, dx \,. \tag{3.10}$$

On pose :

$$A_{i-1} = \frac{\theta_i - x_{i-1}}{k} \tag{3.11}$$

et on définit la norme associée à la méthode des caractéristiques par :

$$\| u_h \|_{h,k}^2 = A_0 u_1^2 + \frac{1}{2} A_1 (u_2 - u_1)^2 + \cdots + \frac{1}{2} A_{N-1} (u_N - u_{N-1})^2$$

$$+ A_N u_N^2 + \int_0^1 u_h^2 \, dx . \tag{3.12}$$

Afin d'étudier la coercivité de B_c selon une démarche proche de celle utilisée par la méthode de Galerkin discontinue, on définit :

$$A(x) = \frac{\theta(x) - x}{k} . \tag{3.13}$$

La formule d'intégration par parties (2.11) a pour analogue :

$$- \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} A' u_i^2 \, dx + \frac{1}{2} (A_i - A_{i-1}) u_i^2 = 0 . \tag{3.14}$$

On a alors :

THÉORÈME 3.1 : *Sous l'hypothèse* $c - \frac{1}{2} A' \geqslant c_0 > 0$ *on a :*

$$B_c(u_h, u_h) \geqslant C \| u_{h,k} \|_{h,k}^2 . \tag{3.15}$$

Démonstration : Si on utilise l'égalité (3.11), $B_c(u_h, u_h)$ devient :

$$B_c(u_h, u_h) = A_0 u_1^2 + \sum_{i=2}^{N} A_{i-1} (u_i - u_{i-1}) u_i + \int_0^1 c u_h^2 \, dx . \tag{3.16}$$

En utilisant aussi l'équation (3.14) dans (3.16), on trouve :

$$B_c(u_h, u_h) = \frac{1}{2} A_0 u_1^2 + \frac{1}{2} A_1 (u_2 - u_1)^2 + \cdots + \frac{1}{2} A_{N-1} (u_N - u_{N-1})^2$$

$$+ \frac{1}{2} A_N u_N^2 + \int_0^1 \left(c - \frac{1}{2} A' \right) u_h v_h \, dx ; \tag{3.17}$$

donc si $c - \frac{1}{2} A' \geqslant c_0 > 0$ on a la coercivité de B_c. ∎

Remarque 3.1 : On peut énoncer le résultat de convergence suivant : on suppose que $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$, alors lorsque k tend vers 0 la norme associée à la méthode des caractéristiques converge vers la norme associée à la méthode de Galerkin discontinue, plus précisément on a :

$$\lim_{k \to 0} \| u_h \|_{h,k} = \| u_h \|_h . \tag{3.18}$$

En effet, si on pose $\theta(x) = \phi^{-1}(\phi(x) + k)$ alors θ peut s'écrire :

$$\theta(x) = \phi^{-1}(\phi(x)) + \frac{d\phi^{-1}}{dy}(\eta)\, k \tag{3.19}$$

avec $\phi(x) < \eta < \phi(x) + k$. Donc :

$$\theta(x) = x + kb(\phi^{-1}(\eta)) \tag{3.20}$$

d'où $A(x) = b(\phi^{-1}(\eta))$ donc $\lim_{k \to 0} A(x) = b(x)$ on a alors l'égalité (3.18).

Remarque 3.2 : L'hypothèse $c - \frac{1}{2} A' \geq c_0 > 0$ du Théorème 3.1 correspond pour $k \to 0$ à $c - \frac{1}{2} b' \geq c_0 > 0$ du Théorème 2.1. En effet :

$$\begin{aligned} \theta'(x) &= \frac{d}{dx} \phi^{-1}(\phi(x) + k) = \frac{d\phi^{-1}}{dy}(\phi(x) + k) \frac{d\phi}{dx}(x) \\ &= \frac{d\phi^{-1}}{dy}(\phi(\theta(x))) \frac{d\phi}{dx}(x) = \frac{b(\theta(x))}{b(x)} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{k}(\theta'(x) - 1) = \frac{1}{k} \frac{b(\theta(x)) - b(x)}{b(x)} \\ &= \frac{\theta(x) - x}{kb(x)} b'(w_x) = \frac{b(\xi_x)}{b(x)} b'(w_x) \end{aligned}$$

où ξ_x et w_x sont tel que $x < \xi_x < \phi^{-1}(\phi(x) + k)$ et $x < w_x < \theta(x)$. On a donc $\lim_{k \to 0} A'(x) = b'(x)$.

4. ÉLÉMENTS FINIS P_r

On considère à nouveau le problème (P_h^k). Trouver $u_h \in V_h$ tel que $\forall i = 1, \ldots, N$

$$\int_{K_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_{K_i} c u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \int_{K_i} f(x)\, v_h(x)\, dx \quad \forall v_h \in V_h \tag{4.1}$$

avec $X^k(x) = \phi^{-1}(\phi(x) - k) = y$, donc $\phi(y) + k = \phi(x)$ d'où $x = \phi^{-1}(\phi(y) + k) = \theta(y)$. En sommant (4.1) sur les i on trouve :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_{x_1}^{1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx \tag{4.2}$$
$$+ \int_0^1 c(x)\, v_h(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx\,.$$

Suivant [2], on peut utiliser la condition $u_h(X^k(x)) = g$ si $x \in [x_0, \theta_1]$. La formulation variationnelle (4.2) est donc équivalente à :

$$(P_h^k) \quad B_c(u_h, v_h) = L_c(v_h) \tag{4.3}$$

avec :

$$B_c(u_h, v_h) = \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h(x) - v_h(x)}{k} dx + \int_{x_1}^{1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx \tag{4.4}$$
$$+ \int_{x_1}^{1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_0^1 c(x)\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$L_c(v_h) = \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx + \frac{1}{k} \int_{x_0}^{\theta_1} g v_h(x)\, dx\,. \tag{4.5}$$

On définit la norme $\| \quad \|_{h,k}$ par :

$$\|u_h\|_{h,k}^2 = \int_0^1 u_h^2(x)\, dx + \frac{1}{k} \sum_{i=2}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx + \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h^2(x)}{k} dx$$
$$+ \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k} dx + \frac{1}{k} \int_{\theta_1}^{x_1} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx\,. \tag{4.6}$$

On peut énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1 : *On suppose que* $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$; *alors la forme bilinéaire* B_c *et la forme linéaire* L_c *définies par la méthode des caractéristiques convergent respectivement vers la forme bilinéaire* B *et la forme linéaire* L *définies par la méthode de Galerkin discontinue, quand* k *tend vers zéro ; de plus, on a :*

$$\lim_{k \to 0} \|u_h\|_{h,k} = \|u_h\|_h\,. \tag{4.7}$$

Démonstration : On a

$$X^k(x) = x - kb(\phi^{-1}(\eta)) \quad \text{avec} \quad \phi(x) - k < \eta < \phi(x)$$

donc

$$X^k(x) < x, \quad \text{et} \quad \theta(y) = y + kb(\phi^{-1}(\zeta))$$

avec $\phi(y) < \zeta < \phi(y) + k$ donc $\theta(y) > y$. On a alors :

$$\int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(x)}{k} v_h(x)\, dx = \left(\frac{\theta_i - x_{i-1}}{k}\right) \times \frac{\int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h(x)\, v_h(x)\, dx}{\theta_i - x_{i-1}},$$

d'où :

$$\lim_{k \to 0} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(x)}{k} v_h(x)\, dx = b(x_{i-1})\, u_h^+(x_{i-1})\, v_h^+(x_{i-1}). \tag{4.8}$$

De même, on a :

$$\int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx = \int_{X^k(x_{i-1})}^{X^k(\theta_i)} \frac{u_h(y)}{k} v_h(\theta(y))\, \theta'(y)\, dy$$

en outre, on a :

$$X^k(\theta_i) - X^k(x_{i-1}) =$$

$$= (\theta_i - x_{i-1})\, X^{k\prime}(\lambda_i)\ (X^k(x_{i-1}) < \lambda_i < X^k(\theta_i))$$

$$= (\theta_i - x_{i-1}) \frac{d}{dx} \phi^{-1}(\phi(\lambda_i) - k) = (\theta_i - x_{i-1}) \frac{d\phi^{-1}}{dy} (\phi(\lambda_i) - k) \frac{d\phi}{dx}(\lambda_i)$$

$$= (\theta_i - x_{i-1}) \frac{d\phi^{-1}}{dy} (\phi(X^k(\lambda_i))) \frac{d\phi}{dx}(\lambda_i) = kb(\zeta_i) \frac{b(X^k(\lambda_i))}{b(\lambda_i)},$$

or $X^k(\theta_i) = x_{i-1}$ car $\theta_i = \theta(x_{i-1})$, donc si on définit I par :

$$I = \frac{\int_{X^k(x_{i-1})}^{x_{i-1}} u_h(y)\, v_h(\theta(y))\, \theta'(y)\, dy}{x_{i-1} - X^k(x_{i-1})},$$

on a alors :

$$\int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx = \frac{X^k(\theta_i) - X^k(x_{i-1})}{k} I.$$

Or $\quad y = X^k(x) = x - kb(\phi^{-1}(\zeta))$ donc

$$\lim_{k \to 0} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx = b(x_{i-1})\, u_h^-(x_{i-1})\, v_h^+(x_{i-1}) . \tag{4.9}$$

De même, on a :

$$\int_{\theta_i}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx =$$

$$= \int_{\theta_i}^{x_i} \frac{u_h(S(x,t,t)) - u_h(S(x,t,t-k))}{k} v_h(x)\, dx$$

avec :

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{d\tau}(x,t,\tau) = b(S) \\ S(x,t,t) = x \end{cases}$$

donc :

$$\int_{\theta_i}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx =$$

$$= \int_{\theta_i}^{x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \tau}(t) + o(k) \right) v_h(x)\, dx \; [f(\tau) = u_h(S(x,t,\tau))]$$

$$= \int_{\theta_i}^{x_i} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}(x,t,\tau)|_{\tau=t} \frac{\partial u_h}{\partial x}(S(x,t,\tau))|_{\tau=t} + o(k) \right) v_h(x)\, dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b(x)\, u_h'(x) + o(k))\, v_h(x)\, dx ,$$

on a alors :

$$\lim_{k \to 0} \int_{\theta_i}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx = \int_{\theta_i}^{x_i} b(x)\, u_h'(x)\, v_h(x)\, dx . \tag{4.10}$$

En utilisant (4.8), (4.9) et (4.10), on en déduit que :

$$\lim_{k \to 0} B_c(u_h, v_h) = B(u_h, v_h) . \tag{4.11}$$

De même, on a :

$$\lim_{k \to 0} L_c(v_h) = \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx + b(x_0)\, g(x_0)\, v_h(x_0)$$

$$= L(v_h)\,. \tag{4.12}$$

Calculons maintenant la limite de $\| u_h \|_{h,k}$ pour $i = 2, \dots, N$, on a :

$$\frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx = \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx + \frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx\,, \tag{4.13}$$

considérons le premier terme du second membre de (4.13) :

$$\frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx = \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h^2(x)\, dx + \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h^2(X^k(x))\, dx - \frac{2}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h(x)\, u_h(X^k(x))\, dx\,, \tag{4.14}$$

or d'après (4.8) on a :

$$\lim_{k \to 0} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h^2(x)\, dx = b(x_{i-1})\, u_h^{+2}(x_{i-1})\,.$$

En utilisant aussi les mêmes techniques pour démontrer (4.9), on trouve

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} (u_h(X^k(x)))^2\, dx = b(x_{i-1})\, u_h^{-2}(x_{i-1})$$

et de l'égalité (4.9), on a

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} u_h(x)\, u_h(X^k(x))\, dx = b(x_{i-1})\, u_h^{+}(x_{i-1})\, u_h^{-}(x_{i-1})\,,$$

donc, on peut conclure que

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2 \, dx = b(x_{i-1}) \, (u_h^+(x_{i-1}) - u_h^-(x_{i-1}))^2 .$$

Considérons le deuxième terme du second membre de (4.13)

$$\frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2 \, dx = k \int_{\theta_i}^{x_i} \left(\frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} \right)^2 dx ,$$

or d'après les étapes faites pour démontrer (4.10), on a :

$$\int_{\theta_i}^{x_i} \left(\frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} \right)^2 dx = \int_{\theta_i}^{x_i} (b(x) \, u'(x) + o(k))^2 \, dx .$$

Donc, pour $i = 1, \dots, N$ on a :

$$\lim_{k \to 0} \int_{\theta_i}^{x_i} \left(\frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} \right)^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (b(x) \, u'(x))^2 \, dx .$$

On en déduit que le deuxième terme du second membre de (4.13) converge vers 0. De plus près (4.8) et (4.9) on a :

$$\lim_{k \to 0} \int_{\theta_i}^{x_i} \frac{u_h^2(x)}{k} \, dx = u_h^{+\,2}(x_0) \, b(x_0)$$

et

$$\lim_{k \to 0} \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k} \, dx = u_h^{-\,2}(x_N) \, b(x_N) .$$

On a alors :

$$\lim_{k \to 0} \| u_h \|_{h,k} = \| u_h \|_h ,$$

ce qui démontre le Théorème 4.1 ■

Pour démontrer la coercivité de B_c on va utiliser une formule démontrée dans le lemme ci-dessous qu'on appellera formule d'intégration par parties épaisse et suggérée par la formule d'intégration (2.11) utilisée dans la méthode de Galerkin discontinue pour démontrer la coercivité de B.

LEMME 4.1 *(formule d'intégration par parties épaisse) :*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} A'(x)\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{v_h(X^k(x)) - v_h(x)}{k} u_h(X^k(x))\, dx - \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x)) v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$+ \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h(X^k(x)) v_h(X^k(x))}{k} dx . \tag{4.15}$$

Démonstration : On a :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} A'(x)\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(x)}{k} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(x)}{k} dx$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\theta'(x) - 1}{k} u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(x)}{k} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\theta'(x)}{k} u_h(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(x)}{k} dx + \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$= - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(x)}{k} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$+ \int_{\theta_i}^{x_{i-1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx + \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(X^k(x)) - v_h(x)}{k} u_h(X^k(x))\, dx - \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$+ \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx .$$

ce qui démontre (4.15). ∎

THÉORÈME 4.2 : *Sous l'hypothèse* $c - \frac{1}{2}A' \geqslant c_0 > 0$ *on a :*

$$B_c(u_h, u_h) \geqslant C \| u_h \|_{h,k}^2 . \tag{4.16}$$

Démonstration : En appliquant l'égalité (4.4) pour $v_h = u_h$ on a :

$$B_c(u_h, u_h) = \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h^2(x)}{k}\, dx + \int_{x_1}^{1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k}\, u_h(x) dx$$

$$+ \int_{\theta_1}^{x_1} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k}\, u_h(x)\, dx + \int_0^1 c(x)\, u_h^2(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k}\, u_h(x)\, dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h(x) \qquad u_h(X^k(x))}{k}\, dx + \int_0^1 c(x)\, u_h^2(x)\, dx$$

et du lemme 4.1 avec $v_h = u_h$ on déduit

$$B_c(u_h, u_h) = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(c(x) - \frac{1}{2}A'(x) \right) u_h^2(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(- \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx + \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx \right)$$

$$+ \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h(x)\, u_h(X^k(x))}{k}\, dx$$

ce qui se réduit à

$$B_c(u_h, u_h) = \int_0^1 \left(c(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)\right) u_h^2(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\theta_i} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx + \frac{1}{2} \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h(x)\, u_h(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$\int_0^1 \left(c(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)\right) u_h^2(x)\, dx + \frac{1}{2k} \int_{x_0}^{\theta_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

$$+ \frac{1}{2k} \int_{\theta_1}^{x_1} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

$$+ \frac{1}{2k} \sum_{i=2}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

$$- \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx + \frac{1}{2} \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$+ \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h(x)\, u_h(X^k(x))}{k}\, dx\,.$$

On obtient alors après simplification de termes :

$$B_c(u_h, u_h) = \int_0^1 \left(c(x) - \tfrac{1}{2}A'(x)\right) u_h^2(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2k} \int_{x_1}^{1} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\theta_1} \frac{u_h^2(x)}{k}\, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h^2(X^k(x))}{k}\, dx + \frac{1}{2k} \int_{\theta_1}^{x_1} (u_h(x) - u_h(X^k(x)))^2\, dx$$

donc si $c - \frac{1}{2} A'(x) \geqslant c_0 > 0$, on a la coercivitée de B_c par rapport à la norme $\| \quad \|_{h,k}$ ∎

5. MAJORATION D'ERREUR

Pour donner une estimation d'erreur pour la méthode des caractéristiques on va utiliser une autre forme de B_c démontrée dans le Lemme ci-dessous et suggérée par la deuxième expression de B de la méthode de Galerkin discontinue.

LEMME 5.1 : *La forme bilinéaire B_c peut être définie par :*

$$B_c(u_h, v_h) = \int_0^1 (c(x) - A'(x))\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx -$$

$$- \int_{x_1}^1 \frac{v_h(x) - v_h(X^k(x))}{k} u_h(X^k(x))\, dx$$

$$- \int_{\theta_1}^{x_1} \frac{v_h(x) - v_h(X^k(x))}{k} u_h(X^k(x))\, dx$$

$$+ \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k}\, dx\,. \tag{5.1}$$

Démonstration : En appliquant le lemme 4.1 à (P_h^k) on trouve

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (c - A'(x))\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx -$$

$$- \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{v_h(x) - v_h(X^k(x))}{k} u_h(X^k(x))\, dx$$

$$- \int_{x_{i-1}}^{\theta_i} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$+ \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, v_h(x)\, dx\,,$$

en sommant de $i = 1, \ldots, N$ on obtient

$$\int_0^1 (c - A'(x))\, u_h(x)\, v_h(x)\, dx -$$

$$- \int_{x_1}^1 \frac{v_h(x) - v_h(X^k(x))}{k} u_h(X^k(x))\, dx$$

$$- \int_{\theta_1}^{x_1} \frac{v_h(x) - v_h(X^k(x))}{k} u_h(X^k(x))\, dx$$

$$+ \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{u_h(X^k(x))\, v_h(X^k(x))}{k} dx$$

$$= \int_0^1 f(x)\, v_h(x)\, dx + \frac{1}{k} \int_{x_0}^{\theta_1} g v_h(x)\, dx\,. \tag{5.2}$$

En comparant (5.2) avec (P_h^k) on déduit 5.1. ■

LEMME 5.2 : *Si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (P^k) alors on a la relation de consistance forte :*

$$B_c(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \tag{5.3}$$

où u_h est la solution du problème (P_h^k).

Démonstration : Soit $v_h \in V_h$ on a

$$B_c(u_h, v_h) = \frac{1}{k} \int_{x_0}^{\theta_1} u_h(x)\, v_h(x)\, dx + \int_{x_1}^1 \frac{u_h(x) - u_h(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx$$

$$+ \int_{\theta_1}^{x_1} \frac{u(x) - u(X^k(x))}{k} v_h(x)\, dx + \int_0^1 c(x)\, u(x)\, v_h(x)\, dx \tag{5.4}$$

or puisque u est solution du problème continu on a

$$\frac{u(x) - u(X^k(x))}{k} + c(x)\, u(x) = f(x) \tag{5.5}$$

d'où

$$B_c(u_h, v_h) = \frac{1}{k}\int_{x_0}^{\theta_1} u(x)\, v_h(x)\, dx + \int_{x_0}^{\theta_1} c(x)\, u(x)\, v_h(x)\, dx \int_{\theta_1}^{1} f(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{\theta_1} \left(\frac{u(x)}{k} + c(x)\, u(x)\right) v_h(x)\, dx + \int_{\theta_1}^{1} f(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{\theta_1} \left(\frac{u(X^k(x))}{k} + f(x)\right) v_h(x)\, dx + \int_{\theta_1}^{1} f(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{k}\int_{x_0}^{\theta_1} g v_h(x)\, dx + \int_{\theta_1}^{1} f(x)\, v_h(x)\, dx$$

$$= L_c(v_h)$$

donc $B_c(u - u_h, v_h) = 0$. ■

Estimation d'erreur

On rappelle la majoration d'erreur (voir [5]) suivante :

LEMME 5.3 : *Soit $P_h u$ la projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ de u sur V_h, $m = 0, 1$ $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $r \geqslant 0$, alors il existe C indépendante de h telle que :*

$$|u - P_h u|_{m,p,K} \leqslant C h^{r+1-m} |u|_{r+1,p,K}, \quad \forall u \in W^{r+1,p}(K).$$

On peut alors donner une estimation d'erreur *a priori* du problème $P1$ traité par la méthode des caractéristiques.

THÉORÈME 5.1 : *On suppose que $b \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u \in W^{r+1,\infty}(\Omega)$ avec $r \geqslant 0$ et qu'il existe c_0 tel que $c - \frac{1}{2}A' \geqslant c_0 > 0$ alors :*

$$\|u - u_h\|_{h,k} = O\left(h^{r+1} + \frac{h^{r+1}}{\sqrt{k}}\right). \tag{5.6}$$

Démonstration : Soit $P_h u$ la projection orthogonale dans $L^2(\Omega)$ de u sur V_h on a :

$$c\|u_h - P_h u\|_{h,k}^2 \leqslant B_c(u_h - P_h u, u_h - P_h u) = B_c(u - P_h u, u_h - P_h u).$$

D'après (5.1) :

$$B_c(u - P_h u, u_h - P_h u) = \int_0^1 (c - A'(x))(u - P_h u)(u_h - P_h u)\, dx -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} \int_{x_1}^{1} \frac{(u_h - P_h u)(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x))}{k} (u_h - P_h u)(X^k(x))\, dx \tag{5.7}$$

$$- \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{(u_h - P_h u)(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x))}{k} (u_h - P_h u)(X^k(x))\, dx \tag{5.8}$$

$$+ \int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{(u_h - P_h u)(X^k(x))(u_h - P_h u)(X^k(x))}{k}\, dx . \tag{5.9}$$

Si on définit S par

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} (u - P_h u)\,(X^k(x))\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

alors on peut majorer (5.7) par

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\theta_i}^{x_i} \frac{(u_h - P_h u)\,(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x))}{k} (u_h - P_h u)\,(X^k(x))\, dx$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} ((u_h - P_h u)\,(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x)))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} S$$

$$\leqslant \|u_h - P_h u\|_{h,k} S .$$

De même, on définit T par

$$T = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{(u_h - P_h u)^2\,(X^k(x))}{k}\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

alors on peut majorer (5.8) par :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} \frac{(u_h - P_h u)(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x))}{k} (u - P_h u)(X^k(x))\, dx$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k} \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} ((u_h - P_h u)(x) - (u_h - P_h u)(X^k(x)))^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} T$$

$$\leqslant \| u_h - P_h u \|_{h,k} T .$$

Enfin pour (5.9) on a :

$$\int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{(u_h - P_h u)(X^k(x))(u - P_h u)(X^k(x))}{k}\, dx$$

$$\leqslant \left(\int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{(u_h - P_h u)^2 (X^k(x))}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{(u - P_h u)^2 (X^k(x))}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.10}$$

$$\leqslant \| u_h - P_h u \|_{h,k} \left(\int_{x_N}^{\theta_{N+1}} \frac{(u - P_h u)^2 (X^k(x))}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.11}$$

Donc pour estimer $\| u_h - P_h u \|_{h,k}$ il suffit d'estimer les termes A et B pour $i = 1, N$ avec :

$$A = \left(\frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} (u - P_h u)^2 (X^k(x))\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$B = \left(\frac{1}{k} \int_{x_i}^{\theta_{i+1}} (u - P_h u)^2 (X^k(x))\, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Pour A :

$$\left(\frac{1}{k} \int_{\theta_i}^{x_i} (u - P_h u)^2 (X^k(x))\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{X^k(x_i)} (u - P_h u)^2 (x)\, \theta'(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C \left(\frac{1}{k} \int_{x_{i-1}}^{X^k(x_i)} (u - P_h u)^2 (x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{C}{\sqrt{k}} h_K^{r+1} |u|_{r+1,2,K} .$$

Pour B :

$$\left(\frac{1}{k}\int_{x_i}^{\theta_{i+1}} (u - P_h u)^2(X^k(x))\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{k}\int_{X^k(x_i)}^{x_i} (u - P_h u)^2(x)\,\theta'(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|x_i - X^k(x_i)|}{k}\right)^{\frac{1}{2}} |u - P_h u|_{0,\infty}$$

$$\leqslant C\left(\frac{|x_i - X^k(x_i)|}{k}\right)^{\frac{1}{2}} h_K^{r+1}\,|u|_{r+1,\infty,K}\,.$$

Or $\quad x_i - X^k(x_i) = \int_0^k w'(l)\,dl \quad$ avec

$$w(l) = \phi^{-1}(\phi(x_i) - l) = -\,b(\phi^{-1}(\phi(x_i) - l)).$$

On a alors

$$\left(\frac{1}{k}\int_{x_i}^{\theta_{i+1}} (u - P_h u)^2(X^k(x))\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{k}\left|\int_0^k b(\phi(x_i) - l)\,dl\right| h_K^{r+1} |u|_{r+1,\infty,K}\right)$$

$$\leqslant C h_K^{r+1}\,|u|_{r+1,\infty,K}$$

de plus, de la définition de la norme $\|\quad\|_{h,k}$ on a :

$$\|P_h u - u\|_{h,k} \leqslant C\Big(\,|P_h u - u|_{0,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{k}}\,|P_h u - u|_{0,\Omega}\Big)$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{k}\int_{x_i}^{\theta_{i+1}} (P_h u - u)^2(X^k(x))\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{k}\int_{\theta_i}^{x_i} (u - P_h u)^2(X^k(x))\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On conclut donc que l'estimation de $\|P_h u - u\|_{h,k}$ se fait également par A et B. Enfin on a :

$$\|u_h - u\|_{h,k} \leq \|u_h - P_h u\|_{h,k} + \|P_h u - u\|_{h,k} \tag{5.12}$$

on a alors :

$$\|u - u_h\|_{h,k} = O\left(h^{r+1} + \frac{h^{r+1}}{\sqrt{k}}\right) \tag{5.13}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 5.1 : On peut remarquer que la majoration d'erreur est au mieux $O(h^{r+\frac{1}{2}})$ pour $k \leq h$, comme dans la majoration d'erreur donnée par la méthode de Galerkin discontinue [6] et exactement $O(h^{r+\frac{1}{2}})$ pour $k = Ch$.

RÉFÉRENCES

[1] J. BARANGER, D. SANDRI, 1992, *Finite element approximation of viscoelastic fluid flow : existence of solutions and error bounds. I-Discontinuous contraints, Numer. Math,* **63**, pp. 13-27.

[2] J. P. BENQUÉ, G. LABADIE and J. RONAT, 1982, *A new finite element method for Navier Stokes equation coupled with a temperature equation, Proc. 4th. Int. Symp on FEM in flow problems* (Ed. T. Kawai), North-Holland, Amsterdam, pp. 295-301.

[3] A. BERMUDEZ, J. DURANY, 1987, *La méthode des caractéristiques pour les problèmes de convection-diffusion stationnaires, M^2AN,* **21**, n° 1, pp. 7-26.

[4] M. FORTIN, A. FORTIN, *Une note sur les méthodes de caractéristiques et de Lesaint-Raviart pour les problèmes hyperboliques stationnaires, M^2AN,* **23**, n° 4, pp. 593-596.

[5] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, 1986, *Finite element method for Navier Stokes equations, Theory and Algorithms,* Berlin Heidelberg New York, Springer.

[6] C. JOHNSON, J. PITKARANTA, 1987, *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, Math of Comp,* **46**, pp. 1-26.

[7] P. LESAINT, P. A. RAVIART, 1974, *On a finite element method for solving the neutron transport equations,* in *Mathematical aspects of finite element in partial differential equations* (C. de Boor ed.), pp. 89-123. Academic Press.

[8] J. E. MARSDEN and T. J. R. HUGHES, 1983, *Mathematical foundations of Elasticity,* Prentice-Hall.

[9] T. E. PATERSON, *A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, SIAM J. Numer. Anal.,* **26**, pp. 133-140.