

R. BOYER

Algorithmes de type F.A.C. en optimisation convexe

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 28, n° 1 (1994), p. 95-119

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1994__28_1_95_0

© AFCET, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**ALGORITHMES DE TYPE F.A.C. (*)
EN OPTIMISATION CONVEXE**par R. BOYER ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *Le but du travail est la description et l'étude de nouveaux algorithmes de type F.A.C. (Fast adaptive composite grid method) dans le contexte de l'optimisation convexe. Ces algorithmes combinent des techniques multigrilles à des techniques de décompositions de domaines. On traite d'abord le cas sans contrainte (l'algorithme construit est une extension de celui proposé par McCormick [8] dans le cas quadratique). Pour les problèmes avec contraintes, on se restreint pour la construction de nouveaux algorithmes de type F.A.C. aux contraintes de type obstacle.*

Abstract. — *The goal of this paper is the description and the study of new algorithms of F.A.C. type in a convex optimization background. The F.A.C. method (cf. McCormick [8]) combines multigrid technique with domain decomposition strategy. First we treat the case of optimization without constraint (the proposed algorithm could be considered as an extension of McCormick algorithms in the quadratic case). Secondly, in case of constraints of « obstacle » type : $C = \{v \in V | v \geq c\}$, the built algorithms are obtained in a similar fashion. For each method, a global convergence theorem is demonstrated under regularity hypotheses on the function to minimize.*

1. INTRODUCTION

Beaucoup de problèmes aux limites de la mécanique ou de la physique peuvent se formuler en termes de minimisation de fonctionnelles convexes. Pour certains de ces problèmes (en mécanique du solide notamment), la minimisation se fait non pas sur un espace entier, mais sur un ensemble admissible convexe fermé de type « cône positif ».

Nous avons présenté dans [1], [2] des algorithmes multigrilles pour la résolution de tels problèmes.

Faisant suite à ce travail, et en nous inspirant des résultats de McCormick sur la méthode F.A.C. [7] et [8], nous présentons ici une extension de cette

(*) Manuscrit reçu le 25 septembre 1991 et sous forme révisée le 28 décembre 1992.

(¹) Université de Provence-UFR-MIM-3 Place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3.

méthode à des problèmes d'optimisation pour lesquels la fonctionnelle convexe à minimiser n'est pas nécessairement quadratique et dans les cas suivants : sans contrainte, avec contrainte de type cône positif.

Nous rappelons brièvement les idées maîtresses de la méthode F.A.C. (2 grilles).

Etant donné un maillage (grossier) de base sur un domaine Ω , on considère un raffinement local sur un (ou plusieurs) sous-domaine(s) Ω_a de Ω ; l'idée de la méthode F.A.C. pour obtenir une solution approchée sur un tel maillage composite est d'effectuer à chaque itération les deux étapes suivantes :

- une correction sur le maillage grossier (comme dans les méthodes 2 grilles standards) ;
- une correction (résolution) sur les sous-domaines locaux raffinés Ω_a .

Il s'agit donc d'une technique alliant algorithme multigrille [5] [8] et décomposition de domaines.

Les algorithmes présentés ici (*cf.* aussi [3]) comportent, de la même façon, deux étapes à chaque itération. Dans chacune des étapes le problème d'optimisation à résoudre est du même type que le problème initial.

En pratique ces problèmes ne seront bien sûr résolus que de façon approchée.

Il est important de souligner que, pour certains problèmes pour lesquels le sous-domaine raffiné comporte plusieurs composantes connexes, les résolutions locales dans l'étape 2 peuvent s'effectuer en parallèle.

L'étude théorique (§ 3-2 et § 4-2) établit, sous des hypothèses classiques en optimisation, un résultat de convergence globale de tels procédés pour les deux cas traités.

Enfin on montre au § 4.4 sous une hypothèse supplémentaire (non dégénérescence) qu'après un nombre fini d'itérations les contraintes saturées sont fixées définitivement.

2. PROBLÈMES MODÈLES - HYPOTHÈSES - NOTATIONS

2.1. Problème type abstrait

a) *Cas sans contrainte* :

Soit V un espace de Hilbert de dual V' , et soit F une fonctionnelle, définie sur V à valeurs dans R .

On s'intéresse au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \hat{u} \in V \text{ vérifiant :} \\ F(\hat{u}) \leq F(v) \quad \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

b) *Cas avec contraintes* :

Soit K un convexe fermé d'intérieur non vide de V de type cône positif. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \hat{u} \in K \text{ vérifiant :} \\ F(\hat{u}) \leq F(v) \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.2)$$

On précisera ci-dessous les hypothèses sur l'application F pour que ces deux problèmes aient une solution unique.

2.2. Hypothèses

On suppose que V est dense dans un espace de Hilbert réel H :

$$V \subset H$$

V' désigne le dual de V et on identifie H à son dual.

La fonctionnelle F est supposée satisfaire les hypothèses suivantes :

H1 : F est 2 fois Fréchet-dérivable et F' est lipschitzienne :

$$\exists M > 0 \text{ t. q. } \|F'(u) - F'(v)\|_{V'} \leq M \|u - v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (2.3)$$

H2 : F est fortement convexe :

$$\exists \alpha > 0 \text{ t. q. } (F'(u) - F'(v), u - v) \geq \alpha \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V \quad (2.4)$$

où $(,)$ désigne la forme de dualité (V', V) , identifiée au produit scalaire sur H .

Comme F est supposée 2 fois dérivable, on a de façon équivalente :

$$\exists \alpha > 0 \text{ t. q. } (F''(u)v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall u, v \in V \quad (2.5)$$

H3 : F'' est supposée uniformément continue sur tout borné \mathbb{B} de V .

Plus précisément, on suppose qu'il existe une application δ croissante de $R^+ \rightarrow R^+$ telle que : $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = 0$ (par ex. : $\delta(t) = Ct^n$, $C > 0$, $n \in N$) de

sorte que :

$$\|F''(u) - F''(v)\|_{\mathbb{L}(V, V')} \leq \delta(\|u - v\|) \quad \forall u, v \in \mathbb{B}. \quad (2.1)$$

2.3. Résultats d'existence et d'unicité

Sous les hypothèses précédentes H1 et H2 les problèmes (2-1) et (2-2) admettent chacun une solution unique (cf. [4] pour la démonstration de ce résultat).

Remarques :

— Pour certains problèmes ces hypothèses pourront être affaiblies, quitte à n'obtenir alors que des résultats locaux.

— L'hypothèse H3, utilisée dans la remarque 3.2.1, sera importante dans une étude ultérieure sur la vitesse de convergence.

2.4. Exemple de problème sans contrainte

On considère le problème suivant :

Etant donné $a, f \in C^0(\Omega)$, trouver u solution de :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad}(u)) + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = -g(u) & \text{sur } \partial\Omega \\ \text{avec : } a(x) > 0 & \text{sur } \Omega \\ g' & \text{continue sur } R \text{ et } g'(z) \leq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type (1.1), F étant la fonctionnelle suivante :

$$\int_{\Omega} (a/2 \|\operatorname{grad}(u)\|^2 + u^2 - fu) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} a \cdot \ell(u) \, d(\partial\Omega)$$

avec :

$$\ell(u) = \int_0^u g(z) \, dz,$$

et V l'espace $H^1(\Omega)$.

2.5. Discrétisation. Problèmes discrets**2.5.1. Discrétisation. Notations**

A l'espace V , on associe une famille de sous-espaces emboîtés V_i $i = 0, M$ de dimension n_i (obtenus par exemple par une discrétisation de type éléments finis) :

$$V_i \subseteq V_{i+1} \subset V$$

V_0 désigne le sous-espace le plus « grossier » (i.e. correspondant au maillage le plus grossier).

V_M désigne le sous-espace le plus « fin » (i.e. correspondant au maillage le plus fin).

On considère sur ces sous-espaces V_i les produits scalaires induits respectivement par V et par H .

On note : W_i les espaces euclidiens R^{n_i} isomorphes aux sous-espaces V_i .

Ainsi donc, à un élément quelconque u_i de V_i est associé un élément x_i de W_i . On note $[x_i]_j$ la j -ième composante de x_i .

(Par exemple dans une discrétisation éléments finis P_1 , on associe à u_i le vecteur x_i des valeurs nodales).

I_{i-1}^i les prolongements de W_{i-1} dans W_i , supposés injectifs linéaires et continus :

$$\|I_{i-1}^i\| < C$$

I_i^{i-1} les « restrictions » de W_i dans W_{i-1} avec :

$$I_i^{i-1} = (I_{i-1}^i)' \quad ((\)' : \text{application adjointe}).$$

(Exemple de prolongement I_{i-1}^i).

Dans le cas unidimensionnel avec une discrétisation éléments finis P_1 et maillage fin obtenu en divisant par 2 chaque intervalle du maillage grossier

I_{i-1}^i est donné par une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$



Pour les problèmes avec contraintes, on associe au cône K une famille de cônes discrets fermés K_i vérifiant :

$$K_i \subseteq K_{i+1} \subseteq K \quad \forall i.$$

On note alors C_i les cônes fermés dans W_i correspondant aux K_i :

$$x_i \in C_i \Leftrightarrow u_i \in K_i.$$

Lorsque le convexe K est du type cône positif, les convexes C_i sont alors du type :

$$C_i = \{x_i \in W_i \mid x_i \geq c_i\} \quad \text{avec} \quad (c_i)_j \in R \cup \{-\infty\} \quad \forall j = 1, \dim(W_i).$$

Nous ne travaillerons dans la suite que sur des convexes discrets de ce type.

On supposera de plus, pour les problèmes avec contraintes, que les opérateurs de prolongement satisfont à :

$$\mathbf{H4} : \sum_{\ell} [I_{i-1}^i]_{k,\ell} \leq 1 \quad \forall k.$$

Cette hypothèse supplémentaire est en général satisfaite pour des discrétisations par éléments finis de Lagrange.

On définit enfin les fonctionnelles discrètes F_i de la façon suivante :

$$F_i : x_i \in W_i \equiv \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow F_i(x_i) \in \mathbb{R}$$

telle que :

$$\forall u_i \in V_i \quad F_i(x_i) = F(u_i)$$

(où x_i désigne l'élément de W_i correspondant à u_i).

On remarque qu'on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_{i-1}(x_{i-1}) &= F_i(I_{i-1}^i(x_{i-1})) \quad \forall x_{i-1} \in W_{i-1} \\ F'_{i-1}(x_{i-1}) &= I_i^{i-1}(F'_i(I_{i-1}^i(x_{i-1}))) \quad \forall x_{i-1} \in W_{i-1}. \end{aligned}$$

2.5.2. Problèmes discrets

On les définit de la façon suivante :

Pour i fixé tel que : $0 \leq i \leq M$.

Cas sans contrainte :

Trouver $x_i^* \in W_i$ tel que :

$$F_i(x_i^*) \leq F_i(z_i) \quad \forall z_i \in W_i.$$

Cas avec contrainte :

Trouver $x_i^* \in C_i$ tel que :

$$F_i(x_i^*) \leq F_i(z_i) \quad \forall z_i \in C_i.$$

Existence et unicité des solutions des problèmes discrets.

Sous les hypothèses du § 2.2, chacun des problèmes discrets définis ci-dessus admet une solution unique.

2.5.3. Notions de maillages composites et sous-espaces discrets correspondants

En vue de faciliter la compréhension de l'algorithme F.A.C. qui sera décrit au § 3, on précise sur un exemple la construction des sous-espaces de discrétisation intervenant dans l'algorithme.

Exemple de construction d'un maillage composite à 2 niveaux et des sous-espaces de discrétisation correspondants (éléments finis P1).

Soit Ω un ouvert borné régulier de R^2 , de frontière $\partial\Omega$, et soit $V = H_0^1(\Omega)$.

Un maillage composite à 2 niveaux sur Ω sera construit de la façon suivante.

A partir d'une triangulation « grossière » T_0 de Ω , on raffine certains éléments de T_0 contenus dans un sous-domaine Ω_a (cf. figure 1) de façon à conserver une triangulation admissible. On note alors T_1 la nouvelle triangulation composite ainsi obtenue.

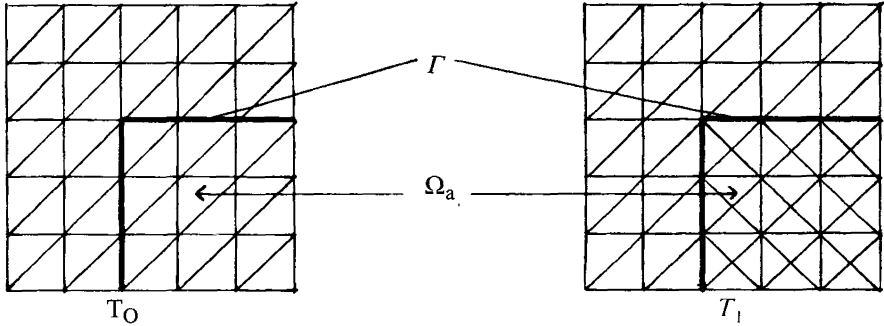


Figure 1.

On peut définir alors à partir de T_0 et de T_1 les sous-espaces discrets suivants :

$$V_0 = \{u_0 \in C^0(\bar{\Omega})/u_0|_{T_k} \in P_1 \forall T_k \text{ triangle de } T_0 \text{ et } u_0|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$V_1 = \{u_1 \in C^0(\bar{\Omega})/u_1|_{T_k} \in P_1 \forall T_k \text{ triangle de } T_1 \text{ et } u_1|_{\partial\Omega} = 0\}$$

et concernant le raffinement local :

$$V_{1,a} = \{u_1 \in V_1/u_1|_{T_k} = 0 \quad \forall T_k \in T_1 \cap T_0\} .$$

On note enfin Γ « l'interface » entre la zone affinée Ω_a et la zone restante. Les dimensions des espaces V_0 , V_1 et $V_{1,a}$ sont notées respectivement :

n_0 , n_1 et $n_{1,a}$; enfin $n_{1,\Gamma}$ désigne le nombre de nœuds situés sur l'interface.

On désigne respectivement par :

W_0 l'espace R^{n_0} correspondant à V_0

W_1 l'espace R^{n_1} correspondant à V_1

$W_{1,a}$ l'espace $R^{n_{1,a}}$ correspondant à $V_{1,a}$.

On est alors amené à considérer la partition suivante des degrés de liberté de V_1 :

$$\{1 \dots n_1\} = J_{1,na} \cup J_{1,a} \quad \text{avec} \quad \text{card}(J_{1,a}) = n_{1,a}.$$

L'ensemble $J_{1,na}$ se partitionne en :

$$J_{1,na} = J_{0,na} \cup J_{1,r} \quad \text{avec} \quad \text{card}(J_{1,r}) = n_{1,r}.$$

Remarque : On peut bien sûr étendre ce type de construction pour plusieurs (> 2) niveaux de raffinement ; on remplace alors respectivement les indices 0 et 1 par $i - 1$ et i pour $1 \leq i \leq M$ (M indique le niveau le plus haut tandis que 0 indique le niveau le plus bas.)

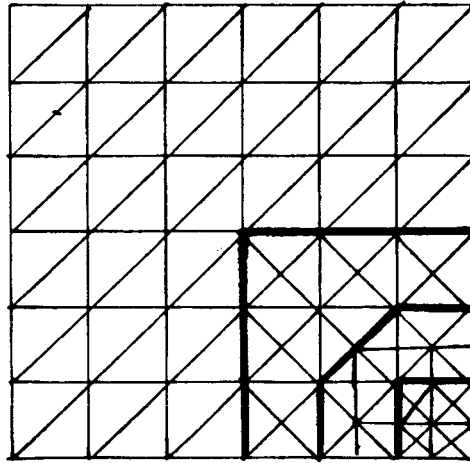


Figure 2.

3. OPTIMISATION SANS CONTRAINTE

3.1. Description de l'algorithme de type F.A.C. à 2 grilles

Notations :

Dorénavant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans les espaces W_1 et W_0 .

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } x_1^* \in W_1 \text{ tel que :} \\ F_1(x_1^*) \leq F_1(z_1) \quad \forall z_1 \in W_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

en utilisant les espaces W_0 , W_1 et $W_{1,a}$ (i.e. les 2 niveaux 0 et 1).

Description d'une itération :

$$x_1^k \in W_1 \rightarrow x_1^{k+1} \in W_1 .$$

Une itération comporte deux étapes :

$x_1^k \rightarrow x_1^{k+1/2}$: étape de « correction sur grille grossière »

$x_1^{k+1/2} \rightarrow x_1^{k+1}$: étape de « correction locale ».

a) Etape de « correction sur grille grossière » (cf. [1], [2])

Soit $\tilde{x}_0^k \in W_0$ « judicieusement choisi » (par exemple $\tilde{x}_0^k = I_1^0 x_1^k$), on considère la fonction $\Phi_0^k : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$d_0 \in W_0 \mapsto \Phi_0^k(d_0) = F_0(\tilde{x}_0^k + d_0) + \langle I_1^0 F_1'(x_1^k) - F_0'(\tilde{x}_0^k), d_0 \rangle \quad (3.2)$$

on cherche alors $d_0^k \in W_0$ solution du problème :

$$\Phi_0^k(d_0^k) \leq \Phi_0^k(y_0) \quad \forall y_0 \in W_0 . \quad (3.2')$$

Enfin on construit $x_1^{k+1/2}$ par :

$$x_1^{k+1/2} = x_1^k + \beta^k I_1^0 d_0^k \quad (3.3)$$

où β^k est choisi tel que :

$$- (1 - \sigma) \beta^k \langle I_1^0 F_1'(x_1^k), d_0^k \rangle \geq F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \quad (3.4a)$$

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \geq -\sigma \beta^k \langle I_1^0 F_1'(x_1^k), d_0^k \rangle \quad \text{où } \sigma \in [0, 1/2] . \quad (3.4b)$$

Remarques : $I_1^0 d_0^k$ est une direction de « descente » pour F_1 et donc le choix de β^k est possible (cf. § 3.2 pour la démonstration) ; un tel choix dû à Armijo est classique en optimisation (cf. [9]). D'autres choix sont bien évidemment possibles (cf. [4]), par exemple celui de la plus profonde descente.

Il est important d'un point de vue pratique que la détermination de β_k soit peu coûteuse.

On montre, à ce sujet au § 3.2.1, que si k est assez grand (dès que x^k est assez proche de x_1^*) et si le maillage « grossier » est suffisamment fin, alors on peut prendre $\beta^k = 1$.

— Enfin dans le cas quadratique : $F_1(x_1) = 1/2 x_1^t A_1 x_1 - x_1^t b_1$ et la correction ci-dessus avec $\beta^k = 1$ coïncide avec la correction classique des méthodes 2-grilles.

— En pratique le calcul de d_0^k ne se fera que de façon approchée : au lieu de (3-2') d_0^k sera calculé tel que : $\| \Phi_0^{k'}(d_0^k) \| \leq \varepsilon_k$.

b) **Etape de « correction locale »** : $x_1^{k+1/2} \in W_1 \rightarrow x_1^{k+1} \in W_1$.

On désigne par $\delta x_{1,a}^k$ la solution de

$$F_1(x_1^{k+1/2} + \delta x_{1,a}^k) \leq F_1(x_1^{k+1/2} + \delta x_{1,a}) \quad \forall \delta x_{1,a} \in W_{1,a} \quad (3.5)$$

et on pose :

$$x_1^{k+1} = x_1^{k+1/2} + \delta x_{1,a}^k. \quad (3.6)$$

Remarques : La détermination de $\delta x_{1,a}^k$ nécessite la résolution d'un problème d'optimisation localisé sur $\Omega_{1,a}$; si $\Omega_{1,a}$ n'est pas connexe, on pourra alors dans de nombreux cas décomposer ce problème en sous-problèmes indépendants sur chacune des composantes connexes et résoudre ces sous-problèmes *en parallèle*.

— *Dans la pratique* on considérera uniquement une *approximation* de $\delta x_{1,a}^k$ obtenue par application d'un algorithme d'optimisation approprié.

Remarque : En s'inspirant de l'algorithme proposé par McCormick [8] dans le cas non linéaire, on pourrait aussi envisager à la place de (2-5) (2-6) l'étape de « correction locale » suivante :

Soit $\varphi_{1,\ell}^k$ la fonction de $W_{1,a}$ dans \mathbb{R} définie par : $\forall \delta x_{1,a} \in W_{1,a}$

$$\varphi_{1,\ell}^k(\delta x_{1,a}) = F_1(\tilde{x}_{1,\ell}^k + \delta x_{1,a}) + \langle I_1^{1,\ell} F_1'(x_1^{k+1/2}) - F_1'(\tilde{x}_{1,\ell}^k), \delta x_{1,a} \rangle$$

où $\tilde{x}_{1,\ell}^k$ est un élément « bien choisi » dans $W_{1,a}$ et $I_1^{1,\ell}$ désigne l'opérateur de restriction sur $W_{1,a}$.

On note enfin $\delta x_{1,a}^k = \text{Arg Min } \varphi_{1,\ell}^k$ sur $W_{1,a}$.

On calcule alors : $x_1^{k+1} = x_1^{k+1/2} + \beta_{1,\ell}^k \delta x_{1,a}^k$ où $\beta_{1,\ell}^k$ est calculé de façon analogue à l'étape précédente ; on a alors :

$$F_1(x_1^{k+1}) \leq F_1(x_1^{k+1/2}).$$

Remarque : En pratique le calcul de $\delta x_{1,a}^k$ ne se fera que de façon approchée.

3.2. Convergence de l'algorithme 2-grilles

Dans le cas des problèmes d'optimisation convexe étudiés ici, on montre le résultat de **convergence globale** suivant :

THÉORÈME 1 : *Sous les hypothèses H1, H2, la suite engendrée par l'algorithme 2-grilles ((2.3)-(2.6)) converge, quel que soit le vecteur initial, vers la solution x_1^* du problème (2.1).*

Démonstration : D'abord l'étape de correction sur grille grossière est une descente pour la fonction F_1 .

Voici en bref quelques éléments de preuve : par construction de d_0^k on a $\Phi_0^{k'}(d_0^k) = 0$ et par définition de Φ_0^k

$$F'_0(\tilde{x}_0^k + d_0^k) + I_1^0 F'_1(x_1^k) - F'_0(\tilde{x}_0^k) = 0 .$$

D'après H2 : $\langle -I_1^0 F'_1(x_1^k), d_0^k \rangle \geq \alpha \|d_0^k\|_0^2$ ce qui signifie que $I_1^0 d_0^k$ définit bien une « direction de descente » puisque

$$\langle F'_1(x_1^k), I_1^0 d_0^k \rangle \leq 0 .$$

D'après H1, on déduit aussi :

$$\alpha \|d_0^k\|_0 \leq \|I_1^0 F'_1(x_1^k)\| \leq M \|d_0^k\|_0 . \tag{3.8}$$

En considérant le choix (3.4a) (3.4b) pour β^k , on peut écrire par utilisation d'un développement de Taylor de $F(x_1^{k+1/2})$:

$$\frac{\sigma \langle -I_1^0 F'_1(x_1^k), d_0^k \rangle}{\langle F''_1(\tilde{w}_1^k) I_1^0 d_0^k, I_1^0 d_0^k \rangle} \leq \beta^k \leq \frac{+2(1-\sigma) \langle -I_1^0 F'_1(x_1^k), d_0^k \rangle}{\langle F''_1(\tilde{w}_1^k) I_1^0 d_0^k, I_1^0 d_0^k \rangle}$$

où \tilde{x}_1^k désigne un point intermédiaire entre x_1^k et $x_1^{k+1/2}$, d'où la minoration : $\beta^k \geq \frac{\sigma \alpha}{M}$ et l'inégalité :

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \geq \eta \|I_1^0 F'_1(x_1^k)\|^2 , \tag{3.9}$$

où η est une quantité positive ne dépendant que de α , M et σ .

D'autre part, par construction, l'étape de « correction locale » est une descente pour la fonction F_1 .

La suite $(F_1(x_1^k))$ est donc décroissante ; comme elle est bornée inférieurement par $F_1(x_1^*)$, elle est donc convergente et on a donc :

$$\text{Lim}_{k \rightarrow \infty} (F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1})) = 0 \tag{3.10}$$

et donc à l'aide de (3.9), (3.8), (3.3) et du fait que β^k est borné :

$$\text{Lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_1^k - x_1^{k+1/2}\| = 0 . \tag{3.11}$$

Par construction l'étape (3.5) (3.6) implique :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1^{k+1}) = 0 \quad \text{pour } j \in J_{1,a} \text{ (indices locaux fins)} \tag{3.12}$$

et à l'aide de l'hypothèse de forte convexité on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1^{k+1} - x_1^{k+1/2}\| = 0. \quad (3.13)$$

D'autre part, puisque I_1^0 est l'identité sur $J_{1,a}$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1^{k+1}) = 0 \quad \forall j \in J_{1,a}.$$

Enfin pour les indices j de l'interface $j \in J_{1,r}$, on a donc :

$$\left(I_1^0 F_1'(x_1^k)_j = \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1^k) + \sum_{\substack{m \in J_{1,a} \\ (I_1^0)_{m,j} \neq 0}} [I_1^0]_{j,m} \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x_1^k) \right)$$

et donc d'après ce qui précède :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1^k) = 0 \quad \forall j \in J_{1,r}$$

d'où finalement :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_1'(x_1^k) = 0.$$

La convergence de x_1^k vers x_1^* se déduit alors aisément de l'hypothèse H2 de forte convexité.

3.2.1. Remarque importante

Pour diminuer les coûts de calculs, on montre dans le lemme ci-dessous qu'on peut choisir $\beta^k = 1$ dans un voisinage de la solution à condition de supposer l'hypothèse supplémentaire suivante :

H5 le maillage « grossier » H est suffisamment fin pour que :

$$\ll I_0^1 I_1^0 x_1^* - x_1^* \text{ soit suffisamment petit} \gg.$$

LEMME. On suppose réalisées les hypothèses H3 et H5 (ci-dessus).

Alors il existe un rang K tel que pour $k > K$ on peut prendre $\beta^k = 1$ dans (2.3).

Démonstration : On utilise encore un développement de Taylor : $x_1^{k+1/2} = x_1^k + I_0^1 d_0^k$, d'où

$$F_1(x_1^{k+1/2}) = F_1(x_1^k) + \langle F_1'(x_1^k), I_0^1 d_0^k \rangle + \frac{1}{2} \langle F_1''(x_1^k + \theta I_0^1 d_0^k) I_0^1 d_0^k, I_0^1 d_0^k \rangle \quad (3.15)$$

avec

$$\theta \in]0, 1[,$$

mais par définition de d_0^k :

$$\langle F'_1(x_1^k), I_0^1 d_0^k \rangle = - \langle F''_1(I_0^1(\tilde{x}_0^k + \theta' d_0^k)) I_0^1 d_0^k, I_0^1 d_0^k \rangle$$

avec $\theta' \in]0, 1[$

d'où :

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) = \langle F''_1(I_0^1(\tilde{x}_0^k + \theta' d_0^k)) I_0^1 d_0^k, I_0^1 d_0^k \rangle - \frac{1}{2} \langle F''_1(x_1^k + \theta I_0^1 d_0^k) I_0^1 d_0^k, I_0^1 d_0^k \rangle. \quad (3.16)$$

On pose alors respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta_0 F'' &= \frac{1}{2} \|F''_1(I_0^1(\tilde{x}_0^k + \theta' d_0^k)) - F''_1(I_0^1 I_1^0 x_1^*)\| \\ \Delta_1 F'' &= \frac{1}{2} \|F''_1(x_1^k + \theta I_0^1 d_0^k) - F''_1(x_1^*)\| \\ \Delta_* F'' &= \frac{1}{2} \|F''_1(I_0^1 I_1^0 x_1^*) - F''_1(x_1^*)\| \end{aligned}$$

d'où :

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \geq (\alpha/2 - \Delta_0 F'' - \Delta_1 F'' - \Delta_* F'') \|I_0^1 d_0^k\|^2. \quad (3.17)$$

Or d'après les résultats de convergence, les quantités $\Delta_0 F''$, $\Delta_1 F''$ peuvent être rendues aussi petites que l'on veut pour k suffisamment grand, tandis que la quantité $\Delta_* F''$ sera petite si le maillage grossier est suffisamment fin (résultat d'approximation).

Ainsi donc pour k suffisamment grand et H assez petit pour satisfaire H5 l'inégalité (3.17) devient :

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \geq \zeta \|I_0^1 d_0^k\|^2 \quad (3.17')$$

avec $\zeta > 0$. (c.q.f.d.).

3.3. Extension de l'algorithme au cas multigrille

Comme pour la méthode multigrille « classique » on remarque dans le cas de raffinements successifs emboîtés (cf. figure 2) que le problème à résoudre dans l'étape de correction sur « grille grossière » est du même type que le problème initial : en effet la fonctionnelle à minimiser est constituée de la fonction discrète sur le maillage considéré, augmentée d'un terme linéaire et on peut donc envisager d'appliquer à ce problème le même algorithme.

**Description récursive formelle d'une itération de la procédure en V-cycle :
MGFAC (ℓ, i, x, r)**

Notations

- i : niveau d'appel intermédiaire de la procédure
 ℓ : niveau d'appel
 i_0 : niveau le plus bas
 F_i : fonction discrète sur le niveau i
 F'_i : dérivée de la fonction discrète F_i sur le niveau i
 r : résidu du niveau $(i + 1)$ projeté sur le niveau i
 x : vecteur (itéré) en entrée ou sortie de la procédure
 \tilde{x}_i : variable auxiliaire au niveau i .

Commentaires :

Au niveau i on considère la fonction :

$$H_i(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{si } i = \ell \\ F_i(x) + \langle r - F'_i(\tilde{x}_i), x \rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

Fin des commentaires

Si $i = i_0$ on minimise $H_{i_0}(x)$.

Sinon

Étape de correction

$$q := I_i^{i-1} H'_i(x)$$

$$z := I_i^{i-1} x$$

$$\hat{z} := z.$$

Appel MGFAC ($\ell, i - 1, z, q$)

$$d := z - \hat{z}$$

$$x := x + \beta I_{i-1}^i \delta$$

β désigne un coefficient de descente « convergent » (cf. § 3.1).

Étape de « correction locale »

$x := x + \delta x_{i,a}$ où $\delta x_{i,a}$ est solution du problème local sur $\Omega_{i,a}$.

Remarques : Comme il a été indiqué dans la description de l'algorithme deux-grilles, le problème local intervenant dans l'étape de correction locale sera, en pratique, résolu de façon approchée à chaque niveau.

4. OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES DE TYPE CÔNE POSITIF

4.1. Description de l'algorithme de type F.A.C. à 2-grilles

Le problème à résoudre est du type suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } x_1^* \in C_1 \text{ tel que :} \\ F_1(x_1^*) \leq F_1(z_1) \quad \forall z_1 \in C_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

On rappelle que $z_1 \in C_1$ signifie : $[z_1]_j \geq [c_1]_j$ pour $j = 1 \dots n_1$ où n_1 désigne la dimension de W_1 .

Description d'une itération : $x_1^k \in C_1 \rightarrow x_1^{k+1} \in C_1$

Chaque itération se compose de 2 étapes :

$x_1^k \rightarrow x_1^{k+1/2} \in C_1$: étape de correction sur « grille grossière » ,

$x_1^{k+1/2} \rightarrow x_1^{k+1}$: étape de correction « locale » .

a) *Étape de « correction sur grille grossière »*

Comme pour la méthode 2-grilles « classique » (cf. [2]) on construit un convexe auxiliaire (cf. Mandel [6]) dépendant de l'itération :

$$\hat{C}_0^k = \{z_0 \in W_0 / z_0 \geq \hat{c}_0^k\} \quad (4.2)$$

avec $[\hat{c}_0^k]_j = \text{Max}_{1 \leq i \leq n_1} \{ [c_1]_i - [x_1^k]_i / [I_0^1]_{ij} > 0 \}$.

Comme chaque itéré x_1^k est dans le convexe C_1 on a :

$$[\hat{c}_0^k]_j \leq 0 \quad \text{pour } j = 1 \dots n_0 .$$

L'idée essentielle dans cette construction, proposée par Mandel [6] est :

i) de faire en sorte que : $x_1^k + I_0^1 \hat{C}_0^k \subseteq C_1$ (pour conserver des « directions admissibles ») ;

ii) de pouvoir définir le problème grossier « entièrement sur W_0 ».

On considère d'autre part la fonctionnelle discrète Φ_0^k comme au § 3 :

$$d_0 \in W_0 \mapsto \Phi_0^k(d_0) = F_0(\tilde{x}_0^k + d_0) + \langle I_1^0 F_1'(x_1^k) - F_0'(\tilde{x}_0^k), d_0 \rangle$$

où \tilde{x}_0^k est « judicieusement choisi » (par exemple : $\tilde{x}_0^k = I_1^0 x_1^k$).

On cherche alors $d_0^k \in \hat{C}_0^k$ solution de :

$$\Phi_0^k(d_0^k) \leq \Phi_0^k(d_0) \quad \forall d_0 \in \hat{C}_0^k . \quad (4.3)$$

On détermine alors l'élément $x_1^{k+1/2} \in C_1$ tel que :

$$x_1^{k+1/2} = x_1^k + \beta_k I_0^1 d_0^k \quad (4.4)$$

où β_k est donné par

$$\beta_k = \text{Min} (\beta_k^1, \beta_k^2), \quad \text{avec}$$

$$\beta_k^1 \text{ tel que } F_1(x_1^k + \beta_k^1 I_0^1 d_0^k) \leq F_1(x_1^k + \rho I_0^1 d_0^k) \quad \forall \rho > 0 \quad (4.5)$$

$$\beta_k^2 = \text{Max} (\rho > 0 / x_1^k + \rho I_0^1 d_0^k \in C_1).$$

Le choix de β_k^1 est un choix théorique (cf. § 3) pour d'autres choix).

b) *Étape de « correction locale »* : $x_1^{k+1/2} \in C_1 \rightarrow x_1^{k+1} \in C_1$.

Il s'agit ici d'une relaxation locale.

A $x_1^{k+1/2}$ on associe les éléments $\xi(x_1^{k+1/2})$ vérifiant :

$$[\xi(x_1^{k+1/2})]_j = [x_1^{k+1/2}]_j \quad \text{si } j \in J_1, \quad (4.6)$$

$$[\xi(x_1^{k+1/2})]_j \quad \text{libre si } j \in J_{1,a}.$$

On cherche alors $\underline{\xi}(x_1^{k+1/2}) \in C_1$ tel que :

$$F_1(\underline{\xi}(x_1^{k+1/2})) \leq F_1(\xi(x_1^{k+1/2})) \quad \forall \xi(x_1^{k+1/2}) \in C_1 \quad (4.7)$$

c'est-à-dire qu'on fixe les composantes non affiniées et qu'on minimise la fonction F_1 par rapport aux autres composantes.

On pose alors :

$$x_1^{k+1} = \underline{\xi}(x_1^{k+1/2}). \quad (4.8)$$

Remarque : De façon triviale on a donc :

$$F_1(x_1^{k+1}) \leq F_1(x_1^{k+1/2}).$$

On observe aussi que le problème (4.7) est un problème local fin puisque les composantes d'indices n'appartenant pas à $J_{1,a}$ sont figées.

4.2. Convergence de l'algorithme 2-grilles

Comme dans le cas sans contrainte on démontre un résultat de convergence globale :

THÉORÈME 2. — *Sous les hypothèses H1, H2 et H4, la suite engendrée par l'algorithme 2-grilles (4.3) (4.8) converge, quel que soit le vecteur initial, vers la solution x_1^* du problème (3.1).*

Démonstration :

On démontre d'abord que l'étape de « correction sur grille grossière » est une « descente » pour F_1 .

En effet en exprimant les conditions d'extrémalité du problème (4.3) on obtient :

$$\langle \Phi_0^{ik}(d_0^k), v_0 - d_0^k \rangle \geq 0 \quad \forall v_0 \in \hat{C}_0^k \quad (4.9)$$

ou encore puisque $\hat{c}_0^k \leq 0$ et en prenant $v_0 = 0$:

$$\langle F_1'(x_1^k), I_0^1 d_0^k \rangle \leq -\alpha \|I_0^1 d_0^k\|^2.$$

D'autre part calculons : $\Delta F_1^k = F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2})$.

En utilisant un développement de Taylor, on a :

$$\begin{aligned} \Delta F_1^k = & -\beta_k \langle F_1'(x_1^{k+1/2}), I_0^1 d_0^k \rangle + \\ & + \frac{(\beta_k)^2}{2} \langle F_1''(x_1^{k+1/2}) \widetilde{I_0^1 d_0^k}, I_0^1 d_0^k \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

i) Si $\beta_k = \beta_k^1$ (cas où la contrainte n'est pas active) on montre alors que :

$$\Delta F_1^k \geq (\beta_k^1)^2 \frac{\alpha}{2} \|I_0^1 d_0^k\|^2 \quad (4.11)$$

et de plus :

$$\beta_k^1 \geq \frac{\alpha}{M} \text{ (cf. [3] et démonstration analogue § 3.2)}. \quad (4.12)$$

ii) Si $\beta_k = \beta_k^2$ (cas où la contrainte est active) on montre d'abord que $\beta_k^2 \geq 1$.

Il suffit de vérifier pour cela que :

$$x_1^k + I_0^1 d_0^k \in C_1. \quad (4.13)$$

En effet en passant aux composantes on a d'après (4.2), (4.4) et H4 :

$$\begin{aligned} [x_1^k]_i + \sum_j [I_0^1]_{ij} [d_0^k]_j & \geq [x_1^k]_i + \sum_j [I_0^1]_{ij} [\hat{c}_0^k]_j \\ & \geq [x_1^k]_i + ([c_1]_i - [x_1^k]_i) \sum_j [I_0^1]_{ij} \\ & \geq [c_1]_i + ([x_1^k]_i - [c_1]_i) (1 - \sum_j [I_0^1]_{ij}). \end{aligned}$$

Et donc dans ce cas :

$$1 \leq \beta_k^2 \leq \beta_k^1. \quad (4.14)$$

Par définition de β_k^1 et comme F_1 est convexe on a donc :

$$\frac{(F_1(x_1^k) - (F_1(x_1^{k+1/2})))}{\beta_k^2} \geq \frac{(F_1(x_1^k) - (F_1(x_1^k + \beta_k^1 I_0^1 d_0^k)))}{\beta_k^1}$$

et donc :

$$\Delta F_1^k \geq \frac{\beta_k^2}{\beta_k^1} (F_1(x_1^k) - F_1(x_1^k + \beta_k^1 I_0^1 d_0^k))$$

d'où d'après ce qui précède :

$$\Delta F_1^k \geq \beta_k^2 \beta_k^1 \frac{\alpha}{2} \|I_0^1 d_0^k\|^2. \quad (4.15)$$

On a donc bien montré que l'étape de correction sur grille grossière est une « descente » pour F_1 .

On déduit de (4.12), (4.11) (4.15) que :

$$F_1(x_1^k) - F_1(x_1^{k+1/2}) \geq C(\alpha, M) \|I_0^1 d_0^k\|^2. \quad (4.16)$$

A présent, il nous reste à examiner l'étape de « correction locale ».

Par définition de x_1^{k+1} on a :

$$\langle F_1'(x_1^{k+1}), \xi(x_1^{k+1/2}) - x_1^{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall \xi(x_1^{k+1/2}) \in C_1 \quad (4.17)$$

et bien sûr :

$$F_1(x_1^{k+1}) \leq F_1(x_1^{k+1/2}). \quad (4.18)$$

La suite $(F_1(x_1^k))_k$ est donc décroissante ; comme elle est bornée inférieurement, elle est donc convergente ; d'où :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F_1(x_1^{k+1}) - F_1(x_1^k)) = 0 \quad (4.19)$$

et d'après (4.16) il s'ensuit que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|I_0^1 d_0^k\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1^{k+1/2} - x_1^k\| = 0.$$

Or comme I_0^1 est l'identité sur $J_{1, na}$, on en déduit que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [d_0^k]_j = 0 \quad \forall j \in J_1. \quad (4.20)$$

D'autre part on déduit de (4.17) que :

$$F_1(x_1^{k+1/2}) - F_1(x_1^{k+1}) \geq \alpha/2 \|x_1^{k+1/2} - x_1^{k+1}\|^2$$

et donc :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1^{k+1/2} - x_1^{k+1}\| = 0. \quad (4.21)$$

Cependant comme la fonction F_1 est inf-bornée, la suite $(x_1^k)_k$ est bornée ; il existe ainsi une sous-suite $(x_1^{k'})_{k'}$ qui converge vers $\tilde{x}_1 \in C_1$ puisque C_1 est fermé.

Il faut montrer à présent que \tilde{x}_1 est solution du problème.

On déduit, en passant à la limite dans (4.17) :

$$\sum_{i \in J_{1,a}} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\tilde{x}_1)([v_1]_i - [\tilde{x}_1]_i) \geq 0 \quad \forall [v_1]_i \geq [c_1]_i \quad i \in J_{1,a} \quad (4.22)$$

Le passage à la limite pour les « composantes d'indices dans $J_{1,na}$ » est plus délicat.

On utilise pour cela le lemme auxiliaire suivant :

LEMME. — Soit (α^k) une suite convergente dans R^p vers α^* et soit (β^k) la suite des réels tels que $\beta^k = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i^k$, alors la suite (β^k) converge vers $\beta^* = \max_{1 \leq i \leq p} \alpha_i^*$.

En appliquant ce lemme à la suite (\hat{c}_0^k) définissant le convexe auxiliaire \hat{C}_0^k , il s'ensuit que :

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} [\hat{c}_0^{k'}]_j = \max_{1 \leq i \leq n_1} \{ [c_1]_i - [\tilde{x}_1]_i / [I_0^1]_{ij} > 0 \} = [\hat{c}_0]_j \leq 0 \quad (4.23)$$

On remarque aussi que tout élément v_0 du convexe auxiliaire \hat{C}_0^k :

$$\hat{C}_0^k = \{ z_0 \in W_0 / z_0 \geq \hat{c}_0^k \}$$

peut s'écrire sous la forme : $v_0 = w_0 + \hat{c}_0^k$ où w_0 est un élément quelconque du cône « grossier » positif C_0^+ :

$$C_0^+ = \{ w_0 \in W_0 / [w_0]_j \geq 0 \quad \forall j : 1 \leq j \leq n_0 \} \quad .$$

En tenant compte de ces remarques, la relation d'extrémalité définissant d_0^k s'exprime par :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_0} \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_j}(\tilde{x}_0^k + d_0^k) - \frac{\partial F_0}{\partial x_j}(\tilde{x}_0^k) \right) (w_0 + \hat{c}_0^k - d_0^k)_j \quad (4.24) \\ & + \sum_{j=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_1} [I_0^1]_{ij} \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^{k+1/2})(w_0 + \hat{c}_0^k - d_0^k)_j \geq 0, \quad \forall w_0 \in C_0^+ \end{aligned}$$

Par définition de W_0 , W_1 et J_1 on voit que $[1 \dots n_0] \supseteq J_{1,na}$, d'où en fixant

j dans $J_{1, na}$ (indices des composantes de la « zone non affinée ») :

$$\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_j} (\tilde{x}_0^k + d_0^k) - \frac{\partial F_0}{\partial x_j} (\tilde{x}_0^k) \right) (w_0 + \hat{c}_0^k - d_0^k)_j + \\ + \frac{\partial F_1}{\partial x_j} (x_1^{k+1/2}) (w_0 + \hat{c}_0^k - d_0^k)_j \geq 0 \quad \forall [w_0]_j \geq 0. \quad (4.25)$$

On passe alors à la limite dans (3.25). On suppose que \tilde{x}_0^k tend vers une limite lorsque $k \rightarrow +\infty$; comme $\text{Lim}_{k \rightarrow \infty} d_0^k = 0$, on déduit l'inégalité :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_j} (\tilde{x}_1) (w_0 + \hat{c}_0)_j \geq 0 \quad \forall [w_0]_j \geq 0$$

et par définition de $[\hat{c}_0]_j$ on a :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_j} (\tilde{x}_1) (z_1 - \tilde{x}_1)_j \geq 0 \quad \forall [z_1]_j \geq [c_1]_j \quad \forall j \in J_1 \quad (4.26)$$

(car par construction $[\hat{c}_0]_j = [c_1]_j - [\tilde{x}_1]_j$ si $j \in J_{1, na}$, I_0^1 est l'identité sur $J_{1, na}$), d'où en regroupant (4.22) et (4.26)

$$\langle F'_1(\tilde{x}_1), z_1 - \tilde{x}_1 \rangle \geq 0 \quad \forall z_1 \in C_1$$

et donc :

$$\tilde{x}_1 = x_1^*.$$

Mais comme x_1^* est unique, c'est toute la suite (x_1^k) qui converge vers x_1^* (c.q.f.d.).

4.3. Remarques — extensions

De façon analogue au cas sans contrainte, on peut montrer que le paramètre β_k peut être pris égal à 1 dans un voisinage de la solution.

Il est bien évident aussi que dans une mise en œuvre, les problèmes à résoudre dans chacune des deux étapes ne seront résolus que de façon approchée.

Une extension de ces algorithmes au cas de contraintes de type bilatérales :

$$K = \{u \in V / c_i \leq u_i \leq b_i\}$$

est absolument triviale.

4.4. Fixation des contraintes saturées

Le but de ce paragraphe est de montrer que dans l'algorithme F.A.C., construit pour le problème de l'obstacle, les contraintes saturées sont définitivement fixées après un nombre fini d'itérations.

On ramène, de ce fait, l'étude de la vitesse de convergence d'un tel algorithme à celle du cas sans contrainte.

Hypothèse de non-dégénérescence

H6 Le problème complémentaire est non dégénéré :

$$\forall i \in I(x_1^*) \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^*) > 0$$

où $I(x_1^*)$ désigne l'ensemble des indices où l'obstacle est atteint :

$$I(x_1^*) = \{i \in [1 \dots n_1] / [x_1^*]_i = [c_1]_i\} . \quad (4.27)$$

On note :

$$\overline{I}(x_1^*) = \{i \in [1 \dots n_1] / [x_1^*]_i > [c_1]_i\} \quad (4.28)$$

le sous-ensemble complémentaire de $I(x_1^*)$.

On pose d'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_F = \inf \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^*) / i \in I(x_1^*) \right\} \\ \eta = \inf \left\{ [x_1^*]_i - [c_1]_i / i \in \overline{I}(x_1^*) \right\} \\ \text{et on note : } \eta = \min(\eta_F ; \eta_X) (\eta > 0) . \end{array} \right. \quad (4.29)$$

De la convergence de la suite (x_1^k) vers x_1^* , de la continuité de F_1 et de l'ensemble des résultats des paragraphes précédents on déduit :

$$\exists K \text{ tel que } \forall i \in I(x_1^*) \forall k > K \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^k) > \eta_F/2 > 0$$

$$\forall i \in \overline{I}(x_1^*) \forall k > K [x_1^k]_i > [c_1]_i + \eta_X/2$$

et donc :

$$\forall k > K, i \in \overline{I}(x_1^*) \Rightarrow i \in \overline{I}(x_1^k) = \{i \in [1 \dots n_1] / [x_1^k]_i > [c_1]_i\} .$$

On doit démontrer au préalable le résultat suivant :

LEMME 4.1 : *Sous les hypothèses H1 ... H6, $\exists N_0 > 0 \forall k > N_0$ le problème*

Min $\{ \Phi_0^k(d_0)/d_0 \geq \tilde{c}_0^k \}$ est non dégénéré (i.e.) :

$$\forall j \in I(d_0^k) = \{j \in [1 \dots n_1] / [d_0]_j = [\tilde{c}_0^k]_j\} \Rightarrow \frac{\partial \Phi_0^k}{\partial x_j}(d_0^k) > 0.$$

Démonstration :

Par définition (3.2) de Φ_0^k , on a à l'optimum d_0^k (pb. complémentaire) :

$$\frac{\partial \Phi_0^k}{\partial x_j}(d_0^k) = [F_0'(x_0^k + d_0^k) + I_1^0 F_1'(x_1^k) - F_0'(x_0^k)]_j \leq 0$$

avec

$$d_0^k \geq \tilde{c}_0^k \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_0^k}{\partial x_j}(d_0^k) \cdot [d_0^k - \tilde{c}_0^k]_j = 0.$$

On considère alors l'ensemble d'indices E défini par :

$E = \{j \in [1 \dots n_0] / \exists i \in [1 \dots n_1] \text{ tel que}$

$$(I_0^1)_{i,j} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^*) > 0 \} . \quad (4.30)$$

Par hypothèse sur I_0^1 on a :

$$\forall j \in E \quad [I_1^0(F_1'(x_1^k))]_j > 0.$$

Donc par continuité de F_1' et de F_0' et comme $\text{Lim}_{k \rightarrow \infty} d_0^k = 0$, on a :

$$\exists N > 0 \quad \forall k > N \quad \frac{\partial \Phi_0^k}{\partial x_j}(d_0^k) > 0$$

ce qui implique :

$$[d_0^k]_j = [\tilde{c}_0^k]_j \quad \forall j \in E.$$

A un indice j n'appartenant à E on associe l'ensemble $B(j)$ défini par :

$$B(j) = \{i \in [1 \dots n_1] / (I_0^1)_{i,j} > 0\} \quad (4.31)$$

et donc par définition :

$$\forall i \in B(j) \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^*) = 0$$

mais comme le problème initial est non dégénéré :

$$\inf \{ [x_1^*]_i - [c_1]_i / i \in B(j) \} = \eta > 0$$

d'où par définition de \tilde{c}_0^k on obtient :

$$\exists N' > 0 \quad \forall k > N' \quad [\tilde{c}_0^k]_j \leq -\eta/2$$

et comme $\lim_{l \rightarrow \infty} d_0^k = 0$ on obtient finalement :

$$\exists N > 0 \quad \forall k > N \quad [d_0^k]_j - [\tilde{c}_0^k]_j > 0 \quad \forall j \notin E$$

ce qui termine la démonstration.

Il est en mesure, à présent, de démontrer le résultat suivant de « stabilité ».

THÉORÈME 4.1 : *Sous les hypothèses H1 ... H6, il existe un rang K à partir duquel les contraintes saturées sont fixées définitivement :*

$$\exists K > 0 \quad \forall k > K \quad I(x_1^k) = I(x_1^*).$$

Démonstration : Puisque chaque pas de l'algorithme comporte deux étapes, on examine successivement chacune d'elles.

1) On considère d'abord l'étape de correction locale fine : $x_1^{k+1/2} \rightarrow x_1^{k+1}$.

On utilise la partition de l'ensemble d'indices $[1 \dots n_1]$ (degrés de liberté du problème composite) :

$$[1 \dots n_1] = J_{1,na} \cup J_{1,a} \quad \text{avec} \quad J_{1,na} \cap J_{1,a} = \emptyset.$$

Par construction pour i dans $J_{1,a}$, $[x_1^{k+1}]_i$ est tel que :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^{k+1}) \leq 0, \quad [x_1^{k+1}]_i \geq [c_1]_i, \quad \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^{k+1}) \cdot [x_1^{k+1} - c_1]_i = 0.$$

Si i appartient à $I(x_1^*)$, on a par continuité de F_1 , avec l'hypothèse H6 : $\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x_1^{k+1}) > 0$ pour k suffisamment grand et donc :

$$[x_1^{k+1}]_i = [c_1]_i \Rightarrow i \in I(x_1^{k+1}).$$

Si i appartient à $\overline{I(x_1^*)}$, alors comme $\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = x_1^*$ on a :

$$\text{pour } k \text{ suffisamment grand } [x_1^{k+1}]_i > [c_1]_i \Rightarrow i \notin I(x_1^{k+1}).$$

Il y a donc bien stabilisation, à partir d'un certain rang, des contraintes saturées dans le sous-domaine raffiné.

2) On examine, à présent, la correction sur grille grossière : $x_1^k \rightarrow x_1^{k+1/2}$.

Pour cela on précise le sous-ensemble $J_{1,na} = J_{0,na} \cup J_{1,r}$.

(i.e. : les degrés de liberté dans le sous-domaine non raffiné et ceux situés sur l'interface « grossière »).

Soit $i \in J_{0,na}$, alors par construction $[\tilde{c}_0^k]_i = [c_1]_i - [x_1^k]_i$ et de plus $[x_1^{k+1/2}]_i = [x_1^k]_i + [d_0^k]_i$ car I_0^1 est l'identité sur ce sous-domaine ; mais d'après la remarque initiale il suffit de considérer les indices i tels que $i \in J_{0,na} \cap \overline{I(x_1^k)}$. En effet si $i \in I(x_1^k)$ comme $\overline{I(x_1^*)} \subseteq \overline{I(x_1^k)}$ pour k suffisamment grand on a donc $i \in I(x_1^*)$ (stabilisation des contraintes saturées).

Considérons donc $i \in \overline{I(x_1^k)} \cap I(x_1^*)$: par définition de $I(x_1^*)$, par continuité de F_1 et l'hypothèse H6 on a : pour k suffisamment grand $\frac{\partial \Phi_0^k}{\partial x_i}(d_0^k) > 0$ et donc $[d_0^k]_i = [\tilde{c}_0^k]_i$ ce qui implique $i \in I(x_1^{k+1/2})$ et donc la contrainte est saturée (et le restera) à partir de ce rang.

Il ne reste plus qu'à examiner les degrés de libertés $i \in J_{1,r}$ (i.e. ceux situés sur l'interface « grossière »).

Comme précédemment le seul cas intéressant à étudier est :

$$i \in J_{1,r} \cap \overline{I(x_1^k)} \cap I(x_1^*)$$

or pour un tel indice et k suffisamment grand on a : $[d_0^k]_i = [\tilde{c}_0^k]_i$ où on rappelle que :

$$[\tilde{c}_0^k]_i = \text{Max}_\ell \{ [c_1]_\ell - [x_1^k]_\ell / (I_0^1)_\ell, i > 0 \}.$$

On démontre alors que pour un tel i et un tel k on a :

$$[x_1^{k+1/2}]_i \in I(x_1^{k+1/2}).$$

En effet deux cas se présentent :

1) Il existe un nœud contraint dans $J_{1,a} \Rightarrow [\tilde{c}_0^k]_i = 0$ et donc : $[x_1^{k+1/2}]_i = [c_1]_i$ et le nœud i devient contraint et le restera.

2) Il n'existe pas de nœud contraint dans $J_{1,a}$: tous les nœuds connectés à i sont dans $\overline{I(x_1^k)}$; mais d'après l'étude de l'étape sur le sous-domaine raffiné, de tels nœuds appartiennent à $\overline{I(x_1^*)}$ et donc pour k suffisamment grand :

$$[x_1^k]_i \geq [c_1]_i + \eta_x/2.$$

Or comme $\lim_{k \rightarrow \infty} [x_1^k]_i = [x_1^*]_i = [c_1]_i$ (car $i \in I(x_1^*)$) on obtient :

$$[\tilde{c}_0^k]_i = [c_1]_i - [x_1^k]_i$$

(le maximum ne peut être atteint qu'en i) et donc :

$$[X_1^{k+1/2}]_i = [c_1]_i$$

et

$$[x_1^{k+1/2}]_i \in I(x_1^{k+1/2})$$

c.q.f.d.

Remarque importante :

Puisque après un nombre fini d'itérations les contraintes saturées sont définitivement fixées, on est ramené pour la vitesse de convergence au cas sans contrainte. Si la fonctionnelle à minimiser est quadratique, on peut utiliser dans ce cas les résultats de McCormick sur la convergence : le facteur de convergence est strictement inférieur à 1 et indépendant du pas h de discrétisation. Pour une fonctionnelle non quadratique l'étude des facteurs de convergence est en cours.

RÉFÉRENCES

- [1] R. BOYER and B. MARTINET, 1985, *Multigrid methods in convex optimization*, 2nd European Conference on Multigrid Methods Köln 1985, GMD Studien n° 110.
- [2] R. BOYER et B. MARTINET, 1986, *Méthodes multigrilles en optimisation convexe*, Rapport interne Math. Appli., Université de Provence.
- [3] R. BOYER, 1992, Méthode FAC pour un problème de type obstacle, *C. R., Acad. Sci.*, Paris **315**, série I, p. 1013-1016.
- [4] J. CEA, 1972, *Optimisation : théorie et algorithmes*, Dunod.
- [5] W. HACKBUSCH, 1985, *Multigrid methods and application Springer Verlag*.
- [6] J. MANDEL, 1984, A multilevel iterative method for symmetric positive definite linear complementary problems, *Appl. Maths. Optim.* **11**, 77-95.
- [7] S. F. MCCORMICK and J. THOMAS, 1986, Fast adaptive composite grid method for elliptic boundary value problems, *Math of computation* **46** 439-456.
- [8] S. F. MCCORMICK, 1989, Multilevel adaptive methods for partial differential equations, *Frontiers in Appl. Maths.* SIAM Philadelphia.
- [9] E. POLAK, 1971, *Computational methods in Optimization*, Academic. Press.