

BOUN OUMAR DIA

MICHELLE SCHATZMAN

**Commutateurs de certains semi-groupes
holomorphes et applications aux directions alternées**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
30, n° 3 (1996), p. 343-383

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1996__30_3_343_0

© AFCET, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**COMMUTATEURS DE CERTAINS SEMI-GROUPES HOLOMORPHES
 ET APPLICATIONS AUX DIRECTIONS ALTERNÉES (*)**

Boun Oumar DIA ⁽¹⁾ et Michelle SCHATZMAN ⁽¹⁾

Résumé. — Soient A et B des opérateurs linéaires formels qui ne commutent pas nécessairement entre eux. Des formules de directions alternées d'ordre élevé sont définies au moyen de

$$M_1(t) = \frac{4}{3} e^{tA/4} e^{tB/2} e^{tA/2} e^{tB/2} e^{tA/4} - \frac{1}{3} e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2}$$

$$M_2(t) = \frac{2}{3} (e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2} + e^{tB/2} e^{tA} e^{tB/2}) - \frac{1}{6} (e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA})$$

et au sens des séries formelles

$$(*) \quad \begin{cases} e^{t(A+B)} - M_1(t/n)^n = O(n^{-4}) \\ e^{t(A+B)} - M_2(t/n)^n = O(n^{-3}) \end{cases}$$

Si a, a_0, b et b_0 sont des fonctions strictement positives indéfiniment différentiables de $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ dans \mathbb{R} , définissons des opérateurs A et B par

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - a_0(x_1, x_2); \quad B = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - b_0(x_1, x_2).$$

Les opérateurs A et B engendrent des semi-groupes holomorphes dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ et les estimations suivantes ont lieu en norme d'opérateurs dans $L^2(\mathbb{T}^2)$

$$\|M_1(t)\| = 1 + O(t) \quad \text{et} \quad \|M_2(t)\| = 1 + O(t).$$

De là nous déduisons qu'il existe une constante c telle que

$$\|M_1(t/n)^n\| \leq e^{ct} \quad \text{et} \quad \|M_2(t/n)^n\| \leq e^{ct}$$

et donc les formules (*) sont stables.

(*) Manuscrit reçu le 16 novembre 1994.

⁽¹⁾ Analyse Numérique, Université Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France.
 U.R.A. 740 du C.N.R.S. « Équipe d'Analyse Numérique Lyon-Saint-Etienne ».

Abstract. — *Let A and B be two non necessarily commuting operators. Two high order alternate direction formulae are defined by*

$$M_1(t) = \frac{4}{3} e^{tA/4} e^{tB/2} e^{tA/2} e^{tB/2} e^{tA/4} - \frac{1}{3} e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2}$$

$$M_2(t) = \frac{2}{3} (e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2} + e^{tB/2} e^{tA} e^{tB/2})$$

$$- \frac{1}{6} (e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA})$$

and in the sense of formal series

$$(*) \quad \begin{cases} e^{t(A+B)} - M_1(t/n)^n = O(n^{-4}) \\ e^{t(A+B)} - M_2(t/n)^n = O(n^{-3}) \end{cases}$$

If a , a_0 , b and b_0 are strictly positive and infinitely differentiable from $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ to \mathbb{R} , operators A and B are defined by

$$A = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - a_0(x_1, x_2); \quad B = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - b_0(x_1, x_2).$$

These two operators generate holomorphic semi-groups in $L^2(\mathbb{T}^2)$ and the following estimates hold in operator norm in $L^2(\mathbb{T}^2)$

$$\|M_1(t)\| = O(t) \quad \text{and} \quad \|M_2(t)\| = O(t).$$

Hence, there exists a constant c such that

$$\|M_1(t/n)^n\| \leq e^{ct} \quad \text{and} \quad \|M_2(t/n)^n\| \leq e^{ct},$$

which implies that formulae (*) are stable.

1. INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit une équation d'évolution écrite formellement (c'est-à-dire sans préciser espaces ou domaines) sous la forme

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} = (A + B) u.$$

La décomposition de l'opérateur du second membre sous la forme d'une somme $A + B$ est par exemple une décomposition en directions de différentiation différentes, ou correspond à une décomposition de domaine ou à une décomposition modale. Dans une telle situation, les méthodes de décomposition d'opérateur (splitting) ont été employées depuis de nombreuses années à cause de leurs avantages algorithmiques ; elles consistent à faire numéri-

quement des intégrations séparées avec des pas fractionnaires en A et en B . Notons e^{tA} l'exponentielle formelle de A et e^{tB} l'exponentielle formelle de B . L'étude de l'ordre de méthodes de directions alternées repose sur l'étude de produits

$$(1.2) \quad p(t, \alpha, \beta) = e^{t\alpha_1 A} e^{t\beta_1 B} \dots e^{t\alpha_k A} e^{t\beta_k B} \dots ,$$

où α et β sont des éléments de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, l'espace des suites réelles nulles sauf pour un ensemble fini d'indices. Quand α_j est positif, nous dirons que $e^{t\alpha_j A}$ est une exponentielle à pas positifs. Si tous les pas sont positifs, nous dirons que $p(t, \alpha, \beta)$ est un produit exponentiel à pas positifs.

Il est clair que si A et B engendrent des semi-groupes dans un espace de Banach vérifiant $\|e^{tA}\| \leq e^{\omega t}$ et $\|e^{tB}\| \leq e^{i t}$, tout produit exponentiel à pas positifs conduira à une formule stable, c'est-à-dire

$$\|p(\alpha, \beta, t)\| \leq 1 + Ct ,$$

avec C un nombre réel indépendant de t dans un voisinage de 0.

Il en est de même pour toute combinaison positive de produits exponentiels à pas positifs de la forme

$$\sum_{j=1}^n c^j p(\alpha^j, \beta^j, t) .$$

Malheureusement, l'ordre en temps des combinaisons linéaires à coefficients positifs de produits d'exponentielles à pas positifs est au plus deux, comme l'a montré Q. Sheng [7].

Dans ce même article, Q. Sheng affirme que les autres combinaisons de produits d'exponentielles ne devraient généralement pas être stables.

Nous montrons ici la stabilité de deux combinaisons à coefficients de signe variable de produits d'exponentielles à pas positifs, quand A et B sont des opérateurs de diffusion particuliers avec conditions aux limites périodiques en dimension 2 d'espace.

Plus précisément, soit $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ le tore de dimension 2 et $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables sur \mathbb{T}^2 . Définissons A et B par

$$(1.3) \quad A = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - a_0(x_1, x_2) ,$$

$$(1.4) \quad B = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - b_0(x_1, x_2) ,$$

où les fonctions a, a_0, b et b_0 sont des éléments de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ strictement positifs. Comme $-A$ (respectivement $-B$) est autoadjoint positif dans $L^2(\mathbb{T}^2)$, $-A$ (respectivement $-B$) engendre un semi-groupe holomorphe dans $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Nous considérons les deux combinaisons suivantes de produits d'exponentielles à pas positifs :

$$(1.5) \quad M_1(t) = \frac{4}{3} e^{tA/4} e^{tB/2} e^{tA/2} e^{tB/2} e^{tA/4} - \frac{1}{3} e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2}$$

$$(1.6) \quad M_2(t) = \frac{2}{3} (e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2} + e^{tB/2} e^{tA} e^{tB/2}) - \frac{1}{6} (e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA}).$$

Il a été prouvé dans [6] que, formellement, $M_1(t)$ (resp. $M_2(t)$) est une approximation d'ordre 4 (resp. 3) de $e^{(A+B)t}$, ce qui veut dire que le développement en série formelle de $M_1(t)$ (resp. $M_2(t)$) commence par un terme d'ordre 5 (resp. 4) en t .

Par contre la stabilité de telles expressions pour des opérateurs en dimension infinie est un problème beaucoup plus délicat ; mais cette étude de stabilité est nécessaire pour envisager d'utiliser effectivement en analyse numérique des problèmes d'évolution des schémas basés sur $M_1(t)$ ou $M_2(t)$. Nous avons choisi le cas étudié ici pour les raisons suivantes : les conditions aux limites périodiques simplifient l'analyse fonctionnelle ; le choix d'opérateurs de diffusion permet de se servir des techniques de semi-groupes holomorphes, et les directions alternées, bien qu'un peu académiques de nos jours représentent un problème de base : si nos méthodes marchent pour des directions alternées tout à fait classiques, il n'est pas interdit d'espérer les appliquer dans des cas plus intéressants, tels que la décomposition de domaine, ou la décomposition modale.

Notons la norme d'opérateur dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ comme suit

$$(1.7) \quad \|M\| = \sup_{v \in L^2(\mathbb{T}^2)} \frac{|Mv|_{L^2}}{|v|_{L^2}}.$$

Dans cet article, nous montrons les résultats suivants :

THÉORÈME 1.1 : *Sous les hypothèses ci-dessus sur A et B , il existe des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $t \in [0, 1]$,*

$$(1.8) \quad \|M_1(t)\| \leq 1 + C_1 t, \quad \|M_2(t)\| \leq 1 + C_2 t.$$

Ces résultats sont une conséquence des énoncés suivants :

THÉORÈME 1.2 : *Sous les hypothèses précédentes sur A et B, il existe une constante C telle que pour tout t ∈ [0, 1]*

$$(1.9) \quad \| e^{tA} e^{2tB} e^{tA} - e^{2t(A+B)} \| \leq Ct .$$

THÉORÈME 1.3 : *Sous les hypothèses précédentes sur A et B, il existe une constante C' telle que pour tout t ∈ [0, 1]*

$$(1.10) \quad \| e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA} - 2 e^{t(A+B)} \| \leq C't .$$

L'idée de la démonstration utilise la représentation des semi-groupes homomorphes e^{tA} et e^{tB} au moyen de l'intégrale de Dunford [4]. Nous calculons en utilisant cette représentation l'expression

$$(1.11) \quad \left[\frac{d}{dt} - A - B \right] (e^{tA} e^{2tB} e^{tA} - e^{2t(A+B)}) ,$$

que nous précisons au moyen de théorèmes de commutation entre résolvante et opérateurs différentiels.

Une fois cette partie assez algébrique achevée, nous estimons des normes d'opérateurs $L^2(\mathbb{T}^2)$, en utilisant les relations de domination des opérateurs différentiels d'ordre 4 par $(A+B)^2$. La description qui précède est très simplifiée, mais il est inutile d'entrer dans les détails techniques de la démonstration à ce niveau de l'introduction.

Nous étudions

$$(1.12) \quad \left[\frac{d}{dt} - A - B \right] (e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA} - 2 e^{t(A+B)}) ,$$

au moyen des mêmes techniques.

Afin de mener ces démonstrations dans un cadre commode, nous avons choisi de faire toutes nos opérations algébriques dans l'algèbre $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ des opérateurs linéaires continus de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Ce choix permet d'éviter de décrire les domaines des opérateurs pour chaque produit de résolvantes et d'opérateurs différentiels ; par contre, il impose de préciser les notions de continuité et d'intégrabilité à valeurs dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Comme nous aurons à considérer des intégrales multiples, nous utiliserons l'intégrale des fonctions continues d'un espace métrisable localement compact dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$; le cas des fonctions à support compact, est entièrement couvert au moyen des résultats de [1] et [2] ; le cas des fonctions continues dont toutes les semi-normes sont absolument intégrables se déduit aisément.

Faute de trouver ailleurs des résultats relatifs à la topologie de $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, et aux intégrales à valeurs dans des espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés, nous avons fait appel à [1] et [2] ; il aurait été difficile auparavant d'affirmer que de tels résultats pouvaient avoir des applications tout à fait concrètes.

Cet article est divisé en 3 parties, A, B et C.

Dans la partie A, nous montrons que la fonction $t \rightarrow e^{tA}$ de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ est infiniment différentiable. Pour cela, nous établissons des résultats de commutation entre la résolvante $(\zeta - A)^{-1}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et des opérateurs différentiels : nous définissons des opérateurs sandwich de la forme

$$(\zeta - A)^{-1} D_k (\zeta - A)^{-1} D_{k-1} \dots (\zeta - A)^{-1} D_1 (\zeta - A)^{-1},$$

où D_j est un opérateur différentiel d'ordre au plus 2 en x_j , et à coefficients dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Nous montrons que le commutateur d'un sandwich et de la différentiation ∂_1 ou ∂_2 est une somme de sandwiches. A partir de là, nous calculons le commutateur d'un sandwich et d'un opérateur différentiel quelconque.

Nous estimons la norme d'un sandwich dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^2))$, en fonction de $|\zeta|$, et nous pouvons utiliser la formule de Dunford pour les semi-groupes holomorphes, pour montrer le résultat de régularité annoncé.

Enfin, nous justifions l'emploi d'une formule de Duhamel dans le cadre $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, et nous étudions les propriétés topologiques de la multiplication dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Dans la partie B, nous démontrons les estimations annoncées sur $e^{tA} e^{2tB} e^{tA} - e^{2t(A+B)}$ et sur $e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA} - 2 e^{t(A+B)}$; pour ce faire, nous écrivons $e^{tA} e^{2tB} e^{tA}$ comme le produit de trois intégrales de Dunford sur des chemins différents, et nous calculons au moyen des relations de commutation trouvées précédemment les expressions (1.11) et de façon analogue (1.12). Nous pouvons alors faire les estimations dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^2))$ annoncées ci-dessus.

Enfin, dans la partie C, nous établissons rapidement les propriétés de stabilité énoncées au théorème 1.1.

Dans un travail à paraître [3], des résultats numériques détaillés sur les formules considérées ici seront fournis, y compris l'analyse précise des approximations en temps ; en effet, il est exceptionnel dans la pratique numérique d'approcher des équations d'évolution au moyen d'exponentielles d'opérateurs ; des schémas numériques sont utilisés, ce qui peut modifier les propriétés de stabilité, comme cela sera montré dans [3].

A. PRÉLIMINAIRES FONCTIONNELS

A.1.

Nous notons \mathbb{T}^2 le tore de dimension 2

Soit $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ l'ensemble des fonctions périodiques de période 1 indéfiniment différentiables.

Nous munissons $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ d'une famille de semi-normes $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \quad q_k(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha u|_{L^2}.$$

Nous munissons $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, algèbre des opérateurs continus de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ dans lui-même, des semi-normes suivantes : pour tout entier positif k , pour toute suite réels positifs $M = (M_0, \dots, M_k, \dots)$ appartenant à $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et pour tout opérateur L élément de $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$

$$q_{k, M}(L) = \sup \{q_k(Lu) : q_j(u) \leq M_j \quad \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

Les semi-normes $q_{k, M}$ définissent sur $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ une topologie notée τ .

La norme subordonnée $\| \cdot \|$ définie sur $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, algèbre des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{T}^2)$ dans lui-même, peut s'écrire :

$$\|L\| = \sup \{q_0(Lu) : q_0(u) \leq 1\}.$$

Soient a, a_0, b et b_0 des éléments de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, nous définissons les opérateurs différentiels A et B par

$$(A.1) \quad A = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(a(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \right) - a_0(x_1, x_2), \quad a > 0, a_0 > 0$$

$$(A.2) \quad B = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(b(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - b_0(x_1, x_2), \quad b > 0, b_0 > 0.$$

L'opérateur $-A$ (resp. $-B$) est autoadjoint positif ou nul, il engendre un semi-groupe holomorphe ; notons $P(A)$ (resp. $P(B)$), l'ensemble résolvant de A (resp. B) ; il contient le secteur S_ϵ défini par :

$$(A.3) \quad S_\epsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \leq \pi - \epsilon\}$$

pour tout $\epsilon \in]0, \pi/2[$.

Il existe une constante M_ϵ telle que pour tout $\zeta \in S_\epsilon$,

$$(A.4) \quad \|(\zeta - A)^{-1}\| \leq \frac{M_\epsilon}{|\zeta|} \quad \text{et} \quad \|(\zeta - B)^{-1}\| \leq \frac{M_\epsilon}{|\zeta|}.$$

Rappelons la représentation intégrale de e^{tA} , quand $(-A)$ est générateur d'un semi-groupe holomorphe et $t \in]0, \infty[$.

$$(A.5) \quad e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t} (\zeta - A)^{-1} d\zeta$$

où Γ est un chemin sans fin contenu dans l'intérieur de S_ϵ , et symétrique par rapport à l'axe des réels. De plus on suppose que dans le demi-plan supérieur, Γ est asymptote à la demi-droite Δ_s paramétrée pour $s > 0$, $s \mapsto s \exp(i(\pi - \epsilon))$. Dans cette représentation, l'intégrale est une intégrale de Riemann d'une fonction continue de Γ à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^2))$.

Nous nous proposons dans un premier temps d'étudier la régularité de la fonction $t \mapsto e^{tA}$. A cette fin nous allons d'abord nous intéresser aux opérateurs $(\zeta - A)^{-1}$, $\partial_1^\alpha (\zeta - A)^{-1}$, α dans \mathbb{N}^2 , et aux commutations entre les opérateurs ∂^α et $(\zeta - A)^{-1}$.

Commençons par le résultat de domination suivante :

LEMME A.1 : *Pour tout entier k dans $\{0, 1, 2\}$, l'opérateur ∂_1^k est dominé par $(-A)^{k/2}$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes δ et γ telles que :*

$$(A.6) \quad |\partial_1^k u| \leq \delta |(-A)^{k/2} u| + \gamma |u|; \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Démonstration : Nous allons prouver (A.6) pour chacune des valeurs de l'entier k . Le cas $k = 0$ est trivial.

L'opérateur $(-A)$ est autoadjoint positif, donc l'opérateur $(-A)^{1/2}$ est aussi auto-adjoint [5, chap. IX, § 128].

Pour tout u dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, nous avons :

$$\begin{aligned} |(-A)^{1/2} u|^2 &= ((-A)^{1/2} u, (-A)^{1/2} u) \\ &= (-Au, u). \end{aligned}$$

Or l'hypothèse (A.1) nous montre qu'il existe des constantes c_1 et c_2 telles que :

$$(A.7) \quad c_1 |u|^2 + c_2 |\partial_1 u|^2 \leq (-Au, u).$$

Nous déduisons de l'inégalité ci-dessus que

$$(A.8) \quad |\partial_1 u| \leq c_2^{-1/2} |(-A)^{1/2} u|, \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

L'opérateur A se réécrit $A = a\partial_1^2 + a'\partial_1 - a_0$. Nous voyons qu'il existe une constante c_3 telle que :

$$\begin{aligned} c_3 |\partial_1^2 u| &\leq |Au| + |a'\partial_1 u| + |a_0 u| \\ &\leq |Au| + |a'|_\infty |\partial_1 u| + |a_0|_\infty |u| \\ &\leq |Au| + c_2^{-1/2} |a'|_\infty |(-A)^{1/2} u| + |a_0|_\infty |u|. \end{aligned}$$

Nous savons que $\|(-A)^{-1/2}\|$ est égal au maximum de la fonction $\lambda \mapsto 1/\sqrt{-\lambda}$ sur le spectre de A , $\text{Sp}(A)$ [5, chap. IX, § 128]. Or $\text{Sp}(A)$ est fermé dans \mathbb{R}_- . Donc $(-A)^{-1/2}$ est borné.

Comme $(-A)^{1/2} = (-A)^{-1/2}(-A)$, il est clair que ∂_1^2 est dominé par $-A$.

Ceci termine la démonstration du lemme. ■

A.2. Les sandwichs

DÉFINITION A.2 : Notons $\mathbb{P}_2(x, \partial_1)$ l'espace des opérateurs différentiels en ∂_1 d'ordre au plus 2 à coefficients dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Définissons une classe d'opérateurs sandwich de la façon suivante :

$$S_0 = \{(\zeta - A)^{-1}\}$$

$$\text{et } S_k = \{(\zeta - A)^{-1} D_k C(\zeta), C(\zeta) \in S_{k-1}, D_k \in \mathbb{P}_2(x, \partial_1)\}.$$

Posons
$$S = \bigcup_{k \geq 0} S_k.$$

Remarque A.3 : Pour tout D élément de $\mathbb{P}_2(x, \partial_1)$, les affirmations suivantes sont vraies :

$$(A.9) \quad [\partial_j, D] \text{ est dans } \mathbb{P}_2(x, \partial_1), \quad j = 1, 2$$

$$(A.10) \quad D(-A)^{-1} \text{ est borné.}$$

En effet pour tout γ dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, pour tout α dans \mathbb{N}^2

$$\begin{aligned} [\partial_j, \gamma \partial^\alpha] &= \partial_j \gamma \partial^\alpha - \gamma \partial^\alpha \partial_j \\ &= \gamma_{,j} \partial^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que $[\partial_j, D]$ est obtenu en différentiant en x_j les coefficients de D .

L'affirmation (A.10) découle immédiatement du lemme A.1. ■

Nous allons montrer que si $C(\zeta)$ est dans S alors $\partial^\alpha C(\zeta)$ est une somme finie d'opérateurs $C_{r,\beta}(\zeta) \partial^\beta$, où $C_{r,\beta}(\zeta)$ est un sandwich et $\beta \leq \alpha$.

LEMME A.4 : Soit $C(\zeta)$ un sandwich ; alors il existe des sandwiches $C_r(\zeta)$ tels que

$$(A.11) \quad \partial_j C(\zeta) = \sum_{r=1}^R C_r(\zeta) + C(\zeta) \partial_j.$$

Démonstration : Démontrons ce résultat par récurrence sur k c'est-à-dire sur les éléments de S_k .

Remarquons que si $j = 1$ ou 2 ,

$$\partial_j(\zeta - A)^{-1} = (\zeta - A)^{-1} \partial_j + [\partial_j, (\zeta - A)^{-1}].$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} [\partial_j, (\zeta - A)^{-1}] &= \partial_j(\zeta - A)^{-1} - (\zeta - A)^{-1} \partial_j \\ &= (\zeta - A)^{-1} ((\zeta - A) \partial_j - \partial_j(\zeta - A)) (\zeta - A)^{-1} \\ &= (\zeta - A)^{-1} [\partial_j, A] (\zeta - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc (A.11) est satisfait pour $k = 0$. Soit $k \geq 1$, supposons que (A.11) est vérifié à l'ordre $k - 1$, et calculons $\partial_j C(\zeta)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_j(\zeta - A)^{-1} D_k(\zeta - A)^{-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1} \\ &= (\zeta - A)^{-1} \partial_j D_k(\zeta - A)^{-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1} \\ &\quad + (\zeta - A)^{-1} [\partial_j, A] (\zeta - A)^{-1} D_k \dots D_1(\zeta - A)^{-1} \\ &= (\zeta - A)^{-1} [\partial_j, D_k] (\zeta - A)^{-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1} \\ &\quad + (\zeta - A)^{-1} D_k D_j(\zeta - A)^{-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1} \\ &\quad + (\zeta - A)^{-1} [D_j, A] (\zeta - A)^{-1} D_k(\zeta - A)^{-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons $\tilde{C}(\zeta) = (\zeta - A)^{-1} D_{k-1} \dots D_1(\zeta - A)^{-1}$.

Par hypothèse de récurrence,

$$\partial_j \tilde{C}(\zeta) = \sum_{r=0}^R C_r(\zeta) + \tilde{C}(\zeta) \partial_j$$

par conséquent

$$\partial_j C(\zeta) = (\zeta - A)^{-1} D_{k+1} \tilde{C}(\zeta) + \sum_{r=0}^R (\zeta - A)^{-1} D_k C_r(\zeta) + C(\zeta) \partial_j$$

où $D_{k+1} = [\partial_j, D_k] + [\partial_j, A]$. Or nous savons, grâce à la remarque A.3, que D_{n+1} est dans $\mathbb{P}_2(x, \partial_1)$. ■

Nous déduisons immédiatement le résultat suivant :

COROLLAIRE A.5 : *Les identités suivantes ont lieu :*

$$(A.12) \quad \partial^\alpha (\zeta - A)^{-1} = \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_{r \leq r_\beta} C_r(\zeta) \partial^\beta$$

$$(A.13) \quad (\zeta - A)^{-1} \partial^\alpha = \sum_{\theta \leq \alpha} \sum_{r \leq r_\theta} \partial^\theta \tilde{C}_r(\zeta)$$

où chacun des $C_r(\zeta)$ et des $\tilde{C}_r(\zeta)$ est dans S .

Démonstration : L'identité (A.12) découle immédiatement du lemme A.4 ci-dessus. Celle de (A.13) aussi. En effet il suffit de remarquer que le résultat du lemme A.4 s'écrit aussi :

$$C(\zeta) \partial_j = \partial_j C(\zeta) + \sum_{r=1}^R \tilde{C}_r(\zeta).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque A.6 : Pour tout $C(\zeta)$ dans S , il existe une constante K telle que :

$$\|C(\zeta)\| \leq \frac{K}{|\zeta|}, \quad \forall \zeta \in S_\epsilon.$$

En effet il suffit de se rappeler que l'opérateur $C(\zeta)$ est de la forme

$$(\zeta - A)^{-1} D_1 (\zeta - A)^{-1} \dots D_l (\zeta - A)^{-1}, \quad D_i \in \mathbb{P}_2(x, \partial_1), \quad i = 1, \dots, l$$

que les opérateurs $D_\zeta(\zeta - A)^{-1}$ sont bornés et que $\|(\zeta - A)^{-1}\| \leq M_\epsilon / |\zeta|$. ■

Remarque A.7 : Pour tout multiindice α , il existe une constante C_α telle que :

$$(A.14) \quad |\partial^\alpha(\zeta - A)^{-1} u|_{L^2} \leq \frac{C_\alpha}{|\zeta|} q_{|\alpha|}(u), \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

L'inégalité (A.14) découle immédiatement du corollaire A.5 et de la remarque A.6. ■

A.3. Représentations intégrales

A présent, nous cherchons à obtenir systématiquement une expression intégrale des opérateurs $\partial_t^k \partial^\alpha(e^{tA})$ pour k dans \mathbb{N} , et α dans \mathbb{N}^2 . Afin de prévenir toute difficulté relative aux domaines d'opérateurs, nous allons en fait nous placer dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ et considérer des intégrales de fonctions continues à valeurs dans cet espace.

La topologie τ que nous avons choisie sur $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ est la topologie de la convergence uniforme sur les bornés [1, III, § 3, n° 1]; c'est une \mathcal{S} -topologie [1, III, § 3, n° 1]. L'espace $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ muni des semi-normes q_k est un espace de Fréchet donc tonnelé (corollaire de la proposition 1 de [1, III, § 1, n° 1]). D'après le corollaire 2 du théorème 4 de [1, III, § 3, n° 7], $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ muni de cette topologie est séparé et quasi-complet; cette dernière propriété signifie que les fermés bornés de $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ sont complets. Or il résulte de la définition 3 de [1, III, § 2, n° 5] qu'un espace est quasi-complet si et seulement si l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble précompact est compacte; en particulier, l'enveloppe convexe fermée d'un ensemble compact est compacte, et l'axiome (EC) de la proposition 2 de [2, III, § 4, n° 1] est satisfait. Par conséquent si X est un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ , l'intégrale d'une fonction continue à support compact dans X à valeurs dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ est bien définie, et appartient à $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Par une démonstration facile, si f est une fonction continue de X dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ telle que pour toute semi-norme $q_{k,M}$, $\int_X q_{k,M}(f) d\mu$ est finie, alors $\int_X f d\mu$ est définie et appartient à $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. L'application de ces notions générales permettra donc de définir des intégrales du type

$$\int_\Gamma f(\zeta) d\zeta$$

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$$

et toutes expressions de ce type chaque fois que f sera continue et ses semi-normes $q_{k,M}(f)$ absolument intégrables.

Remarquons que la relation A.14 implique pour tout $\zeta \in P(A)$, $(\zeta - A)^{-1}$ est dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ d'après la définition des semi-normes décrivant la topologie de $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Montrons de plus que $\zeta \mapsto (\zeta - A)^{-1}$ est continu de $P(A)$ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Nous avons l'identité résolvente

$$(\zeta_1 - A)^{-1} - (\zeta_2 - A)^{-1} = (\zeta_2 - \zeta_1) (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - A)^{-1},$$

d'où nous déduisons que pour tout u dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha [(\zeta_1 - A)^{-1} - (\zeta_2 - A)^{-1}] u| &\leq |\zeta_1 - \zeta_2| \frac{C_\alpha}{|\zeta_1|} q_{|\alpha|}((\zeta_2 - A)^{-1} u) \\ &\leq |\zeta_1 - \zeta_2| \frac{C_\alpha}{|\zeta_1|} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \frac{C_\alpha}{|\zeta_2|} q_{|\beta|}(u). \end{aligned}$$

Ceci implique bien la continuité annoncée. Il est immédiat que pour tout $t > 0$ la fonction $\zeta \mapsto e^{\zeta t} (\zeta_1 - A)^{-1}$ est continue de S_ϵ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, et de plus toutes les fonctions $\zeta \mapsto q_{k,M}(e^{\zeta t} (\zeta - A)^{-1})$ sont intégrables sur le chemin Γ .

Donc pour tout $t > 0$ l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t} (\zeta - A)^{-1} d\zeta$$

appartient à $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. De plus, pour $t = 0$, nous savons que dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}^2))$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t} (\zeta - A)^{-1} d\zeta \Big|_{t=0} = 1$$

donc il est immédiat que cette expression est aussi égale à l'identité dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$.

De plus, par un procédé classique d'échange entre intégration en ζ et dérivation ∂^α , l'identité suivante a lieu dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, pour tout $t \geq 0$ et tout multiindice α

$$\partial^\alpha e^{tA} u = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t} \partial^\alpha (\zeta - A)^{-1} u d\zeta.$$

Estimons maintenant $q_{k,M}(e^{tA})$. Par le changement de variable $\zeta t = z$, et par le théorème de Cauchy, tout en utilisant (A.14), nous voyons que

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^z \left(\frac{z}{t} - A\right)^{-1} u \frac{dz}{t}.$$

Par conséquent,

$$|\partial^\alpha e^{tA} u| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\Re z} \frac{C_\alpha}{|z|} q_\alpha(u) dz.$$

De là, nous déduisons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe C'_k tel que pour tout $t > 0$

$$(A.15) \quad q_k(e^{tA} u) \leq C'_k q_k(u).$$

Cette relation est évidemment encore vraie pour $t = 0$.

Nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME A.8 : *La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ muni de la topologie τ .*

Démonstration : Commençons par montrer la continuité sur $]0, \infty[$.

Soient t_0, t_1 et t des réels positifs tels que $t > t_0$ et $t_1 \in]0, t_0[$. Nous déduisons de la relation A.14 que

$$|\partial^\alpha (e^{tA} u - e^{t'A} u)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{t_1 \zeta}| \frac{C_\alpha}{|\zeta|} q_{|\alpha|}(u) d\zeta \max_{z \in \Gamma} |e^{(t-t_1)z} - e^{(t'-t_1)z}|.$$

Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} \frac{|e^{t_1 z}|}{|z|} dz$$

ne dépend ni de t ni de t' . Par conséquent, si

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{|e^{t_1 z}|}{|z|} dz \sum_{|\alpha| \leq k} C_\alpha$$

nous voyons que

$$q_k(e^{tA} u - e^{t'A} u) \leq C(k) \max_{z \in \Gamma} |e^{(t-t_1)z} - e^{(t'-t_1)z}| q_k(u).$$

En particulier, si $q_j(u) \leq M_j$, quelque soit j , nous obtenons

$$q_{k,M}(e^{tA} - e^{t'A}) \leq M_k C(k) \max_{z \in \Gamma} |e^{(t-t_1)z} - e^{(t'-t_1)z}|.$$

Montrons que $e^{(t-t_1)z} - e^{(t'-t_1)z}$ converge vers 0 uniformément en z quand t' tend vers t . Soit $\Gamma_R = B(0, R) \cap \Gamma$. Quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un $R > 0$ tel que, pour tout z dans $\Gamma \cap \Gamma_R$, nous ayons

$$e^{\Re z(t_0-t_1)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Par conséquent pour tout $t' \geq t_0$, et pour tout $z \in \Gamma \setminus \Gamma_R$

$$\begin{aligned} |e^{(t-t_1)z} - e^{(t'-t_1)z}| &\leq e^{\Re z(t-t_1)} + e^{\Re z(t'-t_1)} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Fixons un tel nombre R .

La fonction $(t', z) \mapsto e^{t'z}$ est continue sur le compact $[0, t+1] \times \Gamma_R$, donc uniformément continue, il existe donc un nombre $\eta \in]0, 1]$ tel que si $|t' - t| \leq \eta$, alors pour tout z dans Γ_R

$$|e^{z(t-t_1)} - e^{z(t'-t_1)}| \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, remarquons que pour tout u dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, Au est aussi dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$; donc en vertu de [4, IX, § 1, 3] l'application $t \mapsto e^{tA} u$ est dans $C^1([0, \infty); L^2(\mathbb{T}^2))$ et sa dérivée par rapport à t est

$$\partial_t e^{tA} u = e^{tA} Au.$$

Bien sûr, $e^{tA} Au$ appartient à $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ d'après ce qui précède. Il résulte de (A.15) que pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} q_k(\partial_t e^{tA} u) &= q_k(e^{tA} Au) \\ &\leq C'_k q_k(Au) \\ &\leq \tilde{C}'_k q_{k+2}(u). \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis donne

$$q_k(e^{t'A} u - e^{tA} u) \leq \tilde{C}'_k |t - t'| q_{k+2}(u).$$

Ceci termine la démonstration du théorème A.8. ■

COROLLAIRE A.9 : La fonction $t \mapsto e^{tA}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^+ ; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\partial_t^n e^{tA} &= e^{tA} A^n \\ &= A^n e^{tA}.\end{aligned}$$

Démonstration : Si u est dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, alors u est dans $D(A^n)$, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, et donc la fonction $t \mapsto e^{tA} u$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^+ ; L^2(\mathbb{T}^2))$, d'après [4, IX, § 1, 3] itéré, et

$$\partial_t^n e^{tA} u = A^n e^{tA} u = e^{tA} A^n u.$$

D'après le théorème A.8, la fonction $t \mapsto e^{tA} A^n u$ est dans $C^0(\mathbb{R}^+ ; C^\infty(\mathbb{T}^2))$; de plus d'après (A.15)

$$\begin{aligned}q_k(e^{tA} A^n u) &\leq C'_k q_k(A^n u) \\ &\leq \tilde{C}'_{k,n} q_{k+2n}(u).\end{aligned}$$

Il est immédiat que $\partial_t^n e^{tA}$ appartient à $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ pour tout $t \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Nous pouvons raisonner comme à la fin de la démonstration du théorème A.8 et nous concluons que $t \mapsto e^{tA}$ est bien indéfiniment dérivable à valeurs dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. ■

A.4. Propriétés supplémentaires

Nous aurons également besoin d'une formule de Duhamel dans le cadre que nous venons de mettre en place. Remarquons tout d'abord que si B est dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, et si f est une fonction continue à support compact de l'espace X localement compact et à valeurs dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, alors la proposition 4 de [2, III, § 4, n° 2] implique

$$(A.16) \quad B \int_X f(t) d\mu(t) = \int_X Bf(t) d\mu(t)$$

où μ est une mesure de Radon sur X .

D'autre part, si $f \in C^0([0, T]; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$, $T > 0$, nous avons

$$(A.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(h^{-1} \int_0^h f(s) ds \right) = f(0).$$

En effet

$$\begin{aligned}
 q_{k, M} \left(h^{-1} \int_0^h f(s) ds - f(0) \right) &= q_{k, M} \left(h^{-1} \int_0^h (f(s) - f(0)) ds \right) \\
 &\leq h^{-1} \int_0^h q_{k, M}(f(s) - f(0)) ds
 \end{aligned}$$

or en vertu de la continuité de f en 0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|s| \leq \eta \Rightarrow q_{k, M}(f(s) - f(0)) \leq \epsilon$$

et donc si $h \leq \eta$,

$$q_{k, M} \left(h^{-1} \int_0^h f(s) ds - f(0) \right) \leq h^{-1} \int_0^h \epsilon ds = \epsilon.$$

Ce qui démontre notre assertion. ■

Nous avons également le lemme suivant :

LEMME A.10 : Soit X un espace métrisable, localement compact, et soient f et g des éléments de $C^0(X; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$; alors fg est un élément de ce même espace.

Démonstration : Il est clair que fg prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$; il suffit donc de montrer que pour tout x_0 dans X , $f(x)g(x)$ tend vers $f(x_0)g(x_0)$, quand x tend vers x_0 . Or le corollaire 2 de la proposition 9 de [1, III, § 4, n° 4] permet de conclure que si x_n tend vers x_0 alors $f(x_n)g(x_n)$ tend vers $f(x_0)g(x_0)$ lorsque n tend vers l'infini. Comme X est métrisable et que ceci a lieu pour toute suite x_n tendant vers x_0 , nous pouvons conclure. ■

Nous avons maintenant la formule de Duhamel suivante :

LEMME A.11 : Soit F un élément de $C^0([0, T]; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$. Alors il existe pour tout U_0 dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, une unique solution U dans $C^1([0, T]; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$ du problème

$$(A.18) \quad \begin{cases} \dot{U} = AU + F \\ U(0) = U_0. \end{cases}$$

Cette solution est donnée par

$$U(t) = e^{tA} U_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds.$$

Démonstration : Supposons que U_1 et U_2 sont deux solutions, notons leur différence V , elle satisfait

$$(A.19) \quad \begin{cases} \dot{V} = AV \\ V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))) \end{cases}.$$

Donc en particulier, si $V(t) u_0 = u(t)$ où u_0 est un élément quelconque de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ alors u satisfait

$$(A.20) \quad \begin{cases} \dot{u} = Au \\ u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u \in C^1([0, T]; C^\infty(\mathbb{T}^2)) \end{cases}.$$

Donc, en particulier, $u \in C^1([0, T]; L^2(\mathbb{T}^2))$, et nous pouvons appliquer le théorème classique d'unicité pour (A.20) puisque A engendre un semi-groupe dans $L^2(\mathbb{T}^2)$. Ceci implique que $u(t) = 0$, pour tout t et nous avons l'unicité annoncée.

Si $V(t) = e^{tA}$ le corollaire A.9 implique que V est dans $C^1([0, T]; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$ et V est solution de

$$\begin{cases} \dot{V} = AV \\ V(0) = 1 \end{cases}$$

donc $W(t) = e^{tA} U_0$ satisfait $\dot{W} = AW$ et $W(0) = U_0$.

Posons

$$Z(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds.$$

Cette intégrale est bien définie quel que soit t car $r \mapsto e^{rA}$ est continue de \mathbb{R}^+ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$, donc $s \mapsto e^{(t-s)A}$ est continue de $[0, t]$ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$; par conséquent en vertu du lemme A.10, l'application $s \mapsto e^{(t-s)A} F(s)$ est continue de $[0, t]$ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Montrons que Z est différentiable de \mathbb{R}^+ dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Ce résultat est formellement évident, mais il est nécessaire de l'écrire complètement car, à notre connaissance, il n'est pas dans la littérature sous la forme où nous en avons besoin. Commençons par la différentiabilité à droite. Nous pouvons écrire pour $h > 0$

$$\begin{aligned} h^{-1}(Z(t+h) - Z(t)) &= \\ &= h^{-1} \left(\int_0^{t+h} e^{(t+h-s)A} F(s) ds - \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \left(\int_0^t (e^{hA} - 1) e^{(t-s)A} F(s) ds + \int_t^{t+h} e^{(t+h-s)A} F(s) ds \right). \end{aligned}$$

Or

$$h^{-1} \int_0^t (e^{hA} - 1) e^{(t-s)A} F(s) ds = (e^{hA} - 1) h^{-1} \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds.$$

Posons

$$f(h) = (e^{hA} - 1) h^{-1} \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds.$$

Nous avons, en vertu du lemme A.10,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \int_0^t (e^{hA} - 1) e^{(t-s)A} F(s) ds &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} (e^{hA} - h) h^{-1} \right) \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds \\ &= A \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds. \end{aligned}$$

D'autre part

$$h^{-1} \int_t^{t+h} e^{(t+h-s)A} F(s) ds = h^{-1} \int_0^h e^{(h+\delta)A} F(t+\delta) d\delta$$

et d'après (A.17) cette expression tend vers $F(t)$. Ceci montre la différentiabilité à droite pour $t \geq 0$.

Passons maintenant à la différentiabilité à gauche. Pour $h < 0$

$$\begin{aligned} h^{-1}(Z(t-h) - Z(t)) &= h^{-1} \left(\int_0^{t-h} e^{(t-h-s)A} F(s) ds - \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds \right) \\ &= h^{-1} \int_0^{t-h} (e^{(t-h-s)A} - e^{(t-s)A}) F(s) ds \\ &\quad - h^{-1} \int_{t-h}^t e^{(t-s)A} F(s) ds . \end{aligned}$$

Le premier terme peut se réécrire

$$\begin{aligned} h^{-1} \int_0^{t-h} (1 - e^{hA}) e^{(t-h-s)A} F(s) ds &= \\ &= (1 - e^{hA}) h^{-1} \int_0^{t-h} e^{(t-h-s)A} F(s) ds . \end{aligned}$$

Considérons tout d'abord le terme suivant

$$(1 - e^{hA}) h^{-1} \int_0^{t-h} e^{(t-h-s)A} F(s) ds .$$

La fonction f définie sur le compact

$$X = \{(h, s) : h \geq 0, s \geq 0, h + s \leq t\}$$

par

$$f(h, s) = e^{(t-h-s)A} F(s)$$

est uniformément continue grâce au lemme A.10. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

$$q_{k,M} \left(\int_0^{t-h} f(h,s) ds - \int_0^t f(0,s) ds \right) \leq \int_0^{t-h} q_{k,M}(f(h,s) - f(0,s)) ds + \int_{t-h}^t q_{k,M}(e^{(t-s)A} F(s)) ds .$$

Comme f est uniformément continue sur X , un raisonnement classique montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t-h} q_{k,M}(f(h,s) - f(0,s)) ds = 0 .$$

De plus comme $e^{(t-s)A} F(s)$ est bornée dans $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2))$ pour tout $s \in [0, T]$, la deuxième intégrale est majorée par

$$h \max_{s \in [0, t]} q_{k,M}(e^{(t-s)A} F(s))$$

qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Donc toujours d'après le lemme A.10, nous voyons que

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 - e^{hA}) h^{-1} \int_0^{t-h} e^{(t-h-s)A} F(s) ds = -A \int_0^t e^{(t-s)A} F(s) ds$$

Quand au terme $h^{-1} \int_{t-h}^t e^{(t-s)A} F(s) ds$, il se réécrit

$$h^{-1} \int_0^h e^{sA} F(t-s) ds$$

et d'après (A.17), et le lemme A.10 sa limite est $F(t)$ quand h tend vers 0. Par conséquent, Z est dérivable à gauche en tout $t > 0$, donc Z est dérivable sur $]0, +\infty[$, dérivable en $t = 0$,

$$\dot{Z}(t) = AZ(t) + F(t) .$$

Comme Z et F sont continues, Z est dans $C^1([0, T] ; \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^2)))$.

Ceci termine la démonstration du lemme. ■

B. IDENTITÉS ET RÉSIDUS

Dans cette partie les opérateurs A et B sont ceux définis en (A.1) et (A.2) dans la partie A. Nous nous proposons de prouver au moyen du théorème des résidus diverses identités relatives aux produits de semi-groupes holomorphes.

Nous utiliserons systématiquement la représentation intégrale des opérateurs e^{tA} et e^{tB} . Commençons par établir quelques résultats préliminaires.

LEMME B.1 : Soit C le générateur d'un semi-groupe holomorphe, alors pour tout entier $k > 0$, pour tout $t > 0$, l'identité suivante est vérifiée.

$$(B.1) \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{kt\zeta} (\zeta - C)^{-2} d\zeta = kte^{ktC}.$$

Démonstration : Posons

$$U(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{kt\zeta} (\zeta - C)^{-2} d\zeta.$$

Nous voyons que :

$$\dot{U} - kCU = k \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{kt\zeta} (\zeta - C)^{-1} d\zeta = ke^{ktC}.$$

Par ailleurs si nous effectuons le changement de variable $z = kt\zeta$, nous obtenons

$$U(t) = \frac{k}{2i\pi} \int_{\Gamma_t} e^z \left(\frac{z}{kt} - C \right)^{-2} \frac{dz}{t}, \quad \Gamma_t = kt\Gamma.$$

Le théorème de Cauchy permet de déformer Γ_t en Γ et d'écrire

$$U(t) = \frac{k}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^z \left(\frac{z}{kt} - C \right)^{-2} \frac{dz}{t}.$$

Remarquons qu'il existe une constante M telle que

$$\left\| \left(\frac{z}{kt} - C \right)^{-2} \right\| \leq \frac{(Mkt)^2}{|z|^2}$$

et donc que $U(0) = 0$.

Les opérateurs $U(t)$ et kte^{ktC} vérifient donc l'équation différentielle suivante :

$$(B.2) \quad \begin{cases} \dot{W}(t) - kW(t) = ke^{ktC} \\ W(0) = 0. \end{cases}$$

L'unicité de la solution de (B.2) implique que $U(t) = kte^{ktC}$. Ceci termine la démonstration du lemme. ■

LEMME B.2 : Soit V l'opérateur défini par

$$V(t) = e^{tA} e^{2tB} e^{tA}.$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) - 2(A + B) V(t) &= \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{(\zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3)t} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \end{aligned}$$

où l'opérateur $F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ est défini par :

$$\begin{aligned} F(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= 2(\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_3 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration : Posons

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3); l\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 \quad \text{et} \quad d\zeta = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3.$$

Remarquons que l'opérateur $V(t)$ se réécrit :

$$V(t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{tl\zeta} (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} d\zeta.$$

Il vérifie donc l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) - 2(A + B) V(t) &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{tl\zeta} (\zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 - 2A - 2B) \\ &\quad \times (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} d\zeta. \end{aligned}$$

Posons

$$g(\zeta) = (\zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 - 2A - 2B) (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1}.$$

Nous pouvons écrire autrement $g(\zeta)$, en remarquant que

$$(\zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3 - 2A - 2B) = (\zeta_1 - A) + 2(\zeta_2 - B) + (\zeta_3 - A)$$

d'où

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} + 2(\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad + (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad + 2[\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad + [\zeta_3 - A, (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1}] (\zeta_3 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta) + g_3(\zeta)$$

où les opérateurs $g_1(\zeta)$, $g_2(\zeta)$ et $g_3(\zeta)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} g_1(\zeta) &= (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} + \\ &\quad + 2(\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} + (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} \end{aligned}$$

$$g_2(\zeta) = 2[\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1}$$

$$g_3(\zeta) = [\zeta_3 - A, (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1}] (\zeta_3 - A)^{-1}.$$

Remarquons que

$$(B.3) \quad \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta} g_1(\zeta) d\zeta = 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta} g_1(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1} e^{\zeta_1 t} d\zeta_1 \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_3} e^{(2\zeta_2 + \zeta_3) t} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} d\zeta_2 d\zeta_3 \\ &+ \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_2} e^{2\zeta_2 t} d\zeta_2 \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_3} e^{(\zeta_1 + \zeta_3) t} (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} d\zeta_1 d\zeta_3 \\ &+ \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_3} e^{\zeta_3 t} d\zeta_3 \times \\ &\times \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{(\zeta_1 + 2\zeta_2) t} (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned}$$

Or en vertu du théorème de Cauchy les nombres complexes $\int_{\Gamma_1} e^{\zeta_1 t} d\zeta_1$, $\int_{\Gamma_2} e^{\zeta_2 t} d\zeta_2$ et $\int_{\Gamma_3} e^{\zeta_3 t} d\zeta_3$ sont nuls. Ce qui justifie bien (B.3).

Regardons à présent de plus près les opérateurs $g_2(\zeta)$ et $g_3(\zeta)$. Les identités formelles suivantes sont faciles à vérifier :

(B.4) $[CD, E] = C[D, E] + [C, E] D$

(B.5) $[C, (\zeta - D)^{-1}] = C(\zeta - D)^{-1} - (\zeta - D)^{-1} C$
 $= (\zeta - D)^{-1} ((\zeta - D) C - C(\zeta - D)) (\zeta - D)^{-1}$
 $= (\zeta - D)^{-1} [C, D] (\zeta - D)^{-1}.$

Nous déduisons de (B.4) et (B.5) les identités suivantes :

(B.6) $[\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] = (\zeta_1 - A)^{-1} [A, B] (\zeta_1 - A)^{-1}$

(B.7) $[\zeta_3 - A, (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1}]$
 $= (\zeta_1 - A)^{-1} [\zeta_3 - A, (\zeta_2 - B)^{-1}] + [\zeta_3 - A, (\zeta_1 - A)^{-1}] (\zeta_2 - B)^{-1}$
 $= -(\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} [A, B] (\zeta_2 - B)^{-1}.$

Nous allons maintenant commuter, dans les expressions ci-dessus, $[A, B]$ avec les opérateurs $(\zeta_1 - A)^{-1}$ et $(\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} [(\zeta_1 - A)^{-1}, [A, B]] &= (\zeta_1 - A)^{-1}[A, B] - [A, B](\zeta_1 - A)^{-1} \\ \text{(B.8)} \quad &= (\zeta_1 - A)^{-1}[[A, B], \zeta_1 - A](\zeta_1 - A)^{-1} \\ &= (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B.9)} \quad [(\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}, [A, B]] \\ &= (\zeta_1 - A)^{-1}[(\zeta_2 - B)^{-1}, [A, B]] + [(\zeta_1 - A)^{-1}, [A, B]](\zeta_2 - B)^{-1} \\ &= (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[B, [A, B]](\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad + (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \text{(B.10)} \quad [\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] &= \\ &= [A, B](\zeta_1 - A)^{-2} + (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B.11)} \quad [\zeta_3 - A, (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}] &= -[A, B](\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[B, [A, B]](\zeta_2 - B)^{-2} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2}. \end{aligned}$$

Des calculs précédents nous obtenons les expressions suivantes des opérateurs $g_2(\zeta)$ et $g_3(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \text{(B.12)} \\ g_2(\zeta) &= 2[A, B](\zeta_1 - A)^{-2}(\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad + 2(\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-2}(\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_3 - A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B.13)} \\ g_3(\zeta) &= -[A, B](\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[B, [A, B]](\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]](\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$p(\zeta) = 2[A, B] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1} - [A, B] (\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_3 - A)^{-1} .$$

Nous voyons que pour conclure, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta} p(\zeta) d\zeta = 0 .$$

Or, en vertu du lemme B.1, nous avons :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} e^{\zeta_1 t} (\zeta_1 - A)^{-2} d\zeta_1 = t e^{tA} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} e^{2\zeta_2 t} (\zeta_2 - B)^{-2} d\zeta_2 = 2 t e^{2tB} .$$

Par conséquent,

$$\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta} p(\zeta) d\zeta = -2 t [A, B] e^{tA} e^{2tB} e^{tA} + 2 t [A, B] e^{tA} e^{2tB} e^{tA} = 0 .$$

Ceci termine la démonstration du lemme B.2. ■

LEMME B.3 : Soit W l'opérateur défini par

$$W(t) = e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA} .$$

Alors nous avons :

$$\dot{W}(t) - (A + B) W(t) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{(\zeta_1 + \zeta_2) t} K(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2$$

où l'opérateur $K(\zeta_1, \zeta_2)$ est défini par :

$$K(\zeta_1, \zeta_2) = [A, B] ((\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1}) + (\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} + (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1} .$$

Démonstration : Nous allons utiliser la même technique de démonstration qu'au lemme B.2.

Posons $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $r\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ et $d\zeta = d\zeta_1 d\zeta_2$.

L'opérateur $W(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) - (A + B) W(t) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{tr\zeta} (\zeta_1 + \zeta_2 - A - B) \\ &\quad \times ((\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad + (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_1 - A)^{-1}) d\zeta. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} q(\zeta) &= (\zeta_1 + \zeta_2 - A - B) ((\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} + \\ &\quad + (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_1 - A)^{-1}). \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire $q(\zeta)$ comme suit, en utilisant les commutations là où il faut

$$\begin{aligned} q(\zeta) &= 2(\zeta_1 - A)^{-1} + 2(\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad + [\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] (\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad + [\zeta_1 - A, (\zeta_2 - B)^{-1}] (\zeta_1 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$q(\zeta) = q_1(\zeta) + q_2(\zeta) + q_3(\zeta)$$

où les opérateurs $q_j(\zeta)$, $j \in \{1, 2, 3\}$, sont donnés par

$$\begin{aligned} q_1(\zeta) &= 2(\zeta_2 - B)^{-1} + 2(\zeta_1 - A)^{-1} \\ q_2(\zeta) &= [\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] (\zeta_2 - B)^{-1} \\ q_3(\zeta) &= [\zeta_1 - A, (\zeta_2 - B)^{-1}] (\zeta_1 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

De même que dans la démonstration du lemme B.2, il vient

$$(B.14) \quad \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{tr\zeta} q_1(\zeta, \cdot) d\zeta = 0.$$

Regardons à présent de plus près les opérateurs $q_2(\zeta)$ et $q_3(\zeta)$. Nous avons :

$$(B.15) \quad [\zeta_2 - B, (\zeta_1 - A)^{-1}] = (\zeta_1 - A)^{-1} [A, B] (\zeta_1 - A)^{-1}$$

$$(B.16) \quad [\zeta_1 - A, (\zeta_2 - B)^{-1}] = -(\zeta_2 - B)^{-1} [A, B] (\zeta_2 - B)^{-1}.$$

Nous allons maintenant commuter, dans les expressions ci-dessus, $[A, B]$ avec les opérateurs $(\zeta_1 - A)^{-1}$ et $(\zeta_2 - B)^{-1}$. Nous obtenons comme dans le cas du lemme B.2

$$(B.17) \quad [(\zeta_1 - A)^{-1}, [A, B]] = (\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-1}$$

$$(B.18) \quad [(\zeta_2 - B)^{-1}, [A, B]] = (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-1}.$$

Des calculs précédents nous obtenons les expressions suivantes des opérateurs $q_2(\zeta)$ et $q_3(\zeta)$:

$$(B.19) \quad q_2(\zeta) = [A, B] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} + (\zeta_1 - A)^{-2} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1}$$

$$(B.20) \quad q_3(\zeta) = -[A, B] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_3 - A)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1}.$$

Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de poser

$$K(\zeta) = q_2(\zeta) + q_3(\zeta).$$

Ceci termine la démonstration du lemme B.3. ■

C. ESTIMATIONS

Nous commençons cette partie par quelques remarques dont nous aurons besoin dans la suite.

LEMME C.1 : *Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout entier k dans $\{0, 1, 2\}$, pour toute fonction f dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, il existe des constantes $c(\epsilon, k, f)$ et $\tilde{c}(\epsilon, k, f)$ telles que*

$$(C.1) \quad \forall \zeta \in S_\epsilon, \quad \|f \partial_1^k (\zeta - A)^{-1}\| \leq c(\epsilon, k, f) |\zeta|^{-1+k/2}$$

$$(C.2) \quad \forall \zeta \in S_\epsilon, \quad |\zeta| > 1, \quad \|(\zeta - A)^{-1} f \partial_1^k\| = \tilde{c}(\epsilon, k) |\zeta|^{-1+k/2}.$$

Démonstration : Commençons par prouver (C.1) en considérant chaque valeur de k prise dans $\{0, 1, 2\}$.

Si k est nul, (C.1) se réduit à l'estimation (A.4).

Par ailleurs nous pouvons écrire

$$f \partial_1^k (\zeta - A)^{-1} = f \partial_1^k (-A)^{-k/2} (-A)^{k/2} (\zeta - A)^{-1}.$$

Le lemme A.1 nous montre que l'opérateur $f \partial_1^k (-A)^{-k/2}$ est borné. Donc pour vérifier (C.1), il suffit de montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\|(-A)^{k/2} (\zeta - A)^{-1}\| \leq c |\zeta|^{-1+k/2}.$$

Si $k = 2$, (C.1) est immédiat. En effet :

$$(-A) (\zeta - A)^{-1} = (\zeta - A) (\zeta - A)^{-1} - \zeta (\zeta - A)^{-1}.$$

Nous en déduisons, grâce à l'estimation (A.4) que :

$$\begin{aligned} \|(-A) (\zeta - A)^{-1}\| &\leq 1 + \|\zeta (\zeta - A)^{-1}\| \\ &\leq 1 + M_\epsilon. \end{aligned}$$

Étudions à présent, lorsque $k = 1$, l'opérateur $(-A)^{1/2} (\zeta - A)^{-1}$.

Soient les fonctions $w(\lambda, \zeta)$ et $v(\lambda, \zeta)$ définies sur $\mathbb{R}^- \times S_\epsilon$ par

$$\begin{aligned} w(\lambda, \zeta) &= \frac{(-\lambda)^{1/2}}{\zeta - \lambda} \\ v(\lambda, \zeta) &= \left| \frac{\lambda}{\zeta} \right|^{1/2} \left| 1 - \frac{\lambda}{\zeta} \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Nous savons que

$$(-A)^{1/2} (\zeta - A)^{-1} = \int_{-\infty}^0 w(\lambda, \zeta) dE_\lambda$$

où $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille spectrale associée à l'opérateur $-A$ [5, chap. IX, § 128], et que $\|(-A)^{1/2} (\zeta - A)^{-1}\|$ est égal au maximum de $|w(\lambda, \zeta)|$ sur \mathbb{R}^- .

Donc, il nous suffit de montrer qu'il existe une constante \tilde{c}

$$(C.3) \quad |w(\lambda, \zeta)| \leq \tilde{c} |\zeta|^{-1/2}.$$

Or nous voyons que

$$|w(\lambda, \zeta)| = |\zeta|^{-1/2} v(\lambda, \zeta).$$

Par conséquent il nous reste à montrer que $v(\lambda, \zeta)$ est borné.

A cette fin, commençons par vérifier qu'il existe une constante c_0 , strictement positive telle que :

$$(C.4) \quad \left| 1 - \frac{\lambda}{\zeta} \right| \geq c_0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^-, \quad \forall \zeta \in S_\epsilon.$$

Rappelons que pour tout ζ dans S_ϵ nous avons $|\arg(\zeta)| < \pi - \epsilon$. Donc, il est clair que pour tout (λ, ζ) dans $\mathbb{R}^- \times S_\epsilon$, l'encadrement suivant a lieu

$$\epsilon < \left| \arg\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right) \right| \leq \pi.$$

Ceci implique qu'il existe une constante c_0 telle que l'inégalité (C.4) soit satisfaite.

Posons $z = \lambda/\zeta$. Nous voyons que

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \sqrt{|z|} |1 - z|^{-1} = 0.$$

Par conséquent, il existe une constante C telle que :

$$|\lambda/\zeta| > C \Rightarrow v(\lambda, \zeta) \leq 1$$

$$|\lambda/\zeta| \leq C \Rightarrow v(\lambda, \zeta) \leq \sqrt{C}c_0.$$

Donc la fonction $v(\lambda, \zeta)$ est bornée sur $\mathbb{R}^- \times S_\epsilon$.

Vérifions à présent l'estimation (C.2).

En vertu de (A.13), l'opérateur $(\zeta - A)^{-1} \partial_1^k$ se réécrit :

$$(\zeta - A)^{-1} \partial_1^k \sum_{j=0}^k \sum_{r \leq r_j} \partial_1^j C_r(\zeta)$$

où les $C_r(\zeta)$ sont des sandwiches définis en A.2. Rappelons qu'un sandwich est de la forme

$$(\zeta - A)^{-1} D_1 (\zeta - A)^{-1} \dots D_l (\zeta - A)^{-1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, l\}, \quad D_i \in \mathbb{P}_2(x, \partial_1).$$

Le lemme A.1 nous montre que pour tout i dans $\{1, \dots, l\}$ l'opérateur $D_i(\zeta - A)^{-1}$ est borné. Donc il découle de (C.1) que pour tout $j \leq k$ et pour tout $r \leq r_j$, il existe une constante $K(j, r)$ telle que

$$\|\partial_1^j C_r(\zeta)\| \leq K(j, r) |\zeta|^{-1+j/2}.$$

Si de plus $|\zeta|$ est supérieur à 1, il est clair que

$$\|\partial_1^j C_r(\zeta)\| \leq K(j, r) |\zeta|^{-1+k/2}.$$

Ceci termine la démonstration du lemme C.1. ■

COROLLAIRE C.2 : *Pour tout ζ dans S_ϵ tel que $|\zeta| > 1$, pour tout k dans $\{0, \dots, 4\}$ et pour tous $C(\zeta)$ et $\tilde{C}(\zeta)$ dans S , il existe une constante $c(k)$ telle que*

$$(C.5) \quad \|C(\zeta) d_k \partial_1^k \tilde{C}(\zeta)\| \leq c(k) |\zeta|^{-2+k/2}$$

où d_k est dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Démonstration : Pour prouver (C.5), il suffit de se rappeler qu'un élément $C(\zeta)$ de S est de la forme :

$$(\zeta - A)^{-1} D_1(\zeta - A)^{-1} \dots D_l(\zeta - A)^{-1}$$

et, d'utiliser le lemme A.1 et le lemme C.1. ■

Remarque C.3 : Pour tout entier k positif et pour $j \in \{1, 2\}$, nous avons :

$$\partial_j^k (\zeta - A)^{-2} = \sum_{r \in I_r, s \in J_r, l \leq k} C_r(\zeta) C_s(\zeta) \partial_j^l$$

où $C_r(\zeta), C_s(\zeta)$, sont des sandwiches établis dans la définition A.2 ; I_l et J_l sont des ensembles finis d'indices dépendant de k .

En effet le corollaire A.5, nous montre que

$$(C.6) \quad \partial_j^k (\zeta - A)^{-1} \leq \sum_{l \leq k, r \leq r_l} C_r(\zeta) \partial_j^l$$

nous voyons donc

$$\partial_j^k (\zeta - A)^{-2} = \sum_{l \leq k, r \leq r_l} C_r(\zeta) \partial_j^l (\zeta - A)^{-1}.$$

Il suffit de remplacer $\partial_j^l (\zeta - A)^{-1}$ par une expression du type (C.6) pour obtenir le résultat voulu. ■

Notation C.4 : Pour tous entiers k, l et m , notons par $\mathcal{A}(l, k, m)$ l'ensemble de multi-indices défini par :

$$\mathcal{A}(l, k, m) = \{ \alpha \in \mathbb{N}^2, \alpha_1 \leq l, \alpha_2 \leq k, \text{ et } |\alpha| \leq m \}.$$

Nous avons le résultat suivant.

LEMME C.5 : Soient A et B les opérateurs définis en (A.1) et (A.2), nous avons les expressions suivantes :

$$(C.7) \quad [A, [A, B]] = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(4, 2, 4)} d_\alpha \partial^\alpha, \text{ avec } d_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$$

$$(C.8) \quad [B, [A, B]] = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(2, 4, 4)} \bar{d}_\alpha \partial^\alpha, \text{ avec } \bar{d}_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Démonstration : Remarquons en premier lieu que, pour tous multiindices α et β dans \mathbb{N}^2 , et pour toutes fonctions a et b dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, nous avons la formule suivante :

$$(C.9) \quad [a \partial^\alpha, b \partial^\beta] = \sum_{\theta \leq \alpha, \bar{\theta} \leq \beta, |\theta + \bar{\theta}| \leq |\alpha + \beta| - 1} d_{\theta, \bar{\theta}} \partial^{\theta + \bar{\theta}}$$

où les fonctions $d_{\theta, \bar{\theta}}$ sont dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. En effet

$$(C.10) \quad [a \partial^\alpha, b \partial^\beta] = a \partial^\alpha b \partial^\beta - b \partial^\beta a \partial^\alpha.$$

Or il est immédiat de voir, en utilisant deux fois la formule de Leibniz, que

$$a \partial^\alpha b \partial^\beta = \sum_{\theta \leq \alpha} C_\alpha^\theta a(\partial^{\alpha - \theta} b) \partial^\theta, \quad C_\alpha^\theta = C_{\alpha_1}^{\theta_1} C_{\alpha_2}^{\theta_2}$$

par ailleurs il est clair que le terme $ab \partial^{\alpha + \beta}$ est supprimé dans l'identité (C.10). Ceci justifie l'expression (C.9).

Remarquons aussi que les opérateurs A et B se réécrivent comme suit :

$$A = \sum_{l=0}^2 a_l \partial_1^l; \quad B = \sum_{k=0}^2 b_k \partial_2^k$$

où les fonctions a_l et b_k sont dans $C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Ainsi nous voyons qu'il suffit d'utiliser successivement la formule (C.9) dans les crochets $[A, [A, B]]$ et $[B, [A, B]]$ pour obtenir les résultats voulus. Ceci termine la démonstration du lemme. ■

COROLLAIRE C.6 : Soit $U(t)$ l'opérateur défini par

$$U(t) = e^{tA} e^{2tB} e^{tA} - e^{2t(A+B)},$$

l'estimation suivante a lieu

$$(C.11) \quad \|U(t)\| = O(t).$$

Démonstration : Soit $V(t)$ et $F(z_1, z_2, z_3)$ les opérateurs définis dans le cadre du lemme B.2. Posons $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, $l\zeta = \zeta_1 + 2\zeta_2 + \zeta_3$ et $d\zeta = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$. Nous remarquons que :

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) - 2(A+B)U(t) &= \dot{V}(t) - 2(A+B)V(t) \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{l\zeta t} F(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Posons

$$H(t) = \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{l\zeta t} F(\zeta) d\zeta.$$

Nous voyons que l'opérateur $U(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{U}(t) - 2(A+B)U(t) = H(t) \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $t \rightarrow H(t)$ peut se mettre sous la forme

$$H(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)$$

où les fonctions $h_i(t)$ sont des produits finis des éléments de $C^0([0, +\infty[, C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Le lemme A.10 nous montre que les fonctions $h_i(t)$, et donc $H(t)$, appartiennent à $C^0([0, +\infty[, C^\infty(\mathbb{T}^2))$. Par conséquent nous avons, en vertu du lemme A.11,

$$U(t) = \int_0^t e^{2(t-s)(A+B)} H(s) ds.$$

Comme l'opérateur $e^{2(t-s)(A+B)}$ est borné, il nous reste à montrer que

$$\|H(s)\| = O(1).$$

Nous avons vu dans le lemme B.2 que

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= 2(\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2}(\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &= 2(\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2}(\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ p_2(\zeta) &= -(\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1} \\ p_3(\zeta) &= -(\zeta_1 - A)^{-1}[A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-2}(\zeta_3 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

L'opérateur $H(s)$ se réécrit :

$$H(s) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta t} p_j(\zeta) d\zeta.$$

Nous allons montrer que pour tout j dans $\{1, 2, 3\}$, l'estimation suivante a lieu :

$$\left\| \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta t} p_j(\zeta) d\zeta \right\| = O(1).$$

Commençons par l'opérateur $p_1(\zeta)$.

En utilisant le lemme C.5, nous avons l'expression suivante de l'opérateur $p_1(\zeta)$:

$$p_1(\zeta) = 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(4, 2, 4)} (\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial^\alpha (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_3 - A)^{-1}.$$

La remarque C.3 nous montre que l'opérateur

$$(\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial^\alpha (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1}$$

se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial^\alpha (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} \\ &= \sum_{k \leq \alpha_2, i \in I_k, j \in J_k} (\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial_1^{\alpha_i} C_i(\zeta) C_j(\zeta) \partial_2^k (\zeta_2 - B)^{-1}. \end{aligned}$$

Comme le multiindice α est dans $\mathcal{A}(4, 2, 4)$, nous avons $\alpha_1 \leq 4$ et $\alpha_2 \leq 2$. Par conséquent nous déduisons du lemme C.1 et du corollaire C.2 qu'il existe des constantes $c_{\alpha_1}(r)$ et $c_k(j)$ telles que

$$\begin{aligned} \left\| (\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial_1^{\alpha_i} C_r(\zeta_1) \right\| &\leq c_{\alpha_1}(r) |\zeta_1|^{-2 + \alpha_1/2} \\ \left\| \partial_2^k (\zeta_2 - B)^{-1} \right\| &\leq c_k |\zeta_2|^{-1 + k/2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante c_α telle que

$$\left\| (\zeta_1 - A)^{-1} d_\alpha \partial^\alpha (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} \right\| \leq c_\alpha \sum_{k \leq \alpha_2} |\zeta_1|^{-3 + \alpha_1/2} |\zeta_2|^{-1 + k/2}$$

donc, nous avons l'estimation suivante :

$$\|p_1(\zeta)\| \leq \tilde{c} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(4, 2, 4)} |\zeta_1|^{-3 + \alpha_1/2} |\zeta_2|^{-1 + \alpha_2/2} |\zeta_3|^{-1}.$$

Si nous faisons le changement de variables $\omega = t\zeta$, $\|p_1(\zeta)\|$ se réécrit :

$$\|p_1(\omega/t)\| \leq \tilde{c} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(4, 2, 4)} t^{5 - |\alpha|/2} |\omega_1|^{-3 + \alpha_1/2} |\omega_2|^{-1 + \alpha_2/2} |\omega_3|^{-1}.$$

Nous voyons que pour t assez petit, $\|p_1(\omega/t)\|$ est de la forme :

$$\|p_1(\omega/t)\| \leq t^3 g(\omega)$$

où la fonction $g(\omega)$ est donnée par

$$g(\omega) = \tilde{c} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(4, 2, 4)} |\omega_1|^{-3 + \alpha_1/2} |\omega_2|^{-1 + \alpha_2/2} |\omega_3|^{-1}.$$

Dans ces conditions il est immédiat de voir que nous avons effectivement :

$$\left\| \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{t\zeta} p_1(\zeta) d\zeta \right\| = O(1).$$

En réitérant le même raisonnement nous avons aussi :

$$\left\| \frac{1}{(2i\pi)^3} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3} e^{i\zeta t} p_j(\zeta) d\zeta \right\| = O(1), \quad \text{pour } j = 1 \text{ ou } 2.$$

Finalement nous voyons que $\|H(t)\| = O(1)$ sur $[0, 1]$.

Ceci termine la démonstration du corollaire C.6. ■

COROLLAIRE C.7 : Soit $R(t)$ l'opérateur défini par $R(t) = e^{tA} e^{tB} + e^{tB} e^{tA} - 2 e^{t(A+B)}$, l'estimation suivante a lieu

$$(C.12) \quad \|R(t)\| = O(t).$$

Démonstration : Soit $W(t)$ et $K(z_1, z_2)$ les opérateurs définis dans le cadre du lemme B.3. Remarquons que

$$\begin{aligned} \dot{R}(t) - (A + B) R(t) &= \dot{W}(t) - (A + B) W(t) \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{(\zeta_1 + \zeta_2)t} K(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned}$$

Posons

$$Z(t) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{(\zeta_1 + \zeta_2)t} K(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2.$$

L'opérateur $R(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) - (A + B) R(t) = Z(t) \\ R(0) = 0. \end{cases}$$

Donc nous avons

$$R(t) = \int_0^t e^{(t-s)(A+B)} Z(s) ds.$$

Pour avoir (C.12), il nous suffit, comme dans le cas du corollaire C.6, de montrer que pour tout t dans $[0, 1]$,

$$\|Z(t)\| = O(1).$$

Rappelons que $k(\zeta_1, \zeta_2)$ a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} K(\zeta_1, \zeta_2) &= [A, B] \left((\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1} \right) \\ &\quad + (\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} \\ &\quad - (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} q_1(\zeta_1, \zeta_2) &= [A, B] \left((\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1} \right) \\ q_2(\zeta_1, \zeta_2) &= (\zeta_1 - A)^{-1} [A, [A, B]] (\zeta_1 - A)^{-2} (\zeta_2 - B)^{-1} \\ q_3(\zeta_1, \zeta_2) &= (\zeta_2 - B)^{-1} [B, [A, B]] (\zeta_2 - B)^{-2} (\zeta_1 - A)^{-1}. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques que celles utilisées dans la démonstration du corollaire C.6, nous vérifions sans difficultés que pour $i = 2, 3$

$$\left\| \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{t(\zeta_1 + \zeta_2)} q_i(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \right\| = O(1).$$

Regardons à présent l'opérateur $q_1(\zeta_1, \zeta_2)$.

En vertu du lemme B.1, nous remarquons que

$$\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{t(\zeta_1 + \zeta_2)} q_1(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = t[A, B] (e^{tA} e^{tB} - e^{tB} e^{tA}).$$

Si nous exprimons $[A, B] (e^{tA} e^{tB} - e^{tB} e^{tA})$ au moyen des intégrales de Dunford, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [A, B] (e^{tA} e^{tB} - e^{tB} e^{tA}) &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} e^{t(\zeta_1 + \zeta_2)} [A, B] \times \\ &\quad \times \left((\zeta_1 - A)^{-1} (\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-1} (\zeta_1 - A)^{-1} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned}$$

Or l'opérateur $(\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_1 - A)^{-1}$ se réécrit :

$$(\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_1 - A)^{-1} = (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1}[A, B](\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_1 - A)^{-1}.$$

Par conséquent, en utilisant la notation C.4, nous obtenons l'expression suivante

$$[A, B] ((\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1} - (\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_1 - A)^{-1}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}(2, 2, 3)} \sum_{\beta \in \mathcal{A}(2, 2, 3)} d_\alpha \partial^\alpha (\zeta_1 - A)^{-1}(\zeta_2 - B)^{-1} \tilde{d}_\beta \partial^\beta (\zeta_2 - B)^{-1}(\zeta_1 - A)^{-1}$$

où d_α et \tilde{d}_β sont des éléments de $C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

Il suffit de commuter là où il faut, d'utiliser le lemme C.1 et le corollaire C.2, et d'effectuer le changement de variable $\omega_i = t\zeta_i$, $i = 1, 2$, pour voir qu'il existe une constante k telle que

$$\| [A, B] (e^{tA} e^{tB} - e^{tB} e^{tA}) \| \leq K/t.$$

L'inégalité ci-dessus implique que

$$\left\| \int_{r_1 \times r_2} e^{t(\zeta_1 + \zeta_2)} q_1(\zeta_1 + \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \right\| \leq K.$$

Ceci termine la démonstration du corollaire C.7. ■

Nous allons maintenant montrer la stabilité des formules $M_1(t)$ et $M_2(t)$ définies respectivement en (1.5) et (1.6). Nous avons le résultat suivant :

LEMME C.8 : *Il existe des constantes c_1 et c_2 telles que pour tout t dans $[0, 1[$, les estimations suivantes ont lieu*

$$(C.13) \quad \|M_1(t)\| \leq 1 + c_1 t$$

$$(C.14) \quad \|M_2(t)\| \leq 1 + c_2 t.$$

Démonstration : Si nous gardons les notations du corollaire C.6, nous voyons que :

$$M_1(t) = \frac{4}{3} (U(t/4) + e^{t(A+B)/2})^2 - \frac{1}{3} (U(t/2) + e^{t(A+B)}).$$

Posons

$$S(t) = \frac{4}{3}(U(t/4)^2 + U(t/4) e^{t(A+B)/2} + e^{t(A+B)/2} U(t/4)) - \frac{1}{3} U(t/2).$$

Donc la formule $M_1(t)$ se réécrit :

$$M_1(t) = S(t) + e^{t(A+B)}.$$

Or le corollaire C.6 nous montre que

$$\|S(t)\| = O(t).$$

Comme le semi-groupe $\{e^{t(A+B)}\}_{t \geq 0}$ est de contractions nous voyons que

$$\|M_1(t)\| = 1 + O(t).$$

Regardons maintenant l'opérateur $M_2(t)$.

Posons

$$L(t) = e^{tB} e^{2tA} e^{tB} - e^{2t(A+B)}.$$

En vertu du corollaire C.6, nous avons, par symétrie :

$$\|L(t)\| = O(t).$$

Remarquons que la formule $M_2(t)$ a l'expression suivante

$$\begin{aligned} M_2(t) &= \frac{2}{3} (U(t/2) + L(t/2) + 2 e^{t(A+B)}) - \frac{1}{6} (R(t) + 2 e^{t(A+B)}) \\ &= e^{t(A+B)} + \frac{1}{6} (4(U(t) + L(t)) - R(t)). \end{aligned}$$

Le corollaire C.6 et le corollaire C.7 nous montrent que

$$\|M_2(t)\| = 1 + O(t).$$

Ceci termine la démonstration du lemme. ■

CONCLUSION

Nous voyons donc, qu'il existe une constante c telle pour tout entier n positif l'estimation suivante a lieu

$$\|(M_1(T/n))^n\| \leq e^{cT}, \quad T \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \frac{T}{n} < 1$$

$$\|(M_2(T/n))^n\| \leq e^{cT}, \quad T \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \frac{T}{n} < 1.$$

RÉFÉRENCES

- [1] N. BOURBAKI, 1953, *Espaces vectoriels topologiques*, Livre V. Herman, Paris.
- [2] N. BOURBAKI 1969, *Intégration*, Livre VI. Herman, Paris.
- [3] D. O. DIA, *Analyse numérique de certains schémas de directions alternées d'ordre élevé*, en préparation.
- [4] T. KATO, 1966, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin.
- [5] F. RIESZ, 1952, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [6] M. SCHATZMAN, Higher order formulae for time integration, International Conference on spectral and higher order methods, Montpellier, juin 1992, à paraître dans les '*Proceedings ICOSAHOM 92*'.
- [7] Q. SHENG, 1989, Solving Linear Partial Differential Equations by Exponential Splitting, *IMA J. Numer. Anal.*, **9**, pp. 199-212.