

C. BARDOS

O. PIRONNEAU

**Petites perturbations et équations d'Euler
pour l'aéroélasticité**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
28, n° 4 (1994), p. 463-497

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1994__28_4_463_0

© AFCET, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



PETITES PERTURBATIONS ET ÉQUATIONS D'EULER POUR L'AÉROÉLASTICITÉ (*)

par C. BARDOS ⁽¹⁾ et O. PIRONNEAU ⁽²⁾

Communiqué par R. TEMAM

Abstract — This paper is the result of an investigation proposed by the CNES. It was devoted to numerical methods for aeroelasticity. Due to the size of the computation, emphasis was put on the range of applicability and saving in computing cost that could be obtained by different levels of linearization. Therefore both a description of the state of the art, some comparisons and some prospective ideas are given in the present paper.

First the basic equations and the different methods for describing the fluid-structure interaction are recalled. Different simplifications are given, in particular all the different approaches to the linearization, both at the level of the equation and at the level of the boundary condition. According to the so-called Hadamard formula, an equivalent boundary condition, which avoid a redefinition of the computational mesh, is given.

One of the advantage of linear problems is that they are well suited for frequency analysis. In this situation one can use the scattering formalism and introduce a systematic approach for the resonancy and the transfert matrix which is a common tool of flight control. Then a systematic comparison between numerical codes devoted to linear and non linear description is made.

Finally the introduction of asymptotic expansions similar to the one used in non linear optic is proposed. Such expansion may be well adapted to describe perturbations of finite energy, small amplitude and large frequency as it may appears in the phenomena of flutters.

Résumé — Ce travail résulte d'une étude proposée par le CNES sur les calculs de stabilité aéro-élastique. Compte tenu de la dimension des calculs l'accent était mis sur les possibilités et les gains éventuels résultant de la linéarisation. Ainsi on a été conduit à présenter à la fois un état de l'art, à comparer les méthodes existantes et à introduire des idées prospectives.

Après avoir rappelé les équations et les différentes manières de modéliser l'interaction entre le fluide et la structure on décrit les différentes simplifications aussi bien au niveau de la linéarisation des équations que de l'introduction d'une condition aux limites équivalente (connue en mathématiques sous le nom de condition d'Hadamard). Dans le cas de petites perturbations cette condition est utilisée pour éviter de remailler le voisinage de l'obstacle.

(*) Manuscrit reçu le 23 juillet 1993.

⁽¹⁾ Université Paris 7 et C.M.L.A., École normale supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan

⁽²⁾ Université Paris 6, Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 5^e étage, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05

Lorsque les problèmes sont linéarisés, une analyse en fréquence est possible et il semble que, dans ce cadre, l'utilisation du formalisme du scattering conduise à une approche systématique des notions de fréquences de résonance et de matrices de transfert, outil traditionnel du contrôle de vol

Une comparaison détaillée des méthodes numériques utilisées dans les cadres non linéaires et linéarisés est ensuite faite

Enfin il est proposé d'introduire dans des codes des développements asymptotiques inspirés de l'optique non linéaires. Ces développements seront particulièrement bien adaptés pour décrire des perturbations de petites amplitudes, mais de hautes fréquences (phénomènes de battements)

INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est d'évaluer l'efficacité des méthodes de petites perturbations en aéroélasticité, et plus particulièrement de l'utilisation d'équations d'Euler linéarisées au voisinage de la solution moyenne, sur un maillage fixe avec condition aux limites de transpiration.

Il y a en effet beaucoup de régimes où les phénomènes apparaissent sous forme de petites perturbations. Les perturbations peuvent venir de variations de l'angle d'incidence, perturbations du flux à l'infini, de l'action d'un volet ou de vibrations de la structure. Dans ces deux dernières situations on doit faire les calculs de mécanique des fluides dans un domaine *variable* ce qui introduit bien sûr une difficulté importante supplémentaire, d'où l'utilisation de conditions aux limites de transpiration.

Un des problèmes essentiels est l'apparition de vibrations couplées fluide-structure éventuellement résonnantes ou entretenues (« flutter » en particulier).

Les problèmes d'interaction fluide-structure se rencontrent principalement dans les problèmes de vibration des avions, des lanceurs, des pales d'hélicoptères, des aubes de turbines, des fluides dans les réservoirs et les stations de forage *off-shore*.

Pour les lanceurs et les avions la tendance actuelle semble être de faire des simulations du problème complet, résolution des équations de Navier-Stokes + Structures en espace-temps (Boeing). Les temps calculs sont malheureusement faramineux. Une simplification utilisée par la plupart des modélisateurs consiste à décomposer la réponse de la structure sur ses premiers modes propres dans le vide (Azevedo [1987]).

Une simplification qui semble aussi justifiée consiste à utiliser les équations d'Euler à la place des équations de Navier-Stokes (Destuynder [1991]). Pour les pales d'hélicoptères et les turbines la plupart des calculs sont faits avec les équations du potentiel transsonique (Soize [1991], Farhat [1991]).

Enfin lorsque les vitesses sont plus faibles comme dans le cas des réservoirs les équations du potentiel sont utilisées (Ohayon [1992]).

Les méthodes de calcul sont très variées et vont du modèle complet à des modèles très simplifiés (Landau-Lifschitz [1953], Fung [1969], Dat [1978]) en passant par des tentatives de calcul analytique (Fung [1991]) aussi bien partielles (une aile + un volet) que globales. L'avenir est cependant au calcul scientifique et l'ambition de réaliser des souffleries numériques à l'aide de calculateurs massivement parallèles est présente dans tous les bureaux d'études aéronautiques.

La simulation numérique des équations de Navier-Stokes reste cependant un problème difficile surtout en 3D. Les équations d'Euler en régime stationnaire se résolvent couramment en milieu industriel. En régime instationnaire ces équations sont plus difficiles à résoudre car il faut prendre au moins dix pas de temps par longueur d'onde ; on notera la tentative de résolution de ces équations en fréquence par Hall et Clark [1991].

Il semble, au vu des publications scientifiques internationales que le traitement mathématiques et numérique de l'aéroélasticité n'ait pas encore atteint une maturité suffisante pour être d'un usage courant en milieu industriel. Les coûts de calcul en sont la cause principale, mais peut être aussi le faible nombre de spécialistes comprenant à la fois les fluides, les structures, et la théorie des problèmes aux valeurs propres.

Dans cet article, sans perdre de vue l'objet de base c'est-à-dire la pertinence des équations d'Euler linéarisées pour le problème, nous nous efforçons de présenter les équations globales, les simplifications courantes, et les percées mathématiques sur des problèmes connexes comme les équations de Maxwell, l'interaction choc-onde, et surtout l'analyse modale.

1. POSITION DU PROBLÈME

La formulation mathématique du problème passe par l'écriture des équations du fluide, de la structure et des interactions aux interfaces. Le domaine occupé par le fluide sera noté Ω et le domaine occupé par la structure sera noté O . Le bord ∂O sera aussi noté S .

Equations de Navier-Stokes

Dans ce qui suit toutes les variables sont adimensionnées. Pour la densité $\rho(x, t)$, la vitesse $\mathbf{u}(x, t)$, la pression $p(x, t)$, la température $\theta(x, t)$ et l'énergie $E(x, t)$, on a les relations suivantes :

Conservation de la masse

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 . \quad (1)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla \cdot (p\mathbf{I} - \sigma) = 0. \quad (2)$$

Conservation de l'énergie

$$\partial_t[\rho E] + \nabla \cdot (u[\rho E + p]) = \nabla \cdot (u\sigma + \kappa \nabla \theta). \quad (3)$$

Définition de l'énergie interne

$$E = \theta + \frac{u^2}{2}. \quad (4)$$

Équation d'état

$$\frac{p}{\rho} = R\theta. \quad (5)$$

Définition du tenseur des contraintes

$$\sigma = p\mathbf{I}, \quad \text{avec} \quad \sigma = \mu(\nabla u + \nabla u^T) - \frac{2\mu}{3}\mathbf{I}\nabla \cdot u. \quad (6)$$

Les scalaires κ , μ sont respectivement le coefficient de diffusion thermique et la première viscosité de fluide. En général la deuxième viscosité ξ est petite et peut donc être prise égale à zéro.

Les conditions aux limites à l'infini ou sur les parois solides peuvent être :

Conditions initiales : ρ , u , E donnés.

Conditions aux limites à l'infini : Les frontières approchant l'infini sont supposées fixes. Alors u , θ ou $\partial\theta/\partial n$ sont donnés sur les frontières et ρ est donné sur les parties de frontières où $u \cdot n < 0$.

Condition aux parois solides S : $u = v$ (vitesse de la paroi), θ ou $\partial\theta/\partial n$ donnés.

La réaction du fluide df sur un morceau élémentaire ds de paroi solide de normale n est alors

$$df = (\sigma - p\mathbf{I}) \cdot n ds. \quad (7)$$

Equations de l'élasticité pour la structure

Les équations générales pour une structure inhomogène comme un lanceur peuvent être complexes. Prenons l'exemple d'un objet homogène soumis à de petites déformations. les équations de Von Karman pour le déplacement U sont :

$$\partial_{tt} U - \nabla \cdot \sigma^s = 0, \quad \sigma_{ij}^s = a_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad (8)$$

où a_{ijkl} sont des constantes caractérisant le matériau. On utilise la notation tensorielle

$$\nabla \cdot \sigma^s = \nabla \cdot (a \otimes \nabla U) = \partial_{x_j} (a_{ijkl} \partial_{x_l} U_k) .$$

A titre d'exemple, dans le cas de structure isotrope on peut prendre des coefficients pour σ^s qui donnent les équations de Lamé

$$\partial_{tt} U - \mu \Delta U - \lambda \nabla (\nabla \cdot U) = 0 . \tag{9}$$

Un jeu de *conditions aux limites* pour (8) est : $U(0)$, $\partial_t U(0)$ et U ou $\sigma^s \cdot n$ donnés aux bords.

Remarque 1 : L'expérience montre que les équations devraient contenir un terme d'amortissement du type $B \partial_t U$. Ce terme étant difficile à modéliser il sera rajouté sur des bases phénoménologiques ou expérimentales dans l'analyse modale.

Couplage Fluide-Structure

Le couplage fluide-structure se fait par les conditions aux limites lorsqu'on écrit que les contraintes aux bords de la structure équilibrent les contraintes imposées par le fluide :

$$\sigma^s \cdot n = \sigma \cdot n - pn - (\sigma \cdot n - pn)_{ref} + f \tag{10}$$

où f sont les forces extérieures (poussée d'un réacteur par exemple), où l'indice ref désigne l'état de référence correspondant à l'équilibre. Il faut écrire que la vitesse de chaque paroi est donnée par la dérivée du déplacement :

$$v = \partial_t U . \tag{11}$$

Sous forme variationnelle les équations (8) et (10) se résument à

$$\int_O \partial_{tt} U \cdot W + \int_O (a \otimes \nabla U) \cdot \nabla W = \int_{\partial O} W^T [f + (\sigma - p\mathbf{I}) n - (\sigma \cdot n - pn)_{ref}] \text{ pour tout } W . \tag{12}$$

Le système complet comprend (11), (12) et les équations de Navier-Stokes (1)-(6) pour calculer $(\sigma - p\mathbf{I}) \cdot n|_{\partial O}$. On notera qu'en prenant $W = 1$ ou $W = x$, (12) redonne les équations de Newton pour le centre de gravité de la structure.

Remarque 2 : Il est important de remarquer que $S = \partial O$ est fonction du temps et que la condition (12) est donc écrite sur une surface variable. En

particulier pour sortir ∂_{tt} de l'intégrale il faut écrire

$$\begin{aligned} \partial_{tt} \int_{\Omega} U \cdot W &= \\ &= \int_{\Omega} \partial_{tt} U \cdot W + 2 \int_{\partial\Omega} \partial_t U \cdot W U \cdot n + \int_{\partial\Omega} U \cdot W \partial_t U \cdot n + \dots \quad (13) \end{aligned}$$

Mais comme $U \ll 1$ les derniers termes sont d'ordre supérieur.

Décomposition sur les modes propres de la structure

Les coefficients a_{ijkl} dépendent bien sûr des propriétés locales de la structure et leur variation peut être très complexe. La géométrie elle-même est complexe, aussi est-il en général plus simple et plus rapide d'introduire les modes propres de cette structure et de chercher la solution générale comme combinaison linéaire de ces modes. Nous analyserons ultérieurement la fiabilité de cette procédure.

La description de ces modes correspond bien à l'intuition géométrique (mode de torsion et de cisaillement par exemple) et aux discrétisations de Galerkin. De plus il peuvent être mesurés expérimentalement. On considère donc une famille finie U^i , $1 \leq i \leq N$ de vecteurs de déplacement élémentaires qui possèdent les propriétés suivantes :

i) Ils sont deux à deux orthogonaux pour la norme euclidienne :

$$\int_{\Omega} U^i(x) U^j(x) dx = \delta_{i,j}$$

et quasi-valeurs propres pour le tenseur de l'élasticité :

$$-\omega^{j^2} \delta_{i,j} + \int_{\Omega} a \otimes \nabla U^j \nabla U^j = 0. \quad (14)$$

On écrit ensuite une forme approchée du mouvement de la structure selon l'équation :

$$U(x, t) = \sum_j q_j(t) U^j(x) \quad (15)$$

et on remplace (12) par la formulation variationnelle approchée :

$$\begin{aligned} \sum_j q_j''(t) \int_{\Omega} U^j U^k + \sum_j q_j(t) \omega^{j^2} \int_{\Omega} U^j U^k &= \\ &= \int_{\Gamma} U^k [f + (\sigma - p\mathbf{I})n - (\sigma \cdot n - pn)_{ref}]. \quad (16) \end{aligned}$$

Il est important de remarquer que cette simplification au niveau de la structure ne perturbe en rien les équations du fluide. Simplement l'équation (11) porte sur des v plus particuliers

$$v(x, t) = \sum_j \dot{q}_j(t) U^j(x)$$

tandis que (16) contient de manière implicite (10) et peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\ddot{q}_j(t) + \beta_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = F^j(t)$$

avec

$$F^j(t) = \int_{\Gamma} U^j [f + (\sigma - p\mathbf{I}) n - (\sigma - p\mathbf{I})_{ref} \cdot n] .$$

D'après ce qui précède, $\beta_j = 0$. Ce terme est rajouté pour prendre en compte les amortissements dans la structure. Ce terme est déterminé par mesures expérimentales.

Remarque 3 : On utilise le nom de « quasi-vecteurs propres » pour la raison suivante : on construit une base de Galerkin pour représenter les mouvements d'un solide soumis à des forces extérieures. Aussi il semble que ce ne soit pas optimal de se limiter soit à une base de « Dirichlet » c'est-à-dire des éléments U'_D vérifiant sur $S = \partial O$ la relation $U'_{DS} = 0$ (pas de mouvement) soit à une base de « Neumann » c'est-à-dire des éléments vérifiant sur S $\sigma^s(U'_N) \cdot n = 0$. Le choix optimal dépend bien sûr des possibilités expérimentales de détermination des modes, de la manière dont l'énergie se répartit entre ces modes. On peut songer à prendre une réunion finie et linéairement indépendante d'éléments « Dirichlet » et d'éléments « Neumann » ceci posé, il a été démontré, par Belishev et Kurylev [1991] (et ce n'est pas complètement évident) que l'on pouvait décomposer sur une base « Neumann » U'_N . Selon ces auteurs on écrit donc la solution de (8) sous la forme :

$$U(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) U'_N(x) . \tag{15'}$$

Pour toute solution régulière cette série converge non seulement dans L^2 mais aussi dans H^1 , par contre elle ne converge pas dans des espaces plus réguliers que $H^{3/2}$ car ensuite il n'y a pas coïncidence des dérivées normales des deux membres de (15') sur le bord. Néanmoins si on multiplie l'équation (8) par U'_N et si on intègre par partie on obtient bien :

$$q''_j(t) + q_j(t) \omega_j^2 = \int_{\Gamma} U'_N [f + (\sigma - p\mathbf{I}) n - (\sigma \cdot n - pn)_{ref}] \tag{16'}$$

que l'on couple avec l'équation au bord :

$$v(x, t)|_S = \lim_{x \rightarrow S} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{q}_j(t) U_N^j(x).$$

Seul ce dernier passage à la limite requiert une analyse plus fine. Ainsi comme Belishev et Kurylev, on a décomposé l'opérateur « Neumann-Dirichlet » à l'aide des vecteurs propres de l'opérateur de « Neumann ».

2. SIMPLIFICATION DES ÉQUATIONS DU FLUIDE

Équations d'Euler

Ce sont les équations de Navier-Stokes lorsqu'on néglige les effets de diffusion et de viscosité, c'est-à-dire

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (17)$$

$$\partial_t (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 \quad (18)$$

$$\partial_t [\rho E] + \nabla \cdot (u[\rho E + p]) = 0 \quad (19)$$

$$E = \theta + \frac{u^2}{2} \quad (20)$$

$$\frac{p}{\rho} = \theta. \quad (21)$$

Les conditions aux limites comprennent les conditions initiales, une partie des conditions à l'infini des équations de Navier-Stokes (ce point sera discuté ultérieurement) et une condition de paroi :

$$(u - v) \cdot n = 0 \quad (22)$$

où v est la vitesse de la paroi. La réaction élémentaire df du fluide sur un élément de paroi est donnée par (7)

$$df = -pn \, ds. \quad (23)$$

L'équation de couplage avec la structure devient

$$\sigma^s n = - (p - p_{ref}) n + f. \quad (24)$$

Comme p est déterminé à une constante près, on conviendra dans ce qui suit que cette constante est p_{ref} .

Équations du potentiel

Une solution particulière du système (17)-(21) s'obtient en supposant que l'écoulement est irrotationnel :

$$\nabla \times u = 0 \Leftrightarrow u = \nabla \phi. \quad (25)$$

Avec des hypothèses de conservation d'entropie, le système (17)-(21) devient

$$\rho = (1 - |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{26}$$

$$p = \rho^\gamma \tag{27}$$

$$\partial_{tt} \phi - \nabla \cdot \left[(1 - |\nabla\phi|^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \nabla\phi \right] = 0. \tag{28}$$

En pratique ce système n'est valable que pour des écoulements à rotationnel nul à l'infini et pour des chocs faibles car les chocs forts génèrent de l'entropie et du rotationnel.

Les conditions aux limites sont aussi données par (22) et la réaction du fluide sur la paroi est donnée par (23).

Lorsque le corps est profilé, on peut linéariser les équations. Puisque l'écoulement est uniforme à l'infini on peut faire le changement de variable $x \rightarrow x - U_\infty t$ et le changement de fonction : $\phi \rightarrow \phi + U_\infty t$ et le changement de fonction : $\phi \rightarrow \phi + u_\infty x$ où x est la direction de l'écoulement. Si M_∞ désigne le Mach à l'infini on obtient

$$\partial_{tt} \phi + 2 M_\infty^2 \partial_{tx} \phi - (1 - M_\infty^2 - \lambda \partial_x \phi) \partial_{xx} \phi - \partial_{yy} \phi - \partial_{zz} \phi \tag{29}$$

où $\lambda = 0$ si M_∞ n'est pas proche de 1 et $\lambda = 2(\gamma + 1) M_\infty^2 + 6(1 - M_\infty^2) M_\infty^2$ sinon ; avec $\phi(0)$, $\partial_t \phi(0)$, $\partial\phi/\partial n|_{S \cup \Gamma_\infty}$ donnés (Γ_∞ désigne la frontière à l'infini de l'écoulement). La pression est donnée par

$$p = -U_\infty \partial_{xx} \phi - \frac{1}{2} ((\partial_{yy} \phi)^2 + (\partial_{zz} \phi)^2). \tag{30}$$

La loi de couplage avec la structure est donc en première approximation

$$\sigma^s \cdot n = n U_\infty \partial_{xx} \phi + f. \tag{31}$$

3. LINÉARISATION D'HADAMARD DES ÉQUATIONS D'EULER

La linéarisation des équations d'Euler autour d'un état stationnaire ne poserait pas de problème si les frontières étaient indépendantes du temps. Dans le cas de l'aéroélasticité la linéarisation est plus délicate. On rappelle d'abord la méthode sur une équation abstraite scalaire.

Position du problème

Soit f et g deux fonctions de R^d à valeurs dans R . Soit Ω un domaine de R^d de frontière Γ et S une partie de Γ . On désigne par n la normale extérieure à

Γ . Soit $A(u, \nabla u)$ un opérateur différentiel. On considère le problème suivant, que l'on supposera bien posé :

$$A(u, \nabla u) = f \quad u|_{\Gamma} = g. \quad (32)$$

Soit Σ une surface dans Ω voisine de S au sens suivant :

$$\Sigma = \{x + \beta n(x) : x \in S\} \quad \beta \ll 1. \quad (33)$$

On cherche un problème tangent au problème (32) avec une condition aux limites sur Σ au lieu de Γ .

Linéarisation au voisinage d'une surface moyenne

Si δu désigne une variation de u due à une variation δf de f ou δg de g ou même S' de S (c'est-à-dire que β varie de $\delta\beta$ si Σ reste fixe) alors de (32) on déduit que

$$A_u \delta u + A_v \nabla \delta u = \delta f \quad (34)$$

où A_v désigne la dérivée de A par rapport au deuxième groupe de variables.

Pour obtenir une condition aux limites pour δu on note d'abord qu'un développement de Taylor de u par rapport à la composante normale de x donne

$$u(x + \beta n) = u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n} + o(\beta). \quad (35)$$

Supposons maintenant que S passe à S' et que α mesure la distance normale entre S et S' :

$$S' = \{x + \alpha n(x) : x \in S\} \quad \alpha \ll 1. \quad (36)$$

En prenant $x \in S$ dans (35) puis $x \in S'$ avec $\beta \rightarrow \beta - \alpha$ dans (35) aussi, on obtient

$$u|_{\Sigma} = u|_S + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + o(\beta) \quad (37)$$

$$u'|_{\Sigma} = u'|_{S'} + (\beta - \alpha) \frac{\partial u'}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + o(\beta - \alpha). \quad (38)$$

En soustrayant (37) de (38) il reste

$$\delta u|_{\Sigma} = \delta g - \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + \beta \frac{\partial \delta u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + o(\beta - \alpha) + o(\beta) - \alpha \frac{\partial \delta u}{\partial n}.$$

Le dernier terme peut être négligé car il est d'ordre supérieur. En effet on peut montrer, au moins pour les opérateurs elliptiques, que $\delta u \rightarrow 0$ lorsque $\alpha, \delta f, \delta g \rightarrow 0$.

En prenant $\beta = 0$ on obtient le résultat suivant :

PROPOSITION : Lorsque f et g varient de δf et δg et lorsque Γ varie de α alors δu , la variation de u , est solution de

$$A_u \delta u + A_v \nabla \delta u = \delta f \quad \text{dans } \Omega \tag{39}$$

$$\delta u|_{\Gamma} = \delta g - \alpha \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \tag{40}$$

Nous allons appliquer la méthode aux équations d'Euler, toutefois il nous faut faire quelques rappels avant d'obtenir une linéarisation des conditions aux limites.

Remarque 4 : La précision de l'approximation d'Hadamard dépend de la régularité de l'écoulement au voisinage de la paroi. Ainsi, la méthode ne pourra pas s'appliquer au bord de fuite d'une aile par exemple.

Rappels sur les équations d'Euler

On rappelle que les équations d'Euler sous forme adimensionnée s'écrivent

$$W_{,t} + \nabla \cdot F(W) = 0 \tag{41}$$

avec

$$W = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, E]^T \tag{42}$$

où ρ désigne la densité, u la vitesse et E l'énergie. Le tenseur F est donné par

$$F(W) = [F_1(W), F_2(W), F_3(W)]^T \tag{43}$$

$$F_i(W) = [\rho u_i, \rho u_1 u_i + \delta_{1i} p, \rho u_2 u_i + \delta_{2i} p, \rho u_3 u_i + \delta_{3i} p, u_i(E + p)]^T. \tag{44}$$

La pression p , l'énergie et la température θ sont liées par

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) \tag{45}$$

$$E = \rho \left(\theta + \frac{1}{2} |u|^2 \right).$$

Déterminer un jeu de conditions aux limites pour ces équations est un problème difficile pour la pratique et encore ouvert pour la théorie en dimension $d > 1$. Il est toutefois communément admis que les données suivantes sont suffisantes :

— Conditions initiales :

$$W(x, 0) = W^0(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{46}$$

— Conditions aux limites :

Réécrivons (41) sous la forme dit « non conservative »

$$W_{,i} + \sum A_i(W) \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \quad (47)$$

où $A_i(W)$ est une matrice 5×5 dont les éléments sont les dérivées de F_i par rapport à W_j .

Soit $n_i(x)$ une composante de la normale à Γ en x . On peut montrer que

$$B(W, n) = \sum A_i(W) n_i \quad (48)$$

est diagonalisable et a pour valeurs propres

$$\lambda_1(n) = u \cdot n - c, \quad \lambda_2(n) = \lambda_3(n) = \lambda_4(n) = u \cdot n, \quad \lambda_5(n) = u \cdot n + c \quad (49)$$

où la vitesse du son $c = (\gamma p / \rho)^{1/2}$. Finalement par analogie avec le même problème à une dimension on voit qu'il est nécessaire de se donner autant de conditions en $x \in \Gamma$ qu'il y a de valeurs propres négatives. On aura donc (en 3 dimensions) 0, 1, 4 ou 5 conditions sur les composantes de W . Les cas importants sont :

— Écoulement supersonique entrant ($u \cdot n < 0$, $|u \cdot n| > c$) : 5 conditions par exemple, ρ , ρu_i , p .

— Écoulement supersonique sortant : 0 condition.

— Écoulement subsonique entrant : 4 conditions (toute combinaison linéaire indépendante de $W \cdot l'$ où l' est le vecteur propre à droite associé à $\lambda_i < 0$).

— Écoulement subsonique sortant : 1 condition (en général sur la pression).

— Écoulement glissant sur une paroi ($u \cdot n = 0$) : 1 condition, i.e. $u \cdot n = 0$.

Équations d'Euler linéarisées

Les équations d'Euler pour δW au voisinage d'un écoulement W sont facilement dérivées de (47)

$$\delta W_{,i} + \sum A_i(W) \frac{\partial \delta W}{\partial x_i} + \sum A_i(\delta W) \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0. \quad (50)$$

Notons que $F(W)$ est homogène de degré 2 en W et que A est donc linéaire en W .

Les conditions aux limites pour que le problème soit bien posé peuvent être :

- δW donné à l'instant initial,
- 0, 1, 4 ou 5 conditions sur δW aux bords suivant le même critère sur W que ci-dessus.

En notation tensorielle (50) s'écrit :

$$\delta W_{,i} + A(W) : \nabla \delta W + A(\delta W) : \nabla W = 0 . \tag{51}$$

Les paramètres susceptibles de varier sont les conditions aux limites à l'infini et la position des parois solides.

A l'infini les conditions aux limites sont du type :

$$BW = g \tag{52}$$

où B est une matrice diagonale avec des 1 ou des 0 sur la diagonale. La linéarisée de cette équation est donc

$$B\delta W = \delta g . \tag{53}$$

Remarque 5 : Les conditions aux limites à l'infini sont artificielles. Les conditions classiques discutées ci-dessus peuvent ne pas convenir pour un problème instationnaire car elles réfléchissent les ondes. Il faut alors des conditions aux limites non réfléchissantes, comme celles proposées par Halpern [1982], Hall [1991].

Sur les parois solides S , si celles-ci dépendent du temps et varient peu autour d'une surface moyenne Γ :

$$S(t) = \{x + \alpha(x, t) n(x) : x \in \Gamma\} \tag{54}$$

alors la condition $u \cdot n = 0$ se différencie en $u \cdot \delta n + \delta u \cdot n = 0$ avec δu vérifiant (40) et δn donné en écrivant que $n + \delta n$ est normal à la tangente à S , c'est-à-dire vérifiant

$$(n + \delta n) \cdot \left(\tau + \alpha \left(-\frac{\tau}{R} + \frac{b}{T} \right) + n \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right) = 0 \tag{55}$$

où τ , b sont les deux vecteurs de Fresnet tangents à S , s est l'abscisse curviligne, T est la torsion et R le rayon de courbure moyen de S . En dimension 2 on obtient

$$\delta n \cdot \tau + \frac{\partial \alpha}{\partial s} = o(\alpha) \tag{56}$$

soit

$$\delta n = -\tau \frac{\partial \alpha}{\partial s} \tag{57}$$

et on a donc le résultat suivant :

PROPOSITION : *Si S varie peu autour d'une surface moyenne Γ , c'est-à-dire que $S(t) = \{x + \alpha(x, t)n(x) : x \in \Gamma\}$, $\alpha \ll 1$, alors la linéarisée de $u \cdot n|_S = g$ est*

$$\delta u \cdot n = u \cdot \tau \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \alpha n \cdot \frac{\partial u}{\partial n} + \delta g \text{ sur } \Gamma. \quad (58)$$

Remarque 6 : L'application de cette formule à l'aéroélasticité se fait dans les conditions suivantes :

Γ est la position l'interface fluide structure à l'équilibre et $u \cdot n = 0$ sur Γ

S est la position de l'interface en déplacement et alors, par définition, $\alpha = U \cdot n$ et

$$(u + \delta u) \cdot (n + \delta n)|_S = \partial_t U \cdot n.$$

Alors d'après ce qui précède cette condition peut être ramenée sur Γ et devient :

$$\delta u \cdot n = u \cdot \tau \partial_s U \cdot n \frac{\partial u \cdot n}{\partial n} + \partial_t U \cdot n. \quad (59)$$

En général on néglige le premier terme du membre de droite en supposant $\partial_s \alpha \ll \alpha$.

Équations d'Euler linéarisées en espace-fréquence

Si les données de (51), (52), (58) sont périodiques en temps, on peut en faire une décomposition de Fourier en temps et chercher la réponse à des données monochromatiques proportionnelles à $e^{i\omega t}$.

$$\delta g = g' e^{i\omega t} \quad \alpha = \alpha' e^{i\omega t} \quad (60)$$

qui donneront une réponse

$$\delta W = W' e^{i\omega t} \quad (61)$$

avec W' solution de

$$i\omega W' + A(W) : \nabla W' + A(W') : \nabla W = 0 \quad (62)$$

$$BW' = g' \quad \text{à l'infini} \quad (63)$$

$$u' \cdot n = \alpha' \left(i\omega - \frac{\partial u \cdot n}{\partial n} \right) \text{ sur les parois solides.} \quad (64)$$

4. RÉSONANCE ET MATRICE DE TRANSFERT

Les équations du problème sont donc faites du système d'Euler pour les fluides, si on néglige les phénomènes visqueux, et du système de l'élasticité pour les solides dans l'hypothèse petits déplacements, couplés par les conditions aux limites. Sous l'effet de forces extérieures ou d'instabilités le système peut se mettre à répondre de façon périodique, surtout si l'excitation est périodique. Seul le solide est capable de résonance, car le fluide étant en milieu infini, il ne résonne pas, en première approximation. On suppose donc qu'une force extérieure a excité un mode propre de vibration de la structure et le problème pratique est de savoir si l'amplitude de la réponse croît ou décroît avec le temps. Pour répondre on doit savoir :

- 1) Démontrer que la réponse à une excitation périodique reste périodique ;
- 2) Évaluer l'écart en fréquence entre les modes propres de l'ensemble fluide-structure et les modes propres de la structure dans le vide ;
- 3) Calculer la partie imaginaire des modes propres, seule responsable des instabilités.

Ces problèmes ont été bien étudiés en acoustique linéaire et nous présentons ici les principaux résultats ainsi que leurs extensions possibles à l'aéroélasticité.

Rappel sur le problème extérieur pour l'acoustique

Pour faire une étude systématique en espace-fréquence des phénomènes de couplage et pour accéder à une définition rigoureuse de la matrice de transfert, il nous semble utile de nous inspirer des quelques idées de base sur le comportement de l'équation de l'acoustique à l'extérieur d'un obstacle K (avion, fusée, profil d'aile). Ces idées ont été développées pour l'électromagnétisme et semblent sous-jacentes à un certain nombre de démarches en aéroélasticité. On pourra consulter le livre de Lax et Phillips [1989] et celui de Sanchez Palencia [1980].

On se place en dimension 3 d'espace (c'est à la fois plus réaliste et plus simple à cause du principe de Huyghens) et on considère les deux problèmes suivants :

$$\partial_t^2 U - \Delta U = 0 \quad (x, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \times \mathbb{R}_+ \quad U(x, t) = e^{i\omega t} \phi_d(x) \Big|_{x \in \partial K} \quad (65)$$

ainsi que son homologue en espace fréquence

$$\omega^2 \phi + \Delta \phi = 0 \quad x \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \quad \phi(x) = \phi_d(x) \Big|_{x \in \partial K} \quad (66)$$

où K est un compact de \mathbb{R}^3 . Bien entendu dans (65) des conditions initiales doivent être prescrites et dans (66) une condition de radiation dite de

Sommerfeld qui implique en particulier que ϕ est la transformée de Fourier en temps d'une fonction $U(x, t)$ à support dans $t > 0$ doit aussi être prescrite. On passe ainsi de (65) à (66) par ce type de transformation de Fourier.

Les faits suivants, concernant le champ proche, c'est-à-dire justement ce qui se passe au voisinage de l'obstacle et l'interaction sont bien connus.

i) Pour tout ω vérifiant $\text{Im } \omega \leq 0$ en particulier pour tout ω réel l'équation (66) admet une unique solution $\phi(x)$.

ii) Pour toute donnée initiale d'énergie finie, la solution du problème d'évolution (65) se comporte, localement, asymptotiquement comme $e^{i\omega t} \phi(x)$. Plus précisément, pour tout réel, fini mais éventuellement grand L , on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K, |x| < L} \left\{ \left| \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - i \omega e^{i\omega t} \phi(x) \right|^2 + \left| \nabla_x U(x, t) - e^{i\omega t} \nabla_x \phi(x) \right|^2 \right\} dx = 0. \quad (67)$$

Seule la vitesse de convergence dépend de la géométrie. En particulier elle est exponentiellement rapide en l'absence de rayon captif et peut être arbitrairement lente dans le cas contraire.

ii) La fonction $\omega \rightarrow \phi(x, \omega)$ définie par l'intermédiaire du problème (66) est holomorphe dans le demi-plan $\text{Im } \omega < 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe dont les pôles, de multiplicité finie, ω_k , sont situés dans le demi-plan $\text{Im } \omega > 0$. Ces pôles sont caractérisés par l'existence de solutions w_k non triviales satisfaisant la condition de radiation de Sommerfeld du problème :

$$\omega_k^2 w_k + \Delta w_k = 0 \quad x \in (\mathbb{R}^3 \setminus K) \quad w_k(x) = 0|_{x \in \partial K}. \quad (68)$$

Lorsqu'il n'y a pas de rayon captif (et probablement dans bien d'autres cas dans un sens plus faible) la solution du problème (65) s'écrit localement (pour $|x| < L$) sous la forme :

$$U(x, t) = \sum_k \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega_k t}}{i(\omega - \omega_k)} c_k \cdot w_k(x) \quad (69)$$

où les c_k sont déterminés par les conditions initiales.

Ce rappel se justifie par les remarques suivantes.

Dans tous les cas loin de l'obstacle le fluide est en régime stationnaire et donc décrit par l'équation potentielle qui dans ce cadre s'identifie à l'équation de l'acoustique.

Dans une théorie linéarisée on aura également près de l'obstacle une équation de l'acoustique, elle sera éventuellement à coefficients variables, à cause de la linéarisation autour d'un écoulement moyen non constant, mais cela ne change pas la théorie.

Une conséquence importante du point i) est qu'il est légitime de s'intéresser avant tout aux solutions stationnaires (équation (66)). Les nombres ω_k sont les résonances du problème. Le fait qu'ils soient complexes ($\text{Im } \omega > 0$) traduit l'amortissement dû à la dispersion : la perturbation est dissipée par ce qu'elle rayonne à l'infini. Ainsi le facteur $(\omega - \omega_k)^{-1}$ n'est jamais nul car ω est réel mais il peut être petit (éventuellement très petit) et ainsi conduire à des oscillations résonantes.

La détermination des résonances a fait dans le cadre de l'électromagnétisme l'objet d'une importante littérature (cf. Poisson [1992], Majda *et al.* [1986]).

Application au couplage élémentaire fluide-structure

Dans cet esprit le couplage entre un corps élastique susceptible de subir des petits déplacements et un gaz au repos est complètement décrit dans Sanchez Palencia [1980, p. 357-358] avec un couplage traduisant la continuité du tenseur des contraintes et des déplacements. On introduit dans l'obstacle, le champ des déplacements $U(x, t)$, le tenseur des contraintes

$$\sigma(\nabla_x U); \sigma_{i,j} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)$$

et le potentiel des vitesses ϕ à l'extérieur de l'obstacle dans un gaz de densité petite (après avoir adimensionné) de l'ordre de ε , dans ces conditions les équations (66) et (67) sont remplacées, en présence, pour fixer les idées, de sollicitations harmoniques dans l'obstacle, par les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi - \Delta \phi &= e^{i\omega t} \phi_d(x), & \text{dans le vide} \\ \partial_t^2 U - \nabla_x \cdot \sigma(\nabla_x U) &= 0, & \text{dans l'obstacle} \end{aligned}$$

avec les conditions d'interface :

$$\partial_t U \cdot n(x) = \nabla_x \phi \cdot n(x) \text{ et } \sigma(\nabla_x U) n = \varepsilon \partial_t^2 \phi n(x) \text{ sur } \partial K$$

et pour le problème en fréquence,

$$\begin{aligned} \omega^2 \phi + \Delta \phi &= -\phi_d(x), & \text{dans le vide} \\ \omega^2 U + \nabla_x \sigma(\nabla_x U) &= 0, & \text{dans l'obstacle} \end{aligned}$$

avec les conditions d'interface harmonique suivantes :

$$i \omega U \cdot n(x) = \nabla_x \phi \cdot n(x) \text{ et } \sigma(\nabla_x U) \cdot n = -\omega^2 \varepsilon \phi n(x) \text{ sur } \partial K.$$

L'analyse décrite ci-dessus pour l'équation de l'acoustique à l'extérieur de l'obstacle s'adapte sans problème, les calculs seront cependant plus compliqués et les résultats invoquant les asymptotiques à haute fréquence devront

tenir compte de la propagation des ondes élastiques à l'intérieur et sur la surface du corps.

Le fait suivant concernant les résonances est important à remarquer. Lorsque ε tend vers zéro, le problème se découple en deux sous-problèmes l'un concernant l'extérieur et l'autre concernant l'obstacle. De même les résonances $\omega_k(\varepsilon)$ se découpent en deux familles $\omega_k^e(\varepsilon)$ et $\omega_k^i(\varepsilon)$ la première converge vers des résonances du problème extérieur découplé et donnera donc des nombres avec une partie imaginaire importante, intervenant peu dans la formule (69) tandis que la seconde famille converge vers des résonances du problème intérieur donc des nombres à partie imaginaire nulle. En fait dans cette asymptotique ce sont ces nombres qui jouent le rôle essentiel. Dans le cas de l'acoustique cela veut par exemple dire que lorsqu'on écoute un tambour, on n'entend pas les fréquences du tambour (on n'est pas dans le tambour) mais on entend les résonances de l'air couplé au tambour et compte tenu de la remarque ci-dessus ces nombres sont très voisins des résonances du tambour.

Application à l'aéroélasticité

Dans l'adaptation des idées décrites ci-dessus aux vrais problèmes de l'aéroélasticité on doit introduire plusieurs modifications. Les plus évidentes sont les suivantes :

D'une part le fluide extérieur n'est plus au repos à l'infini, il a sa vitesse propre (en général très grande). D'autre part il n'est pas question de résoudre dans tous ses détails les équations de l'élasticité dans le corps (ceci est beaucoup trop complexe). Aussi on se limitera au couplage entre l'équation du potentiel linéarisée en espace-fréquence, en régime subsonique (obtenue à partir de (29)) et l'équation de la structure en mode propre. On obtient donc en présence d'une sollicitation extérieure (on pourrait aussi prendre une sollicitation sur le bord comme la poussée des réacteurs) le système :

$$\omega^2 \phi - 2i\omega M_\infty^2 \partial_x \phi + (1 - M_\infty^2) \partial_{xx} \phi + \partial_{yy} \phi + \partial_{zz} \phi = f(x). \quad (70)$$

1 La solution $\phi_\omega(x)$ de (70) satisfait la condition de radiation à l'infini (on suppose que le régime est subsonique) et la condition aux limites

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = i\omega U = i\omega \sum_j \dot{q}_j(\omega) U^j(x).$$

De même les coefficients du mouvement de la structure, en fréquence satisfont l'équation :

$$\omega^2 q_j(\omega) + i\omega \beta_j q(\omega) + \omega^2 q_j(\omega) = F(\omega) = \int_\Gamma U^j(x) n U_\infty \partial_{xx} \phi \, ds. \quad (71)$$

Comme dans la théorie du scattering, l'opérateur

$$\left(f, i\omega \sum_j q_j(\omega) U^j(x) \right) \rightarrow \phi_\omega \left(d, i\omega \sum_j q_j(\omega) U^j(x) \right)$$

est bien défini pour $\text{Im } \omega \leq 0$ et il se prolonge en une fonction méromorphe dont les pôles sont d'ordre fini et tous situés dans le demi-plan supérieur. Ainsi on écrira, en désignant par $Q(\omega)$ le vecteur de composantes q_j ,

$$\begin{aligned} Q_j(\omega) &= \int_\Gamma U^j(x) n U_\infty \partial_{xx} \phi_\omega \left(f, i\omega \sum_j q_j(\omega) U^j(x) \right) ds \\ &= A_j(\omega, f) + B_j(\omega, Q). \end{aligned}$$

En reportant dans (71) on obtient donc un système de dimension finie :

$$(\omega^2 + i\omega\beta_j + \omega^j) q_j(\omega) = A_j(\omega, f) + B_j(\omega, Q)$$

soit enfin :

$$D(\omega) Q - B(\omega) Q = A(\omega) f.$$

On observe que $D(\omega)$ et $B(\omega)$ sont des matrices $N \times N$ (N étant le nombre de degrés de liberté de la structure), elles sont méromorphes en ω avec des pôles uniquement dans le demi-plan $\text{Im } \omega \geq 0$. La matrice

$$(D(\omega) Q - B(\omega))^{-1}$$

est en fait la matrice de transfert du couplage fluide/structure et en plus des pôles correspondants à des résonances amorties elle peut avoir soit des pôles (simples ou multiples) dans le demi-plan $\text{Im } \omega < 0$ soit des pôles multiples sur l'axe $\text{Im } \omega = 0$. Dans tous ces cas cela correspond à des phénomènes d'instabilité (Rocard [1950] ou, de manière plus phénoménologique dans les ouvrages de contrôle ou d'aéroélasticité, cf. Fung [1991] et Friedland [1986]). Cela vaut la peine de remarquer que $D(\omega)$ est soit donnée soit s'obtient par une diagonalisation classique, que les calculs de $B(\omega) Q$ et $A(\omega) f$ ne sont pas fondamentalement différents et pourraient se faire, en adaptant les méthodes intégrales de l'électromagnétisme (cf. Poisson [1992]).

5. MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS D'EULER

Dans ce paragraphe nous allons rappeler quelques méthodes numériques de base pour les équations d'Euler et d'Euler linéarisées. On restreint la discussion aux méthodes de volumes finis et d'éléments finis non structurées car elles sont plus générales et dérivées pour la plupart des méthodes structurées types différences finies ou volumes finis sur des quadrangles.

Quelques méthodes centrées

Les méthodes numériques reposent sur une formulation variationnelle des équations, une discrétisation des espaces de fonctions test et une technique de discrétisation de la partie hyperbolique des équations dans la classe suivante :

- artificial viscosity methods ;
- semi-Lagrangian methods ;
- streamline viscosity methods.

La formulation variationnelle est discrétisée comme suit

$$(\partial_t W_h, V_h) - (F(W_h), \nabla V_h) + \int_{\Gamma} V_h \cdot F(W_{\Gamma h}) \cdot n_h = 0$$

$$\forall V_h \in U_h; \quad W_h - W_{\Gamma h} \in U_{0h} \quad (72)$$

où $(,)$ est le produit scalaire L^2 , U_h est un espace de dimension finie et où U_{0h} contient les conditions aux limites ; comme toutes les composantes de W ne sont pas connues aux bords $W_{\Gamma h}$ est une extension quelconque de celles qui sont connues.

La méthode de viscosité artificielle de Jameson (Jameson [1978])

La discrétisation en temps est explicite et la discrétisation en espace est faite en éléments finis P^1 conforme :

$$\frac{1}{k} (W_h^{n+1} - W_h^n, V_h) - (F(W_h^n), \nabla V_h) + \int_{\Gamma} V_h \cdot F(W_{\Gamma h}^n) \cdot n_h -$$

$$- (\nabla \cdot [G(W_h^n) \nabla W_h^n], V_h) = 0 \quad \forall V_h \in U_h; \quad W_h^{n+1} - W_{\Gamma h}^n \in U_{0h} \quad (73)$$

où G est un tenseur de viscosité choisi avec soin (de manière à créer un effet de décentrage) et où U_{0h} est l'espace des fonctions P^1 par morceaux continues sur une triangulation et dont les composantes correspondant à celles de W_{Γ} qui sont connues sont nulles sur Γ ; $W_{\Gamma h}^n$ est obtenu en remplaçant dans W_h^n les composantes connues de W_{Γ} .

Comme le schéma est explicite en temps on a une condition de stabilité sur k ; pour que le schéma soit vraiment explicite il faut aussi utiliser une formule de quadrature basée sur les sommets pour la première intégrale à gauche dans (73).

La viscosité choisie par Jameson est approximativement :

$$\nabla \cdot (G(W) \nabla W) = - \frac{h^2}{k} \left(\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left[ah^3 \frac{|\Delta p|}{|p|} \frac{\partial W}{\partial z} - \left| b - ah^2 \frac{|\Delta p|}{|p|} \right| + \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} \right]$$

$$(74)$$

où z est la direction de l'écoulement et a et b sont des constantes d'ordre

$O(1)$. Toutefois comme le schéma est écrit sur les sommets de la triangulation cette diffusion artificielle a la forme suivante :

$$\sum_{j, k \in T(i)} \left(\sum_{m \in N(j)} (W_j - W_m) - \sum_{l \in N(k)} (W_k - W_l) \right)$$

où $N(i)$ est l'ensemble des sommets voisins du sommet i et où $T(i)$ sont les triangles qui contiennent le sommet i .

L'extension de ce schéma aux équations d'Euler linéarisées n'offre aucune difficulté ; il suffit de rajouter les termes d'ordre zéro en W' et de remplacer la fonction F par $A \nabla W$. Cette remarque est valable pour tous les schémas ci-dessous.

La méthode dite de Taylor-Galerkin (Donea [1987], Lohner *et al.* [1985])

Comme pour le schéma de Lax-Wendroff on part de la formule de Taylor pour la variable t

$$W^{n+1} = W^n + kW'_{,t} + \frac{k^2}{2} W''_{,tt} + o(k^2). \tag{75}$$

On déduit de (72) que

$$\begin{aligned} W_{,tt} &= -\nabla \cdot \left(\frac{\partial F(W)}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot (F'_w(W) W_{,t}) \\ &= \nabla \cdot (F'_w(W) \nabla \cdot F(W)). \end{aligned} \tag{76}$$

On peut donc discrétiser (73) par

$$\begin{aligned} (W_h^{n+1}, V_h) &= (W_h^n, V_h) + k(F(W_h^n), \nabla V_h) - \\ &\quad - \frac{k^2}{2} (F'_w(W_h^n) \nabla \cdot F(W_h^n), \nabla V_h) \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left[kF(W_{\Gamma h}^n) \cdot n - \frac{k^2}{2} F'_w(W_h^n) \nabla \cdot F(W_h^n) n \right] \cdot V_h, \\ &\quad \forall V_h \in U_{0h} \end{aligned} \tag{77}$$

où U_{0h} est comme dans la méthode précédente.

Dans Lohner [1987], [1985] des résultats spectaculaires sont obtenus (suivi de chocs instationnaires) ; une correction FCT (Boris-Book [1976]) doit être ajoutée pour stabiliser le schéma dans les zones de chocs ; si W^{pn+1} désigne le vecteur des valeurs aux nœuds de la solution de (77) alors le vecteur W_h^{n+1} des valeurs aux nœuds à l'instant suivant est

$$W^{n+1} = W^{pn+1} + cD * M_l^{-1} (M - M_l) W^n,$$

où c est une constante, M la matrice de masse, M_l la matrice de masse avec « mass lumping » D^* un limiteur de flux pour limiter la contribution de $M_l^{-1}(M - M_l)W^n$ à chaque élément de manière à ce que W^{n+1} n'ait pas d'extréma si W^n ou W^{pn+1} n'en ont pas.

Une méthode Predictor-corrector avec viscosité (Dervieux [1985])

On commence par une étape de prédiction dans laquelle W_h^p est constant par morceaux sur chaque élément T et donné par

$$W_h^p|_T = |T|^{-1} \left[\int_T W_h^n - \alpha k \int_{\partial T} F(W_h^n) n_h \right] \quad (78)$$

avec $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ (cf. Peyret [1985]). Puis on calcule W_h^{n+1} en résolvant

$$\frac{1}{k} (W_h^{n+1} - W_h^n, V_h)_h + ((1 - \beta) F(W_h^n) + \beta F(W_h^p), \nabla V_h) - \int_T V_h \cdot F(W_h^n) n + (G((W_h^n) \nabla W_h^n, \nabla V_h)) = 0, \quad \forall V_h \in U_h \quad (79)$$

où $\beta = 1/2 \alpha$ et où $(\cdot, \cdot)_h$ dénote l'approximation du produit scalaire L^2 par mass lumping ; G est choisi proportionnel à h^2 et aux dérivées premières de W_h^n (pour avoir plus de viscosité là où W est irrégulier).

Décentrage par discontinuité

En introduisant une fonction W_h^p moyennée comme dans (78) on peut construire un tenseur flux $F(W_h)$ discontinu aux inter-éléments. A chaque sommet q^i on associe la cellule des demi-éléments voisins σ^i obtenue en divisant chaque triangle par les médianes. Alors W_h^p est la fonction P^0 sur σ^i définie par

$$W_h^p|_{\sigma^i} = \frac{1}{|\sigma^i|} \int_{\sigma^i} W_h dx. \quad (80)$$

En choisissant dans (73) pour V_h la fonction caractéristique de σ^i et après intégration (Petrov-Galerkin weak formulation) on obtient, après une discrétisation explicite en temps :

$$W_h^{n+1}(q^i) = W_h^n(q^i) + \frac{k}{|\sigma^i|} \int_{\partial \sigma^i} F_d(W_h^p) \cdot n \quad \forall i. \quad (81)$$

Sur $\sigma^i \cap \Gamma$, on prend $F_d(W) = F(W)$ en utilisant là où elles interviennent les composantes connues W_Γ . Partout ailleurs $F_d(W)$ est une approximation constante par morceaux de $F(W)$ vérifiant

$$\int_{\partial \sigma^i} F_d(W_h^p) \cdot n = \sum_{j \neq i} \Phi(W_h^p|_{\sigma^i}, W_h^p|_{\sigma^j}) \int_{\partial \sigma^i \cap \sigma^j} n \quad (82)$$

où Φ est une fonction à déterminer de $F(W_h^p|_{\sigma'})$ et $F(W_h^p|_{\sigma''})$; $\Phi(u, v)$ doit vérifier la relation de consistance :

$$\Phi(V, V) = F(V), \quad \forall V. \tag{83}$$

Pour définir Φ on rappelle que

$$F(W) \cdot n = B(W, n) \cdot W \quad \forall W \quad \forall n$$

et qu'il existe $T \in R^{5 \times 5}$ tel que

$$B = T^{-1} A T \tag{84}$$

où A est la matrice diagonale des valeurs propres. On pose

$$A^\pm = \text{diag}(\pm \max(\pm \lambda_i, 0)), \quad B^\pm = T^{-1} A^\pm T \tag{85}$$

$$|B| = B^+ - B^-, \quad B = B^+ + B^-. \tag{86}$$

Parmi les formules de flux les plus classiques mentionnons

$$\Phi^{SW}(V^i, V^j) = B^+(V^i) V^i + B^-(V^j) V^j \quad (\text{Steger-Warming}) \tag{87}$$

$$\Phi^{OS}(V^i, V^j) = \frac{1}{2} \left[F(V^i) + F(V^j) - \int_{V^i}^{V^j} |B(W)| dN \right] \quad (\text{Osher}) \tag{88}$$

Extensions d'ordre 2

Une idée (due à Van Leer) pour augmenter la précision du schéma est de remplacer V^i et V^j par des interpolés V^{i-} et V^{j+} définis sur les inter-éléments par

$$V^{i-} = V^i + (\nabla V)^i \frac{(q^j - q^i)}{2} \tag{89}$$

$$V^{j+} = V^j - (\nabla V)^j \frac{(q^j - q^i)}{2}. \tag{90}$$

Les gradients sont aussi décentrés (cf. Stoufflet *et al.* [1987]). On peut aussi utiliser des éléments discontinus d'ordre plus élevés mais il faut introduire des limiteurs de pentes (Chavent-Jaffré [1986]).

Les méthodes SUPG (Hughes-Mallet [1986], Johnson-Szepessy [1987])

L'idée de base est d'ajouter aux fonctions de base une fonction de décentrage. Considérons le schéma suivant

$$\int_{nk}^{(n+1)k} (W_{h,t} + \nabla \cdot F(W_h), V_h + h(V_{h,t} + A_t(W_h) V_{h,t})) dt + (W_h^{n+} - W_h^{n-}, V_h^{n-}) = 0 \tag{91}$$

où $U^{n\pm}$ sont les valeurs à droite et à gauche de $U(t)$ lorsque $t \rightarrow nk$. On discrétise en espace-temps par des fonctions P^1 en espace et P^1 discontinues en temps. Bien que la méthode soit relativement efficace l'étude théorique de la convergence a fait suggérer 3 modifications (Mallet [1985]) (Johnson-Zsepessy [1987]) :

— l'utilisation de variable d'entropie au lieu des variables physiques de manière à avoir une décroissance de l'entropie directement contenue dans le schéma ;

— le remplacement de h par hM dans (90), où M est une matrice fonction de W_h ;

— l'addition d'une viscosité dite de « shock capturing » (qui n'agit qu'au voisinage d'un choc).

Le schéma final est

$$\int_{nk}^{(n+1)k} \left(A'_0 W_{h,t} + \sum_i A'_i W_{h,x_i}, V_h + h \left(\sum_{i \geq 0} A_i \right)^{-\frac{1}{2}} \left[A'_0 V_{h,t} + \sum_i A'_i V_{h,x_i} \right] \right) dt + (W_h^{n+} - W_h^{n-}, V_h^{n+}) = hd \quad \forall V_h \in V_h^n \quad (92)$$

où

$$V_h^n = \{ U_h, P^1 \text{ continue } x, P^1 \text{ discontinue } t, \text{ tel que } U_h = 0 \text{ sur les parties de } \Gamma \text{ où } W_h \text{ est donné} \} \quad (93)$$

On choisit $a \cong 1, b \ll 1, c \cong 1$, on pose $\nabla U = [U, v, U, x_i]^T$ et on prend

$$d = \int_{\Omega \times]nk, (n+1)k[} a \left(A'_0 W_{h,t} + \sum_i A'_i W_{h,x_i} \right) \frac{\nabla W_h \cdot \nabla V_h}{(b + |\nabla W_h|)} + c \int_{\Omega} |W_h^{n+} - W_h^{n-}| \left(\sum_i W_{h,x_i} V_{h,x_i} \right) \quad (94)$$

Les matrices A'_i sont calculées à partir des fonctions d'entropie $S(W)$ avec $A'_0 = (S,_{ww})^{-1}, A'_i = A_i, A'_0$.

Le schéma est implicite en temps tout comme le schéma de Crank-Nicolson.

Pour l'équation d'Euler en dimension 1 sur $\Omega = R$, on démontre la convergence vers une solution entropique lorsque $h \rightarrow 0$ (cf. Johnson-Zsepessy [1987]). Dans le cas général on peut démontrer que si W_h converge vers W , alors W vérifie la condition d'entropie

$$S(W),_t + \sum_i S,_{w} F_i(W),_{x_i} \leq 0 \quad (95)$$

Remarques générales

A cause de la complexité du problème on ne sait pas démontrer que les algorithmes convergent. Cependant les résultats partiels de Johnson-Zseppsy et la somme des résultats numériques montrent que les méthodes sont fiables.

Les méthodes de viscosité artificielle ont l'avantage d'être simples mais demandent un savoir-faire et un ajustement des constantes en fonction du cas de calcul. Les méthodes de volumes finis semi-explicites sont robustes mais un peu trop dissipatives lorsqu'elles sont d'ordre 1. Les méthodes stabilisées type SUPG sont précises mais chères et dépendent aussi d'un paramètre qu'il faut savoir ajuster. Dans tous les cas il est important d'utiliser une méthode de maillage adaptatif pour bien capturer les discontinuités (Lohner [1987], Palmério *et al.* [1985], Bank [1988], Kikuchi *et al.* [1988]).

6. MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LES ÉQUATIONS D'EULER LINÉARISÉES

Équations d'Euler linéarisées en espace-temps

Pratiquement tout ce qui a été dit pour les équations d'Euler complètes s'applique sans modification aux équations d'Euler linéarisées. On a donc les mêmes familles d'algorithmes :

1. Méthodes centrées avec viscosité artificielle ;
2. Taylor-Galerkin ;
3. Décentrage par discontinuité et problèmes de Riemann ;
4. SUPG/Stabilisation.

Pour les méthodes des deux premières familles qui utilisent principalement des solveurs explicites le gain entre Euler complet et Euler linéarisé ne peut être dû qu'à la diminution du nombre de pseudo-pas de temps nécessaire pour converger à chaque pas de temps, c'est-à-dire peu. Il est vrai que les matrices sont plus simples à reconstruire dans le cas linéaire mais ceci compte peu.

Pour les méthodes implicites du type (3) le gain se mesure en nombre d'itérations de la méthode de quasi-Newton utilisée (GMRES par exemple). Là le gain est plus substantiel. C'est surtout pour les méthodes du type (4) que le gain sera le plus grand puisqu'on peut résoudre le système à chaque pas de temps par une méthode directe.

Il n'y a donc malheureusement que peu de simplifications dues au caractère linéaire des équations pour les méthodes explicites. Pour les méthodes implicites le système à résoudre à chaque pas de temps sera linéaire non symétrique en général. On remplacera ainsi la méthode de GMRES non linéaire ou la méthode de Newton par une méthode de GMRES linéaire ou un bi-gradient conjugué.

Ainsi les méthodes implicites sont avantagées dans l'approche linéarisée

dans la mesure où la convergence est obtenue par une seule résolution d'un problème linéaire, mais celui-ci n'est pas simple et est en général résolu par une méthode itérative.

En résumé les équations d'Euler linéarisées ne sont pas tellement plus faciles à résoudre que les équations non linéaires. Les experts s'accordent à penser que la résolution des équations linéarisées ne fera chuter le temps calcul que d'un facteur 5 au plus. Il faut noter toutefois que la communauté internationale n'a que peu d'expérience sur le système non linéaire en instationnaire.

En revanche l'utilisation de conditions aux limites de transpiration (linéarisation d'Hadamard) semble justifiée. Cela permet d'avoir un maillage fixe, et évite les projections entre plusieurs maillages. Enfin l'utilisation des équations potentiel, linéarisées ou non, permet, si elle est justifiée, un gain de temps calcul substantiel. C'est aussi une bonne méthode pour mettre au point la boucle complète de l'algorithme fluide/structure dans la mesure où il suffira ultérieurement de remplacer le module potentiel par un module Euler.

Remarque 7 : Avant de conclure cette section il faut faire une remarque importante : qu'attend-on des résultats ? Si l'objectif est une étude de stabilité, dans ce cas il faut étudier le déplacement de la partie réelle des valeurs propres des modes de vibration et leur amplification due à la présence du fluide et à l'apport d'énergie des propulseurs. Il faut noter alors qu'il n'est pas aisé de faire une telle analyse en espace-temps et qu'une analyse en espace-fréquence peut être plus judicieuse.

Équations d'Euler linéarisées en espace-fréquence

Le cas des équations d'Euler linéarisées en espace-fréquence est très différent. Le problème ressemble aux équations de Maxwell, il faut utiliser des solveurs adaptés. L'utilisation de conditions aux limites non réfléchissantes est aussi impérative.

Deux voies sont possibles.

1. On rajoute un pseudo-temps dans l'équation, uniquement pour l'algorithme (Hall-Clark [1991]). On résout alors dans le plan complexe, par une méthode explicite en temps, le problème suivant :

$$\partial_t W' + i\omega W' + A(W) : \nabla W' + A(W') : \nabla W = 0. \quad (96)$$

Cette méthode a l'avantage d'être simple mais elle peut être lente. Elle a été utilisée avec succès par Bristeau *et al.* [1992] pour les équations de Maxwell, surtout lorsque cette méthode est accélérée par un problème de contrôle auxiliaire et la méthode HUM (Lions [1989]).

2. On résout le système linéaire complexe par une méthode de bigradient conjugué ou autre (GMRE, Saad [1981]). Le problème est difficile et même pour les équations de Maxwell il est difficile de dépasser des systèmes de

taille $30\,000 \times 30\,000$. Des méthodes adaptées aux problèmes ont été développées par Baspalov *et al.* [1992] ; elles utilisent des préconditionneurs factorisés construits à partir d'une grille différences finies proche de celle utilisée en éléments finis/volumes finis. Ces auteurs sont arrivés à résoudre les systèmes linéaires issus des équations de Maxwell jusqu'à des tailles de $10^6 \times 10^6$ en des temps inférieurs à la demi-heure sur RS6000. Le développement du logiciel est cependant coûteux.

7. ANALYSE MULTI-ÉCHELLES

Dans cette section nous résumons une étude de Majda *et al.* sur la stabilité des chocs, dans un écoulement fluide compressible isentropique, par rapport à des petites perturbations des données. Dans ce qui suit T désigne la température ; θ , par contre, est une variable temporelle rapide.

L'approximation de l'optique non linéaire

Il s'agit d'utiliser une analyse asymptotique inspirée des asymptotiques à haute fréquence pour traiter des petites perturbations ayant une fréquence d'oscillation comparable à l'inverse de leur amplitude. Cette méthode qui semble avoir été popularisée dans l'étude des fronts de flamme ne semble pas, au mieux de notre connaissance, avoir été mise en œuvre pour des problèmes d'aérodynamique. Cela semble pourtant adapté à des effets de vibrations de la structure, de faible amplitude, mais de grande fréquence ; un des avantages de cette approche est, dans ce régime, de tenir vraiment compte de la non-linéarité des équations d'Euler et de conduire à des études de stabilité de l'onde de choc en régime transonique. Il semble utile d'en rappeler le principe. Pour simplifier on supposera que le fluide moyen a une densité constante et que les calculs sont faits dans le vide : les idées s'adaptent bien au cas général. On désigne par $U = \rho, \rho u, \rho \left\{ \frac{|u|^2}{2} + 3/2 T \right\}$ les variables conservatives du fluide : densité, moment cinétique, et énergie interne. On écrit l'équation d'Euler compressible sous la forme abstraite :

$$\partial_t U + \sum_{i=1}^{i=3} \partial_{x_i} F_i(U) = 0 . \tag{97}$$

On utilisera la formule de Taylor

$$F_i(U + \varepsilon V) = F_i(U) + \varepsilon A_i v + \varepsilon^2 \frac{B_i(V, V)}{2} . \tag{98}$$

On introduit une solution sous la forme

$$U_0 + \varepsilon U_1 \left(x, t, \frac{\phi}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 U_2 \left(x, t, \frac{\phi}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon^3) . \tag{99}$$

Dans un premier temps on suppose que ϕ est une fonction scalaire. En fait comme le montre le calcul on peut admettre une dépendance vectorielle, plus de degrés de liberté pour coller à l'analyse avec $\vec{\phi} \in \mathbf{R}^l$, l correspondant en gros aux différentes vitesses caractéristiques simples du système et on se propose de déterminer les fonctions $U_1(x, t, \theta)$ et $U_2(x, t, \theta)$.

En utilisant (98), on reporte (99) dans (97) pour obtenir :

$$\left(\partial_t \phi + \sum_{i=1}^{i=3} A_i(U_0) \partial_{x_i} \phi \right) \partial_\theta U_1(x, \theta) \Big|_{\theta = \frac{\phi}{\varepsilon}} = 0 \quad (100)$$

ce qui correspond à l'annulation du terme degré zéro en ε et

$$\begin{aligned} - \left\{ \left(\partial_t \phi + \sum_{i=1}^{i=3} A_i(U_0) \partial_{x_i} \phi \right) \partial_\theta U_2(x, \theta) \Big|_{\theta = \frac{\phi}{\varepsilon}} \right\} = \\ = \left\{ \sum_{i=1}^{i=3} \partial_{x_i} (A_i(U_0)) + \sum_{i=1}^{i=3} (\partial_{x_i} \phi) B_i(U_1, U_1) \Big|_{\theta = \frac{\phi}{\varepsilon}} \right\}. \quad (101) \end{aligned}$$

On déduit de la relation (100) que $\partial_t \phi$ doit être une valeur propre de la matrice

$$- \sum_{i=1}^{i=3} A_i(U_0) \partial_{x_i} \phi$$

ce qui donne en choisissant la p -ième valeur propre une formule du type suivant :

$$\partial_t \phi + \lambda_p(U_0, \nabla_x \phi) = 0. \quad (102)$$

Quant à U_1 il doit être vecteur propre c'est-à-dire s'écrire sous la forme

$$U_1(x, t, \theta) = \sigma(x, t, \theta) R_p(U_0, \nabla_x \phi). \quad (103)$$

Mais à cause de (102) la résolution de (101) n'est plus immédiate, une alternative de Fredholm, ou plus simplement une condition de Rouché doit être satisfaite. Si on suppose que les valeurs propres sont simples, cette condition revient à dire que le vecteur propre correspondant de l'adjoint $L_p(U_0, \nabla_x \phi)$ de

$$- \sum_{i=1}^{i=3} A_i(U_0) \partial_{x_i} \phi$$

doit être orthogonal au second membre de (101). Cette condition produit une équation différentielle non linéaire pour la fonction σ qui s'écrira sous la forme :

$$\partial_t \sigma + \vec{a}_p \cdot \nabla_x \sigma(x, t, \theta) + c_p \sigma(x, t, \theta) + \frac{b_p}{2} \partial_\theta (\sigma^2(x, t, \theta)) = 0. \quad (104)$$

Dans l'équation (104) les termes a_p et c_p sont indépendants de θ : ils sont donnés par des formules à peu près explicites par rapport à la solution moyenne :

$$\begin{aligned}
 a_p^i &= L_p(U_0, \nabla_x \phi) \cdot A_i(U_0) R_p(U_0, \nabla_x \phi), \\
 c_p &= L_p(U_0, \nabla_x \phi) \cdot \sum_{i=1}^3 \partial_i \{A_i(U_0) R_p(U_0, \nabla_x \phi)\}. \quad (105)
 \end{aligned}$$

Enfin

$$b_p = L_p(\nabla_x \phi) \cdot \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} B(U_0) (R_p(U_0, \nabla_x \phi), R_p(U_0, \nabla_x \phi)).$$

Il est important de remarquer que l'équation (102) est en fait une équation eikonale identique à celle que l'on rencontre en optique géométrique. Elle n'est donc valable qu'en dehors des caustiques (par exemple pour un calcul au voisinage du profil). De même l'équation (104) est à l'exception du terme $\frac{b_p}{2} \partial_\theta(\sigma^2(x, t, \theta))$ une équation de transport linéaire, seul ce dernier terme fait apparaître les effets des non linéarités. Le calcul ci-dessus peut bien sûr être fait en remplaçant la fonction scalaire ϕ par une fonction vectorielle :

$$\vec{\phi} = (\phi_1(x, t, \theta), \phi_2(x, t, \theta) \dots \phi_l(x, t, \theta))$$

chacune des composantes correspondant à une des équations :

$$\partial_t \phi + \lambda_p(U_0, \nabla_x \phi) = 0$$

avec $\leq p \leq l$ avec l désignant le nombre de valeurs propres simples. Le détail des calculs peut être trouvé dans Majda. On doit toutefois remarquer que l'idée d'utiliser les méthodes de l'optique géométrique pour des problèmes non linéaires apparaît pour la première fois dans un travail de Choquet-Bruhat [1969] et a ensuite été étudiée par Majda, Rauch, Joly Métivier etc. dans le cas quasi-linéaire qui est celui de la mécanique des fluides. Une observation importante est que, dans les phénomènes multiphasiques, on peut observer des couplages de phases et ainsi, à cause des non linéarités, avoir des oscillations de fréquences de plus en plus grandes. Il ne semble pas que ces idées aient encore été systématiquement appliquées au problème des « flutters » (en régime transsonique).

8. CONCLUSION

Le problème posé par le CNES était celui de la pertinence de l'approche *Euler linéarisé* pour des calculs de stabilité aéro-élastique, avec en vue les applications aux lanceurs, surtout pour les gains de calculs sur ordinateur.

Étant donné le caractère « ouvert » du sujet, nous avons présenté une étude aussi large que possible du domaine. Pour cela, après avoir donné les équations complètes décrivant le système, nous avons présenté les simplifications plus ou moins standard qu'on peut y apporter pour le rendre abordable à l'étude numérique. Nous avons aussi décrit en § 7 une approche apparemment inconnue en aéroélasticité, mais utilisée en combustion : l'analyse multi-échelle de la propagation des vibrations de faible amplitude et de grande fréquence (c'est à notre connaissance le seul cas où l'on peut analyser en fréquences un phénomène vraiment non linéaire). Nous avons également passé en revue les diverses méthodes numériques adaptées à la résolution de ces équations simplifiées pour des géométries industrielles c'est-à-dire utilisant des maillages non structurés.

On rappelle qu'un calcul complet pour le comportement des fluides autour d'un lanceur (équations de Navier-Stokes) est extrêmement coûteux et nécessite éventuellement des modélisations de turbulence. On rappelle aussi que la linéarisation n'est pas la seule simplification possible et utilisée (équations des petites perturbations par exemple). Par ailleurs les simplifications peuvent et doivent se faire par sous domaines.

La présente étude commence par un rappel de ces diverses simplifications et analyse la pertinence de l'approximation dite Euler linéarisée dans le domaine complet ou dans un sous domaine.

Dans le cas précis de la résolution des équations d'Euler stationnaires ou instationnaires, on estime que la linéarisation complète conduit à un gain de temps d'un facteur entre 5 et 10. En effet les équations non-linéaires sont en général résolues par itérations successives sur des équations linéarisées, avec remise à jour à chaque étape, alors que les équations linéarisées demandent la résolution par méthodes itératives d'un grand système linéaire non symétrique.

Le couplage fluide-structure complet a déjà été réalisé dans des situations simplifiées (dans un réservoir interne par exemple), mais il est extrêmement coûteux. En fait la plupart des études utilisent une représentation modale pour la structure.

Il nous a semblé que cette simplification n'avait pas été étudiée mathématiquement. C'est pour cela que nous avons consacré un paragraphe au traitement mathématique des résonances, comme modèle d'approche du problème. En particulier, il semble que la plupart des auteurs travaillent avec une base modale trop pauvre. Ceci peut être dû au fait que les modes sont obtenus en traitant l'objet isolé dans le vide.

Par ailleurs le couplage fluide-structure nécessite en principe un remaillage du domaine de calcul. Certains auteurs évitent ce remaillage en utilisant une formule approchée, connue des mathématiciens sous le nom de formule d'Hadarnard. Nous justifions ces approximations. Elles nous semblent pertinentes.

Enfin nous mettons en lumière le fait que les analyses de vibrations peuvent se faire de deux manières :

- En suivant le processus en temps ;
- En analysant le processus en fréquence.

Il est important de noter que la deuxième approche ne peut se faire qu'avec des équations linéaires (Euler linéarisé). Classiquement en théorie des vibrations et en théorie du contrôle c'est toujours la deuxième approche qui est utilisée pour obtenir des résultats qualitatifs, valables dans toute une gamme de configuration, par exemple sur la stabilité du processus. Évidemment les problèmes sont encore de très grandes tailles et un calcul de valeur propre n'est pas sûr d'aboutir (on peut restreindre le domaine du calcul à une petite partie du domaine occupé par le fluide) mais Hall (1991) a déjà démontré la faisabilité de cette approche. Cependant les phénomènes transsoniques étant essentiellement non-linéaires (déplacement d'onde de choc par exemple) beaucoup d'experts pensent (mais ont-ils vraiment essayé) que les équations linéarisées rendront très mal compte des phénomènes dans ce régime. Le suivi des processus en temps sera donc probablement plus précis pour comprendre les interactions non-linéaires mais il sera à refaire pour chaque nouvelle configuration.

Il est difficile d'arriver à une conclusion ferme sur l'intérêt respectif de ces méthodes sans plus préciser le problème posé. Il est impératif que le concepteur choisisse avec soins la méthode adaptée aux résultats cherchés. Ainsi si les résultats sont désirés pour toute une gamme de paramètres, l'approche en fréquence pourra être préférée, aux dépens de la précision. Celle-ci ne peut se faire que sur les équations linéarisées. De même les méthodes linéarisées en temps feront gagner un ordre de grandeur sur le temps calcul, éventuellement aux dépens de la précision dans les cas transsoniques.

Cette étude a été réalisée à la demande du CNES en collaboration avec Science & Tec. Nous remercions vivement ces deux organismes. Nous remercions aussi chaleureusement M. Brachet (ENS-Paris) pour sa collaboration. Dans la réalisation de ce rapport nous avons consulté beaucoup d'autres collègues, nous tenons en particulier à remercier pour leur aide Ch. Soize de l'Aérospatiale et K. Y. Fung du Department of Aerospace and Mechanical Engineering-University of Arizona. Enfin les considérations mathématiques sur l'utilisation de l'analyse modale pour l'interaction fluide structure (section 1 et plus précisément remarque 3), ont été inspirées par des discussions avec M. Belishev, LOMI Institute Saint Petersburg CEI. Ces discussions ont été faites dans le cadre du contrat 92/1441/AOOO/DRET/SR. Nous remercions donc également la DRET pour son support.

REFERENCES

- J. L. AZEVEDO, Aeroelastic Analysis of Launch Vehicles in Transonic Flight, *J. Spacecraft*, vol. 26, n° 1, 14-23.
- R. BANK, 1988, *PTLMG User's guide*, Dept of Math, UCSD tech. report.
- J. BATINA, 1989, Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex-Aircraft Aeroelastic Analysis, *AIAA Paper 89-1189-CP*.
- M. BEYLISHER, Y. KURYLEV, 1991, Boundary Control, Wave Field Continuation and Inverse Problems for the Wave Equation, *Computers Math. Applic.*, vol. 22, n°s 4/5, 27-52.
- O. BENDLKSEN, K. KOUSEN, 1987, Transonic Flutter Analysis Using the Euler Equations, *AIAA Paper 87-1238*.
- A. BESPALOV, *Numerical solution of Maxwell equations by fictitious domains*, INRIA Report.
- J. BORIS, D. L. BOOK, 1976, Flux corrected transport, *J. Comp. Phys.*, 20, 397-431.
- M. O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX, *Solution of Helmholtz-Maxwell equations by Variational methods*, INRIA Report (à paraître).
- G. CHAVENT, G. JAFFRÉ, 1986, *Mathematical methods and finite elements for reservoir simulations*, North-Holland.
- Y. CHOQUET-BRUHAT, 1969, Ondes Asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *J. Math. Pures et Appliquées*, 48, 117-158.
- R. DAT, 1976, Détermination des caractéristiques numériques d'une structure par analyse de ses fonctions de transfert, *Rev. Fr. de Mécanique*, 59-69.
- R. DAT, 1978, *Vibrations aéroélastiques*, Cours à l'ENSAE (Sup Aéro), dept, Structures matériaux technologie.
- A. DERVIEUX, 1985, *Steady Euler simulations using unstructured meshes*, Von Karman Lecture notes series 1884-04.
- Ph. DESTUYNDER, B. QUINNEZ, *Tendances actuelles dans les modélisations des phénomènes aéro-élastiques*, Contrat CNES 2/91/004.
- J. DONEA, 1984, A Taylor-Galerkin method for convective transport problems, *J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 101-120 (See also J. DONEA, L. QUARTAPELLE, V. SELMIN, 1987, An analysis of time discretization in the Finite Element Solution of Hyperbolic problems, *J. Comp. Physics*, 70, 2.
- B. ENQUIST and A. MAJDA, 1979, Radiation Boundary Condition for Acoustic and elastic Wave Calculations, *Comm. Pure and Applied Math.*, 32, 313-357.
- C. FARHAT, S. LANTERI, 1992, *Substructure approach for transonic fluid-structure interaction* (Thèse de S. Lanteri), University of Boulder Colorado.
- A. FOURMAUX, A. LE MEUR, *Computation of unsteady phenomena in transonic turbines*, 4th Symp. on Unsteady Aerodynamics, Aachen, Sept. 1987.
- K. FUNG, 1991, *Prediction of flutter at transonic speed*, Int Symp on CFD.

- Y. FUNG, 1969, *An introduction to the theory of Aeroelasticity*, Dover Publication, New York.
- J. GIBB, 1988, *The cause and cure of periodic flow at transonic speed*, ICAS paper 3.10.1.
- J. GOODMAN, 1986, Non linear stability of viscous shock profiles for conservation laws, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 95, 527-563.
- J. GOODMAN, 1991, Remark on the stability of viscous shock waves, *SIAM M. Shearer ed.*, 66-72.
- K. HALL, W. CLARK, *Prediction of unsteady aerodynamics loads in cascades using the linearized Euler eqs on deforming grids*, AIAA 91-3378.
- K. C. HALL and E. F. CRAWLEY, 1989, Calculation of Unsteady Flows in Turbomachinery Using the Linearized Euler Equations, *AIAA Journal*, Vol. 2, n° 6, 777-787.
- K. C. HALL and J. M. VERDON, *Gust Response of a Cascade Operating in a Nonuniform Mean Flow*, presented at the AGARD Propulsion and Energetics Panel 74th Specialists' Meetings on 1, unsteady Aerodynamic Phenomena in Turbomachines, Kirchberg Plateau, Luxemburg, August 28-September 1.
- L. HALPERN, 1982, Absorbing Boundary Conditions for the Discretisation Scheme of the one dimensional Wave Equation, *Math. Comp.*, 38, 415-429.
- L. HALPERN and L. TREFETHEN, 1986, Well posedness of one Way Wave Equation and absorbing Boundary Conditions, *Math. of Comp.*, 47, 176, 421-435.
- R. HIGDON, 1986, Absorbing Boundary Conditions for difference approximation to multidimensionnal Wave Equation, *Math. of Comp.*, 47, 176, 437-459.
- T. J. R. HUGHES, M. MALLET, 1986, A new finite element formulation for computational fluid dynamics, *Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 54, 341-355.
- J. HUNTER, A. MAJDA, R. ROSALES, 1986, Resonantly Interacting Weakly Non Linear Hyperbolic Waves II : Several Space Variables, *Stud. Appl. Math.*, 75, 187-226.
- A. JAMESON, 1978, Transonic flow calculations, In *Numerical methods in fluid mech.* H. Wirz, J. Smolderen eds. McGraw-Hill, 1-87.
- C. JOHNSON, A. SZEPESSY, 1987, On the convergence of streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws, in *Numerical methods for compressible flows*, T. E. Tedzuyar ed. AMD-78.
- J. L. JOLY, G. METIVIER, J. RAUCH, *Coherent and Focusing Multidimensional Nonlinear Geometric Optics*, Prépublication n° 9205 Université de Bordeaux I, U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique, 351 Cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.
- 1990, Formal and Rigorous Nonlinear High Frequency Hyperbolic Waves, in *Proceedings of Varenna Conference on Nonlinear Hyperbolic Equations and Field Theory*, M. K. Murthy, SD. Spagnolo eds., Pitman Research Note in Math. Series, 1992, 121-143.
- N. KIKUCHI, T. TORIGAKI, 1988, Adaptive finite element methods in computed aided engineering, *Danmarks Tekniske HOJSKOLE, Matematisk report*, 1988-09.

- L. LANDAU, E. LIFSCHITZ, 1953, *Mécanique des Fluides*, MIR Moscou.
- P. LAX, R. PHILLIPS, 1989, *Scattering theory* (revised ed.), Academic Press.
- J. LE BALLEUR, Ph. GIRODOUX, 1984, Méthode numérique semi-implicite et instationnaire d'interaction fluide visqueux-fluide parfait pour les écoulements décollés transsoniques, *La Recherche Aérospatiale*, French and English editions.
- J. LE BALLEUR, Ph. GIRODOUX, 1985, *Calculs d'aérodynamique instationnaire sur des configurations aéroélastiques 2D et 3D définies par l'AGARD*, ONERA pub 1985.
- A. LERAT, 1985, Implicit methods of second-order accuracy for the Euler equations, *AIAA Paper 83-1925*, *AIAA Journal*, vol. 23, 33-40.
- D. R. LINDQUIST and M. B. GILES, 1991, On the Validity of Linearized Unsteady Euler Equations with Shock Capturing, *AIAA Paper 91-1598-CP*, Honolulu, Hawaii, June 24-27.
- J. L. LIONS, 1989, la méthode HUM, Masson.
- R. LOHNER, 1987, 3D grid generation by the advancing front method, in *Laminar and turbulent flows*, C. Taylor, W. C. Habashi, H. Hafez eds. Pinneridge press.
- R. LOHNER, K. MORGAN, J. PERAIRE, O. C. ZIENKIEWICZ, Finite element methods for high speed flows, *AIAA paper*, 85, 1531.
- A. MAJDA, *Non linear Geometric Optic for Hyperbolic systems of Conservation Laws*, IMA, volume 2, Springer Verlag, New York, 115-1165.
- G. MAJDA, W. STRAUSS et M. WEI, 1986. Imaginary poles of radial potentials, *Tech. Report.*, Minneapolis MN55455.
- A. MAIDA and R. ROSALES, 1984, Resonantly Interacting Weakly Non Linear Hyperbolic Waves I : a Single Space Variables, *Stud. Appl. Math.*, 71, 149-179.
- M. MALLET, 1985, *A finite element method for computational fluid dynamics*, Doctoral thesis, University of Stanford.
- H. MORAND et R. OHAYON, *Interactions Fluides-Structures RMA*, 23, Masson.
- B. PALMERIO, V. BILLET, A. DERVIEUX, J. PERIAUX, 1985, Self adaptive mesh refinements and finite element methods for solving the Euler equations, *Proceeding of the ICFD conf.*, Reading.
- R. PEYRET, T. TAYLOR, 1985, *Computational methods for fluid flows*, Springer series in computational physics.
- O. PIRONNEAU, 1983, *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer.
- F. PLATZER, O. CARTA, 1987, *Unsteady turbomachinery aerodynamics*, vol. 1, AGARD-AG-298.
- O. POISSON, 1993, *Calcul des pôles de résonance associés à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques en dimension 2*, Thèse Université de Paris Dauphine, UER Mathématiques de la décision.
- Y. ROCARD, 1943, *Dynamique Générale des vibrations*, Masson.
- Y. SAAD, 1981, Krylov subspace methods for solving unsymmetric linear systems, *Math of Comp.*, 37, 105-126.
- E. SANCHEZ-PALENCIA, 1980, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture notes in physics*, 127.

- T. SHIEH, J. SCHOEN and K. FUNG, Techniques for Accurate, Efficient Computation of Unsteady Transonic Flow, *AIAA 91-0597*, 1-5.
- C. SOIZE, 1990, *Couplage fort fluide parfait, couche limite 2D compressible dans le cas des profils à bord d'attaque aigu. Cas Stationnaire*, Rapport ONERA n. 42/1621 RY 093 R.
- C. SOIZE, 1991, *Couplage fort fluide parfait, couche limite 2D compressible dans le cas des profils à bord d'attaque aigu, cas instationnaire des profils isolés et cas stationnaire des grilles d'aubes*, Rapport Onera n. 43/1621 RY 093 R, 006.
- C. SOIZE, 1992, Strong coupling between inviscid fluid and boundary layer for airfoils with a sharp edge, II, 2D unsteady case for isolated airfoil and straight blade cascade, *Rech. Aérop.*, 3, 23-53.
- B. STOUFFLET, J. PERIAUX, L. FEZOU, A. DERVIEUX, 1987, Numerical simulations of 3D hypersonic Euler flows around space vehicles using adaptive finite elements, *AIAA paper 8705660*.
- M. VAN DYKE, 1964, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press New York and London, 99-120.
- V. VENKATAKRISHNAN and A. JAMESON, 1988, Computation of Unsteady Transonic Flows by the Solution of Euler Equations, *AIAA Journal*, vol. 26, n° 8, 974-981.