

G. VALLET

**Analyse mathématique des transferts thermiques
dans des systèmes dispersés subissant des
transformations de phases**

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome
27, n° 7 (1993), p. 895-923

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_7_895_0

© AFCET, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**ANALYSE MATHÉMATIQUE
DES TRANSFERTS THERMIQUES
DANS DES SYSTÈMES DISPERSÉS
SUBISSANT DES TRANSFORMATIONS DE PHASES (*)**

par G. VALLET (1)

Communiqué par G. DUVAUT

Abstract. — *This paper provides a framework for the mathematical approach to the fusion or crystallization processes within an emulsion. The studied model takes in account a non linear parabolic Cauchy problem with a non linear integrodifferential term arising from a coupling with an ordinary differential equation. We present an analytical study, where existence, uniqueness and smoothness properties of a variational solution are shown. The monotonicity, the asymptotic behavior of the solution, a result of axisymmetry and it's consequences are proved. We also present a numerical study and some curves in the context of the polar variable.*

Résumé. — *Cette étude présente une contribution à la modélisation des phénomènes de cristallisation et de fusion dans une émulsion. On propose une approche analytique (où l'on montre l'existence, l'unicité ainsi que la régularité d'une solution variationnelle, la monotonie et le comportement asymptotique de celle-ci, une propriété de symétrie radiale et ses conséquences) puis numérique (on donne un schéma et des courbes numériques en la variable polaire) d'un problème de Cauchy du type parabolique non linéaire avec un terme intégrodifférentiel non linéaire issu d'un couplage avec une équation différentielle ordinaire.*

1. PRÉSENTATION

1.1. Le stockage de l'énergie par chaleur latente [7]

Depuis que nos lointains ancêtres eurent l'idée de jeter des pierres dans le feu, qu'ils plongeaient ensuite dans des récipients contenant de l'eau à chauffer [14], la méthode la plus classique pour stocker de l'énergie thermique consiste à porter un corps à haute température. Lors de son refroidissement, l'énergie emmagasinée est restituée. Toutefois, cette énergie peut être plus importante si le corps en question présente, au cours du

(*) Manuscrit reçu le 9 mars 1993.

(1) Université de Pau et des pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques appliquées, U.R.A. n° 1204-C.N.R.S.. avenue de l'Université 64000 Pau.

refroidissement, une transformation de phase. Le dégagement (resp. l'absorption) de chaleur qui accompagne cette transformation est à l'origine de ce que l'on appelle le stockage par chaleur latente (resp. le déstockage).

Cependant, chaque cycle de stockage-déstockage (fusion-cristallisation) entraîne une ségrégation des constituants et cause de ce fait une baisse de rendement. Une des méthodes propres à conserver l'homogénéité du contenu du récipient de stockage est de disperser le matériau à changement de phase dans un support émulsionnant convenable. Les émulsions étudiées expérimentalement sont au repos et suffisamment visqueuses (présence d'un agent surfactant ou émulsifiant en vue d'augmenter la stabilité de l'émulsion) afin que le changement d'état dans les gouttes n'entraîne aucun mouvement d'ensemble et qu'ainsi, seul l'effet de la conduction soit à considérer, d'où l'absence de termes de convection (libre ou forcée) dans le modèle.

1.2. L'expérimentation [3], [7], [18]

L'émulsion est placée dans un cylindre métallique Ω , lui-même plongé dans un bain dont la température peut être programmée à l'aide d'une fonction $u^\infty(t)$ que l'on explicitera ultérieurement. A l'intérieur de ce cylindre de hauteur H et dont la base est un disque de rayon R , se trouvent des couples thermo-électriques placés dans un plan horizontal D à la hauteur $H/2$, et à différents rayons r à partir de l'axe du cylindre (*cf. fig. 0*).

On notera Q_t le cylindre $]0, t[\times \Omega$ et $Q = Q_T$, T étant la durée totale de l'expérience ; ν est la normale extérieure à Ω , lorsqu'elle est définie.

L'utilisation d'émulsions dont les gouttes sont de très faible taille (micro-émulsion de l'ordre de 10^8 gouttes par mm^3 qui donnent des gouttes d'un diamètre compris entre 1 et $10 \mu\text{m}$) entraîne une augmentation de la différence entre la température de fusion (T_F) et la température de cristallisation (cette différence est appelée degré de surfusion). A titre d'exemple, un échantillon d'eau de quelques cm^3 cristallise vers -14°C (rappelons qu'ici $T_F = 0^\circ\text{C}$), alors qu'une goutte de quelques μm^3 cristallise vers -38°C .

Enfin, un des traits principaux de la cristallisation des liquides surfondus est son caractère aléatoire. Les théories du déclenchement de la cristallisation, dites « théorie de la nucléation », permettent de déterminer la probabilité de cristallisation d'une goutte par unité de temps (ou vitesse de nucléation), en fonction de la température.

On considère des températures exprimées en degrés Kelvin ; ainsi, celles-ci sont positives et la vitesse de nucléation est exprimée dans ce qui suit par J , une fonction numérique positive définie sur \mathbb{R}^+ , lipschitzienne de module de Lipschitz 1 (elle pourra même être considérée de classe $C^s(\mathbb{R}^+)$ si des besoins de régularité l'exigent). De plus, $J(0) = 0$, $J(x) = 0$ si $x \geq T_F$ et le graphe passe par un maximum M en $x = \hat{\theta}$.

position	r en mm	position	r en mm
1	0.5	7	16.0
2	3.5	8	18.0 </td
3	4.5	9	20.5
4	7.5	10	22.5
5	10.5	11	25.0
6	13.0	12	26.5

Positions des soudures.

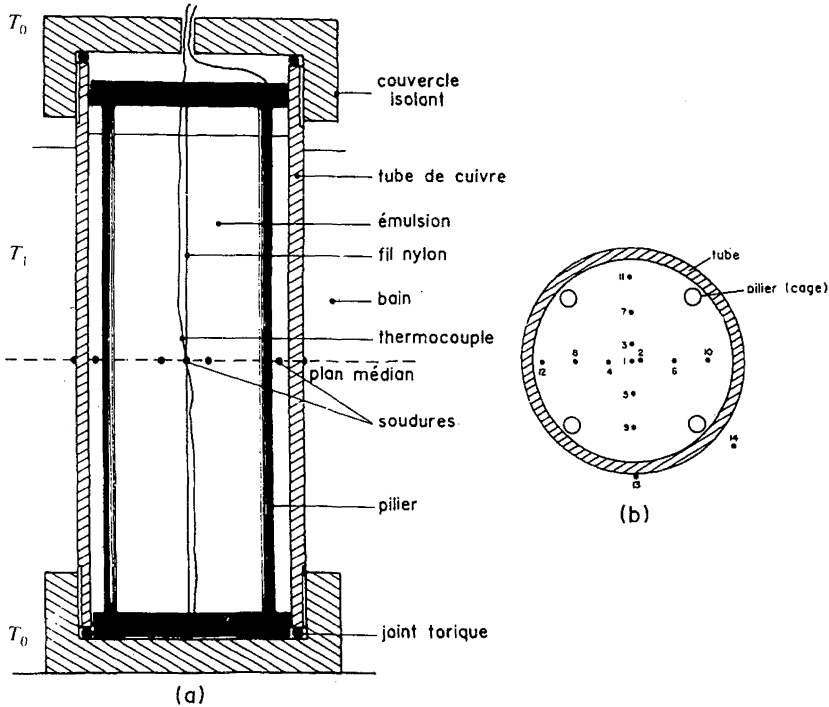


FIGURE 0

Dans le cadre de la cristallisation des émulsions, l'introduction de cette théorie de la nucléation conduit donc à une modélisation mathématique ne reposant pas sur le modèle de Stéfán.

1.3. La modélisation mathématique [3], [7], [18]

Ce modèle se construit à partir de l'équation de diffusion de la chaleur à laquelle on adjoint un terme de source de chaleur interne \dot{q} , proportionnel à la chaleur dégagée par une goutte et au nombre de gouttes qui cristallisent. Ainsi, en notant u la température de l'émulsion et φ la proportion de gouttes

cristallisées à l'intérieur de l'émulsion, les équations couplées qui décrivent le processus sont :

$$\rho \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla u) + \dot{q} \quad \text{et} \quad \dot{q} = c \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{dans } Q, \quad (1.1)$$

où c est une constante thermodynamique positive et où les fonctions $\kappa = \kappa(t, x, u, \varphi)$ et $\alpha = \alpha(t, x, u, \varphi)$ ne sont pas nécessairement constantes.

Or, \dot{q} est proportionnel au nombre de gouttes qui cristallisent selon la loi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = J(u)(1 - \varphi). \quad (1.2)$$

D'où le couplage :

$$\rho \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (\kappa \nabla u) + cJ(u)(1 - \varphi) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (1 - \varphi)J(u). \quad (1.3)$$

Ces équations sont jointes à des conditions de bord de type Fourier-Robbins sur la surface latérale de refroidissement Γ_1 ($r = R$ et $0 < z < H$) et adiabatiques sur Γ_0 ($z = 0$ et $z = H$) (cf. fig. 0) selon la relation :

$$-\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda (u - u^\infty) \quad \text{sur le bord } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad -\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (1.4)$$

Pour simplifier, dans la suite, on notera Γ la partie de la frontière Γ_1 .

On présentera différentes modélisations pour ce phénomène, chacune variant par le choix des fonctions κ et α .

1.4. Notations

Notons $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $\| \cdot \|$ et $| \cdot |$ leurs normes usuelles respectives. On note $|u|_1$ la semi-norme (des gradients) de V . Pour tout u et v de $V \times V$, on définit la forme bilinéaire a par :

$$a(u, v) = a \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Gamma} uv \, d\sigma = a \cdot (u, v)_1 + b(u, v). \quad (1.5)$$

Comme Ω est connexe et comme Γ est de mesure superficielle non négligeable, $u \mapsto a(u, u)^{1/2}$ est une norme équivalente à $\|u\|$ sur V , lui assurant une structure d'espace de Hilbert séparable. Pour tout u de $L^2(Q)$, on notera :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u(t, x)) &= cJ(u(t, x)) \exp \left(- \int_0^t J(u(s, x)) \, ds \right) = \\ &= -c \frac{\partial}{\partial t} \exp \left(- \int_0^t J(u(s, x)) \, ds \right) \\ &= c(1 - \varphi(t, x))J(u(t, x)) = c \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

On remarque que cette notation est abusive vu que \mathcal{J} n'est pas une fonction de la variable $u(t)$, mais de l'intégrale de 0 à t de $J(u)$ (effet de mémoire).

C désigne une constante positive quelconque que l'on ne cherche pas à préciser dans le contexte.

1.5. Le choix de u^∞

On convient de considérer que la température imposée sur le bord est portée, de façon régulière, à une température $\bar{\theta}$ selon la formule :

$$u^\infty(t) = u_0 + \chi(t)(\bar{\theta} - u_0), \chi(0) = 0 \text{ et } \chi(t) = 1 \text{ pour } t \geq \bar{t}, \quad (1.7)$$

\bar{t} étant fixé à notre discrétion avec $\chi \in H^s(\mathbb{R}^+)$ $s \geq 1$ par exemple et $s \geq 2$ si des besoins de régularité l'exigent. Ainsi, si $u_0 \geq \bar{\theta}$ p.p. dans Ω , alors $u^\infty(t)$ est décroissante en temps, avec $u_0 = u^\infty(0) \geq u^\infty(t) \geq \bar{\theta}$ p.p. dans Ω .

2. PROBLÈME TRIPLEMENT NON LINÉAIRE EN LA TEMPÉRATURE [16]

Nous allons supposer que α et κ sont des fonctions de l'inconnue u . On est donc amené à considérer le problème de Cauchy triplement non linéaire, posé au sens des distributions, suivant : (on note 1_Γ la fonction indicatrice de Γ)

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \Delta \phi(u) = \mathcal{J}(u) \text{ dans } \Omega, \quad (2.1)$$

où $\phi, \beta \in C^1([0, T_{\max}])$ vérifient $0 < m \leq \phi', \beta' \leq M$,

$$\beta(0) = \phi(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial \phi(u)}{\partial \nu} = \lambda(u - u^\infty) \cdot 1_\Gamma(x) \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2.3)$$

et
$$u(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \quad (2.4)$$

On cherche alors une solution u sous la forme suivante : (E)

$u \in H^1(Q)$, $T_{\max} \geq u \geq \bar{\theta}$ p.p. dans Q , vérifiant l'équation variationnelle triplement non linéaire : pour presque tout t de $]0, T[$ et pour tout v de V ,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} v \, dx + \int_\Omega \nabla \phi(u) \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_\Gamma (u - u^\infty) v \, d\sigma = \\ & = c \int_\Omega v J(u) e^- \int_0^t J(u) \, ds \, dx. \\ & \text{et } u(0) = u_0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

2.1. Commentaires sur le choix de la donnée initiale u_0

On cherche à se placer dans une classe de données initiales admissible pour l'expérimentateur et assurant des propriétés d'uniforme monotonie, pour cela, on introduit Ξ , définie par :

$$\Xi = \left\{ u \in V, T_{\max} \geq u \geq \bar{\theta}, \quad \forall v \in V, v \geq 0 \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla \phi(u) \cdot \nabla v \, dx \geq c \int_{\Omega} J(u) v \, dx \right\}, \quad (2.6)$$

de sorte que u^∞ soit décroissante en temps (cf. § 1.5) ; Ξ contient toutes les constantes comprises entre les valeurs T_F et T_{\max} .

2.2. Existence de la solution dans $H^1(Q)$ par discrétisation en temps

THÉORÈME 1 : Pour tout $u_0 \in \Xi$, il existe au moins une fonction u dans $H^1(Q) \cap \mathcal{C}_s([0, T], V)$ telle que $\forall t \geq 0, T_{\max} \geq u(t) \geq \bar{\theta}$ p.p. dans Ω , vérifiant l'équation variationnelle (2.5) (donc (E)). De plus, cette solution u est décroissante en temps, au sens où :

pour $0 \leq t < t+h \leq T, u(t+h) \leq u(t)$ p.p. dans Ω ■

On considère une discrétisation régulière de l'intervalle $[0, T]$ par une suite de points $t_n = nh$ où $h = T/N$ (pour N fixé), n parcourant $\{0, 1, \dots, N\}$.

On note $u_n^\infty = u^\infty(t_n)$, et u_n la suite définie dans V par récurrence selon le procédé : pour u_0 donné dans Ξ et pour $u_k, k = 1, \dots, n$ connus, considérons u_{n+1} , la solution dans V de : $\bar{\theta} \leq u_{n+1} \leq T_{\max}$ p.p. dans Ω et pour tout v de V ,

$$\left(\frac{\beta(u_{n+1}) - \beta(u_n)}{h}, v \right) + (\phi(u_{n+1}), v)_1 + \\ + b(u_{n+1} - u_{n+1}^\infty, v) = c \left(\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{h}, v \right), \quad (2.7)$$

où
$$\varphi^n = 1 - \exp \left(-h \sum_{i=0}^n J(u_i) \right).$$

a) On obtient l'existence du terme u_{n+1} en utilisant le théorème de point fixe de Schauder-Tychonoff [17] dans le cadre hilbertien séparable V .

b) Pour traiter l'unicité du terme u_{n+1} , on introduit p_ε , l'approximation de Yosida de la fonction (signe)⁺ suivante : $p_\varepsilon(x) = \min \left(\frac{x^+}{\varepsilon}, 1 \right)$.

Dès lors, pour deux solutions éventuelles u et \hat{u} , il est possible de choisir comme fonction test $v = p_\varepsilon(\phi(u) - \phi(\hat{u}))$ et, en utilisant principalement que $0 \leq 1 - \varphi_n \leq 1$ et la contraction $x \rightarrow e^{-x}$ sur \mathbb{R}_+ , il vient :

$$\left(\frac{\beta(u) - \beta(\hat{u})}{h}, p_\varepsilon(\phi(u) - \phi(\hat{u})) \right) \leq C |(u - \hat{u})^+|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.8}$$

Le passage à la limite lorsque ε tend vers 0^+ est alors envisageable et conduit à :

$$m \left| \frac{(u - \hat{u})^+}{h} \right|_{L^1(\Omega)} \leq \left| \frac{(\beta(u) - \beta(\hat{u}))^+}{h} \right|_{L^1(\Omega)} \leq C |(u - \hat{u})^+|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.9}$$

D'où, pour h assez petit indépendant de la suite (u_n) , il y a unicité de u_{n+1} .

c) Par utilisation loisible dans (2.7) des fonctions-test $v = -(\bar{\theta} - u_{n+1})^+$ et $v = (u_{n+1} - T_{\max})^+$, puis, par récurrence, en soustrayant (2.7) à l'ordre n de (2.7) à l'ordre $n + 1$ et en posant $v = (\phi(u_{n+1}) - \phi(u_n))^+$, pour $u_0 \in \mathcal{E}$, il vient :

$$\bar{\theta} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0 \leq T_{\max} \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et p.p. sur } \Gamma. \tag{2.10}$$

d) Estimations a priori :

Notons alors, pour toute suite u_n ,

$$u^h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n \cdot \mathbb{1}_{]nh, (n+1)h]}(t) \quad \text{et} \quad u^h(0) = u_0 \text{ (fonction en escalier);}$$

$$\hat{u}^h(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(u_{n-1} + (t - nh) \cdot \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \right) \cdot \mathbb{1}_{]nh, (n+1)h]}(t),$$

où par convention $u_{-1} = u_0$ et $\hat{u}^h(0) = u_0$ (fonction affine par morceaux).

D'où,

$$\frac{\partial \hat{u}^h}{\partial t}(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot \mathbb{1}_{]nh, (n+1)h]}(t), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{u}^h}{\partial t}(0) = 0 \text{ sur } [0, h].$$

On construit alors de même $\beta(u)^h$, $\phi(u)^h$ et φ^h , puis $\beta(\hat{u})^h$, $\phi(\hat{u})^h$ et $\hat{\varphi}^h$ avec les suites $\beta(u_n)$, $\phi(u_n)$ et φ_n respectivement, de sorte que $\beta(u)^h = \beta(u^h)$. Comme β et ϕ vérifient (2.2), le choix classique dans (2.7) de $v = \beta(u_{n+1})$ puis de $v = \phi(u_{n+1}) - \phi(u_n)$ (donc $v \leq 0$ p.p.) montre qu'il existe C indépendant de h qui majore les normes de :

- a) u^h , $\beta(u)^h$, $\phi(u)^h$, \hat{u}^h , $\beta(\hat{u})^h$ et $\phi(\hat{u})^h$ dans $L^2(V)$ et $L^\infty(V)$ par C .
- b) $u^h - \hat{u}^h$, $\beta(u)^h - \beta(\hat{u})^h$ et $\phi(u)^h - \phi(\hat{u})^h$ dans $L^2(Q)$ par $C \cdot h$.
- c) $\frac{\partial \hat{u}^h}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta(\hat{u})^h}{\partial t}$ et $\frac{\partial \phi(\hat{u})^h}{\partial t}$ dans $L^2(Q)$ par C .
- d) $\frac{\partial \hat{\varphi}^h}{\partial t}$ par C et $\varphi^h - \hat{\varphi}^h$ par $C \cdot h$ dans $L^2(Q)$.

Il est alors possible d'envisager le passage à la limite lorsque h tend vers 0^+ . Pour cela, il faut pouvoir identifier les différentes limites. Les majorations c) et a) permettent d'extraire des limites faibles dans $H^1(Q)$ et fortes dans $L^2(Q)$ pour les suites \hat{u}^h , $\beta(\hat{u})^h$ et $\phi(\hat{u})^h$ vers u , a et b . Le point b) permet alors d'identifier et de préciser la convergence (forte) dans $L^2(Q)$ de u^h , $\beta(u)^h$ et $\phi(u)^h$ vers les mêmes limites u , a et b . Enfin, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure l'identification des limites, c'est-à-dire : $a = \beta(u)$ et $b = \phi(u)$. Le point a) permet alors, pour la topologie $*\sigma(L^\infty, L^1)$, de préciser que u est dans $L^\infty(V)$, ainsi que $\beta(u)$ et $\phi(u)$. On montre de plus, suite au point d), que φ^h et $\hat{\varphi}^h$ convergent respectivement, dans $L^2(Q)$ faible et $H^1(0, T; L^2(Q))$ faible, vers φ . De

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^h}{\partial t}(t) = \left(1 - \varphi^h(t) + h \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}^h}{\partial t}(t) \right) \cdot \frac{1 - e^{-hJ(u^h(t))}}{h},$$

il découle, par passage à la limite, que $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (1 - \varphi)J(u)$.

Comme l'application qui à u dans $H^1(0, T; H)$ associe $u(0)$ dans H est linéaire et continue, il en est donc de même pour les topologies faibles, et comme $\hat{\varphi}^h(0) = \varphi_0 = 1 - e^{-hJ(u_0)}$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$, il s'ensuit que $\varphi(0) = 0$.

D'où le résultat :

$$\varphi(t) = J(u(t)) e^{-\int_0^t J(u(s)) ds}. \quad (2.11)$$

On est donc en mesure de passer à la limite lorsque h tend vers 0^+ dans ce schéma semi-discrétisé ; de même, la propriété de décroissance est conservée par passage à la limite faible dans $H^1(Q)$. \square

2.3 Unicité de la solution

Soient u et \hat{u} deux solutions éventuelles pour le problème (E), notons $w = u - \hat{u}$ et $v = 2 p_\varepsilon(\phi(u) - \phi(\hat{u}) + \varepsilon/2) - 1$. Le caractère lipschitzien de

la fonction J' et la propriété de contraction sur \mathbb{R}_+ de la fonction qui a x associe e^{-x} conduisent à la majoration :

$$|(\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(\hat{u}), v)| \leq C \int_{\Omega} |w| dx + C \int_0^t \int_{\Omega} |w| dx ds. \quad (2.12)$$

De plus, par construction de v ,

$$(\phi(u) - \phi(\hat{u}), v)_1 + b(u - \hat{u}, v) \geq 0. \quad (2.13)$$

Les fonctions ϕ et β étant strictement croissantes, après intégration de 0 à t puis passage à la limite en ε , il vient finalement :

$$|\beta(u) - \beta(\hat{u})|_{L^1(\Omega)} \leq C \int_0^t \int_{\Omega} |w| dx ds + CT \int_0^t \int_{\Omega} |w| dx ds. \quad (2.14)$$

Comme β est bi-lipschitzienne, il ne reste plus qu'à conclure à l'aide du lemme de Gronwall. Ce qui achève la démonstration du théorème 1. \square

Remarque : Dans [16], on traite le problème de l'unicité d'une telle solution, recherchée lorsque ϕ peut dégénérer, dans la classe des fonctions de $BV[0, T; L^1(\Omega)]$.

2.4. Dépendance des solutions par rapport aux données initiales

PROPRIÉTÉ 1 : Si u et \hat{u} sont deux solutions pour des données initiales u_0 et \hat{u}_0 de Ξ , alors, si on note $K = \|J\|_{\infty} \|J'\|_{\infty} / m$, $C = 2\lambda$ et ch la fonction cosinus hyperbolique, il vient :

$$\begin{aligned} |(u - \hat{u})^+(t)|_{L^1(\Omega)} &\leq \\ &\leq (M^2 |(u_0 - \hat{u}_0)^+|_{L^1(\Omega)} + MC |(u_0 - \hat{u}_0)^+|_{L^1(\Gamma)}) \cdot ch(\sqrt{K} t), \\ |(\hat{u} - u)(t)|_{L^1(\Omega)} &\leq \\ &\leq (M^2 |\hat{u}_0 - u_0|_{L^1(\Omega)} + MC |\hat{u}_0 - u_0|_{L^1(\Gamma)}) \cdot ch(\sqrt{K} t). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Faisons l'hypothèse « réaliste » suivante : dans la zone d'expérimentation, J est décroissante au sens large ; ainsi, pour $w = u - \hat{u}$ et $v = p_{\varepsilon}(\beta(u) - \beta(\hat{u}))$, l'estimation suivante a lieu :

$$\left| \int_0^t \int_{\Omega} (\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(\hat{u})) v dx ds \right| \leq mK \int_0^t \int_0^s |w^+|_{L^1} d\tau ds. \quad (2.15)$$

Comme

$$\begin{aligned}
 -\lambda \int_{\Gamma} (u^\infty - \hat{u}^\infty) v \, d\sigma &= \\
 &= -(1 - \chi) \lambda \int_{\Gamma} (u_0 - \hat{u}_0) v \, d\sigma \geq -C(1 - \chi) |(u_0 - \hat{u}_0)^+|_{L^1(\Gamma)},
 \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \beta(u) - \beta(\hat{u})}{\partial t}, v \right) &\leq \\
 &\leq K \int_0^t |w^+|_{L^1(\Omega)} \, d\tau + C(1 - \chi) |w^+(0)|_{L^1(\Gamma)}. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Comme $p_\varepsilon(\beta(u) - \beta(\hat{u}))$ converge vers $\text{sgn}_0^+(\beta(u) - \beta(\hat{u}))$ dans $L^2(Q)$ pour ε allant vers 0^+ et puisque $m|y - x| \leq |\beta(y) - \beta(x)| \leq M|y - x|$, il vient :

$$\begin{aligned}
 |w^+(s)|_{L^1(\Omega)} - \frac{M}{m} |w^+(0)|_{L^1(\Omega)} - \frac{C}{m} |w^+(0)|_{L^1(\Gamma)} &\leq \\
 &\leq K \int_0^s \int_0^t |w^+(\tau)|_{L^1(\Omega)} \, d\tau \, dt. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Notons alors

$$y''(t) = |w^+(t)|_{L^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \alpha = (M|w^+(0)|_{L^1(\Omega)} + C|w^+(0)|_{L^1(\Gamma)})/Km.$$

Ainsi $s \rightarrow y(s) = \int_0^s \int_0^t |w^+(\tau)|_{L^1} \, d\tau \, dt$ est $\mathcal{C}^2([0, T])$ et vérifie l'inéquation :

$$\text{pour tout } s \text{ positif, } y''(s) - K\alpha \leq Ky(s), \quad (2.18)$$

pour les conditions suivantes : $y(0) = y'(0) = 0$, $y'(t) \geq 0$ pour tout t , ainsi que $y(t)$. L'étude de cette inéquation à l'aide d'un changement de variable en cosinus hyperbolique, conduit aux résultats. \square

Remarque : Dans le cas où l'on ne suppose pas la décroissance de J , une étude similaire conduit au résultat plus général suivant :

$$\begin{aligned}
 |(u - \hat{u})(t)|_{L^1(\Omega)} &\leq M^2 |(u - \hat{u})(0)|_{L^1(\Omega)} \times \\
 &\times \left\{ \frac{e^{Ct}}{\sqrt{K}} \text{sh} \left(\frac{\sqrt{K}}{C} (e^{Ct} - 1) \right) + ch \left(\frac{\sqrt{K}}{C} (e^{Ct} - 1) \right) \right\} \\
 &+ MC |(u - \hat{u})(0)|_{L^1(\Gamma)} \cdot \left\{ \frac{e^{Ct}}{\sqrt{K}} \text{sh} \left(\frac{\sqrt{K}}{C} (e^{Ct} - 1) \right) \right. \\
 &\left. + ch \left(\frac{\sqrt{K}}{C} (e^{Ct} - 1) \right) \right\}. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

2.5. Comportement asymptotique

PROPRIÉTÉ 2 : Si $u_0 \in \Xi$, le problème (E) admet une unique solution u vérifiant :

$$u \in \mathcal{C}_s([0, +\infty[; V), u - \bar{\theta} \in L^2(\mathbb{R}_+, V) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}_+, H).$$

On montre de plus que lorsque t devient arbitrairement grand, $u(t)$ converge fortement dans $L^p(\Omega)$, pour tout $p \geq 1$ et dans V faible vers $\bar{\theta}$, la solution du problème stationnaire associé. ■

a) On va mettre ici en évidence diverses estimations :

1) de u dans $L^\infty(V)$, par le choix dans (2.5) de $v = u(t) - u_0$. Celui-ci étant négatif, u^∞ étant positif et ϕ vérifiant (2.2), il vient :

$$\|u\|^2 \leq C \|u_0\|^2, \text{ constantes indépendantes de } T. \tag{2.20}$$

2) de $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans $L^2(Q)$. Il n'est pas possible de choisir $\frac{\partial u}{\partial t}$ comme fonction test ; pour pallier cette difficulté, on introduira une équation différentielle auxiliaire dont la solution v_ε , plus régulière, jouera le même rôle.

Soit v_ε la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_\varepsilon = \phi(u) \text{ sur }]0, T[\text{ pour la donnée initiale } v_\varepsilon(0) = \phi(u_0). \tag{2.21}$$

On sait ([5] p. III-30) que puisque $\phi(u) \in H^1(Q)$ et $\phi(u_0) \in V$, alors v_ε tend vers $\phi(u)$ dans $H^1(Q)$ fort lorsque ε tend vers 0^+ et de plus $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$ est dans $H^1(Q)$ (donc une fonction test admissible). Prenant en compte la décroissance en temps de $\phi(u)$, on montre alors que

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \leq 0 \text{ p.p. dans } Q. \tag{2.22}$$

Suite à une utilisation classique de v_ε dans (2.5) [5] et en remarquant que

$$\int_\Gamma \lambda u_0 (v_\varepsilon - \phi(u)) \, d\sigma \geq \int_\Gamma \lambda u (v_\varepsilon - \phi(u)) \, d\sigma \geq 0 \text{ car } v_\varepsilon - \phi(u) \geq 0,$$

il vient :

$$2 \int_0^t \left(\frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \right) \, ds + |v_\varepsilon(t)|_1^2 + 2 \lambda \int_0^t \int_\Gamma u_0 \cdot \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \, d\sigma \, ds \leq |v_\varepsilon(0)|_1^2. \tag{2.23}$$

Ainsi,

$$2 \int_0^t \left(\frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} \right) ds + 2 \lambda \int_\Gamma u_0 \cdot v_\varepsilon(t) d\sigma \leq \leq 2 \lambda \int_\Gamma u_0 \cdot v_\varepsilon(0) d\sigma + |v_\varepsilon(0)|_1^2. \quad (2.24)$$

Comme $v_\varepsilon(0) = \phi(u_0)$ et $v_\varepsilon \geq \phi(u) \geq 0$ p.p. sur Γ , le résultat s'ensuit par passage à la limite sur ε .

3) de $u - \bar{\theta}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+ ; V)$.

Pour la fonction test $v = u(t) - \bar{\theta}$ et suite à l'hypothèse (2.2) sur ϕ , il vient,

$$m \|u - \bar{\theta}\|^2 \leq b(u^\infty - \bar{\theta}, u - \bar{\theta}) - \left(\frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, u - \bar{\theta} \right) + c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, u - \bar{\theta} \right). \quad (2.25)$$

Comme $c \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, u - \bar{\theta} \right) \leq 2 c T_{\max} \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx$, $u^\infty(t) = \bar{\theta}$ pour $t \geq \bar{t}$ (par hypothèse) et $\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} \in L^2(Q)$, le résultat en découle puisque $\forall t \geq 0$, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$.

En conclusion, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\mathbb{R}_+ ; H)$ et $u - \bar{\theta} \in L^\infty(\mathbb{R}_+ ; V) \cap L^2(\mathbb{R}_+ ; V)$, donc u est dans $\mathcal{C}_s(\mathbb{R}_+ ; V)$ ([10], p. 297). En particulier, pour tout t positif, $u(t, \cdot)$ et $\phi(u(t, \cdot))$ ont un sens comme élément de V .

b) Étude de la convergence de $u(t)$ vers la solution du problème stationnaire.

α) u (resp. φ) est une fonction décroissante (resp. croissante), positive et bornée, de sorte que le théorème de Beppo-Levi puis le théorème de convergence dominée de Lebesgue, appliqués successivement à $u(t)$ (resp. $\varphi(t)$), puis à $\phi(u(t))$ et à $\beta(u(t))$, conduisent à l'existence d'une limite \hat{u} (resp. $\bar{\varphi}$) pour $u(t)$ (resp. φ) dans tous les $L^p(\Omega)$ $p \in [1, \infty[$, lorsque t tend vers l'infini et $\phi(\hat{u})$ et $\beta(\hat{u})$ pour $\phi(u(t))$ et $\beta(u(t))$.

β) Introduisons ([9], p. 505) pour tout t positif, $U(t) = \int_t^{t+1} u(s) ds$ dans V ; $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, V)$ et $u(t+1) \leq U(t) \leq u(t)$ p.p. dans Ω , ainsi $U(t)$ converge dans V faible (donc faiblement dans $\tilde{L}^2(\Gamma)$) vers \hat{u} et fortement dans H . On montre de même que $\Phi(t) = \int_t^{t+1} \phi(u(s)) ds$ converge vers

$\phi(\hat{u})$ dans V faible, puis on montre que pour tout $t \geq \bar{t}$, $U^\infty(t) = \int_t^{t+1} u^\infty(s) ds = \bar{\theta}$.

Dès lors, pour tout v de V et tout t positif, l'intégration de l'équation variationnelle (2.5) entre t et $t + 1$ fournit :

$$(\beta(u(t+1)) - \beta(u(t)), v) + (\Phi(t), v)_1 + b(U(t) - U^\infty(t), v) = c(\varphi(t+1) - \varphi(t), v). \tag{2.26}$$

Dès lors, en passant à la limite sur t , il vient :

$$(\beta(\hat{u}) - \beta(\bar{u}), v) + (\phi(\hat{u}), v)_1 + b(\hat{u} - \bar{\theta}, v) = c(\bar{\varphi} - \bar{\varphi}, v) = 0. \tag{2.27}$$

Ainsi, la limite \hat{u} est solution dans V de : $(\phi(\hat{u}), v)_1 + b(\hat{u} - \bar{\theta}, v) = 0$ pour v de V . Ce problème étant V -elliptique, la solution est unique. Comme $\bar{\theta}$ est une solution triviale de ce problème, $\hat{u} = \bar{\theta}$. \square

2.6 Étude dans le cadre du disque D

Dans le cas où, comme dans l'expérimentation [3], on restreint l'étude du problème sur le disque médian D , l'équation reste la même ; par contre, la condition de bord diffère et il vient alors : $-\frac{\partial}{\partial \nu} \phi(u) = \lambda(u - u^\infty)$ sur tout le bord ∂D que l'on appelle toujours Γ .

PROPRIÉTÉ 3 : Lorsque Ω est le disque D , $\phi(u) - \phi(\bar{\theta}) \in L^2(\mathbb{R}_+, H^2(\Omega))$ et donc $\phi(u)$, $\beta(u)$ et u sont dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; V)$. De plus, $u(t)$ converge fortement dans V vers $\bar{\theta}$. \blacksquare

En effet, p.p. dans $]0, T[$, u est solution au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ de ($\bar{\theta} = \text{Cte}$) :

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} - \Delta(\phi(u) - \phi(\bar{\theta})) = \mathcal{F}(u) \text{ dans } \Omega, \tag{2.28}$$

où
$$-\frac{\partial \phi(u) - \phi(\bar{\theta})}{\partial \nu} = \lambda(u - u^\infty) \text{ p.p. sur } \Gamma, \tag{2.29}$$

la dérivée normale, pour presque tout t de $]0, T[$, ayant un sens dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, pour $w \in H^1(\Omega)$ et $\Delta w \in L^2(\Omega)$, selon la loi ([4] p. 278) :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \left\langle \frac{\partial w}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma)} = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \Delta w \cdot v \, dx. \tag{2.30}$$

Comme $u(t) - u^\infty(t)$ est dans $H^1(\Omega)$, donc dans $H^{1/2}(\Gamma)$, les résultats de régularité de [13] permettent alors de déterminer l'existence d'un relèvement dans $H^2(\Omega)$ pour $\lambda(u(t) - u^\infty(t))$ sur Γ . Dès lors, le second membre et $\frac{\partial \beta(u)}{\partial t}$ étant des éléments de $L^2(\Omega)$, [15] permet de conclure que $\phi(u)(t) - \phi(\bar{\theta}) \in H^2(\Omega)$ (donc $\phi(u)(t)$). De plus, la frontière étant de classe \mathcal{C}^∞ , [10] permet la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\phi(u) - \phi(\bar{\theta})\|_{H^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq C \left[\left| \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} \right|^2 + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 dx + \|\phi(u) - \phi(\bar{\theta})\|_{H^1(\Omega)}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

et donc $\phi(u) - \phi(\bar{\theta}) \in L^2(\mathbb{R}_+; H^2)$.

De plus, $\frac{\partial \phi(u) - \phi(\bar{\theta})}{\partial t} = \phi'(u) \frac{\partial u}{\partial t}$ est un élément de $L^2(\mathbb{R}_+; H)$, de sorte que $\phi(u) - \phi(\bar{\theta}) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; V)$; ϕ étant une fonction lipschitzienne (et $\bar{\theta} = \text{Cte}$), des résultats de [11], on peut conclure que $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+; V)$.

Dès lors, pour tout $t > \bar{t}$, comme $u^\infty(t) = \bar{\theta}$, il vient, pour $v = u - T_{\max}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \beta(u)}{\partial t}, u - T_{\max} \right) + (\phi(u), u - T_{\max})_1 + \\ + b(u - \bar{\theta}, u - T_{\max}) = \left(c \frac{\partial \varphi}{\partial t}, u - T_{\max} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

$u - T_{\max} \leq 0$ p.p., $\phi'(x) \geq m$, $\bar{\theta} \leq u \leq T_{\max}$ et comme $(v, 1)_1 = 0$ pour tout v de V , il vient,

$$m|u|_1^2 \leq 2 T_{\max} \cdot b(u - \bar{\theta}, 1). \quad (2.33)$$

Comme $b(u - \bar{\theta}, 1)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, ∇u tend vers $0_{\mathbb{R}^n} = \nabla \bar{\theta}$ dans $[L^2(\Omega)]^n$ lorsque t tend vers l'infini. Le résultat s'ensuit \square

2.7. Décomposition hilbertienne de $H^1(D)$ grâce au groupe des rotations de \mathbb{R}^2 , travail en variable polaire

PROPRIÉTÉ 4 : Si $u_0 \in \mathcal{E}$ est à symétrie radiale, alors l'unique solution de (E) est aussi à symétrie radiale. \blacksquare

Comme pour toute rotation R_θ de \mathbb{R}^2 , de centre 0 et d'angle θ , $\hat{u} = u \circ R_\theta$ est une solution du problème la propriété d'unicité permet de conclure. \square

De plus, il nous est possible de préciser le théorème classique de décomposition spectrale ([15] p. 133 par exemple) par l'utilisation du théorème de décomposition de STONE comme il est proposé dans ([2] Vol. VIII, § 2, pp. 104).

THÉORÈME 2 : *Il existe une suite de réels positifs stricts $(\mu_{n,q})$ pouvant être ordonnée de façon croissante et une suite $(w_{n,q}^{(i)})$ $i = 1, 2$ d'éléments de $H^1(D)$, vérifiant au sens classique :*

$$-\Delta w_{n,q}^{(i)} = \mu_{n,q} w_{n,q}^{(i)} \text{ dans } D, \quad -\frac{\partial w_{n,q}^{(i)}}{\partial \nu} = \lambda w_{n,q}^{(i)} \text{ sur } \Gamma, \quad i = 1, 2,$$

où λ est un réel strictement positif fixé. La suite $w_{n,q}^{(i)}$ forme une base hilbertienne de $L^2(D)$ et la suite $\sqrt{\mu_{n,q}} w_{n,q}^{(i)}$ forme une base hilbertienne de $H^1(D)$. Ces fonctions propres, constituant ces bases hilbertiennes, peuvent être explicitées sous forme tensorielle en les variables polaires r et θ . En effet :

$$w_{n,q}^{(i)} \in C^\infty(\bar{D}) \quad i = 1, 2 \text{ selon la désignation :}$$

$$w_{n,q}^{(1)} = C_{n,q} J_n(\sqrt{\mu_{n,q}} r(x, y)) \cos(n\theta(x, y)),$$

$$w_{n,q}^{(2)} = C_{n,q} J_n(\sqrt{\mu_{n,q}} r(x, y)) \sin(n\theta(x, y)),$$

où $J_n(x)$ est la n -ième fonction de Bessel et les $\sqrt{\mu_{n,q}}$ sont les racines de l'équation en $x > 0$:

$$xJ'_n(xR) + \lambda J_n(xR) = 0,$$

ou bien, $R\sqrt{\mu_{n,q}}$ est racine de $xJ'_{n-1}(x) + (R\lambda - n)J_n(x) = 0$ dans $\mathbb{R}^+ *$. ■

Les hypothèses sur la géométrie de Ω nous permettent donc de travailler avec une solution à symétrie radiale et de conduire notre étude numérique en variable polaire. Pour cela, il nous faut préciser certaines données variationnelles en partie fournies par [12].

On note

$$H_\alpha^0 = \{v \in \mathcal{D}'(0, R) / r^\alpha v \in L^2(0, R)\} = L^2(0, R; r^{2-\alpha} dr)$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H_\alpha^k(0, R) = \{v \in \mathcal{D}'(0, R) / \forall 1 \leq i \leq k, r^\alpha v^{(i)} \in L^2(0, R)\}.$$

On appelle $\mathcal{V} = H_{1/2}^1(0, R)$ et $\mathcal{H} = H_{1/2}^0(0, R)$.

PROPRIÉTÉ 5 :

1) Muni de la norme $\left(\int_0^R [u(r)^2 + (u'(r))^2] r dr \right)^{1/2}$, \mathcal{V} est un espace de Hilbert séparable, réticulé et à injection compacte dans \mathcal{H} .

2) u est absolument continue sur $]0, R[$ et l'application v définie par $v(r) = \sqrt{r} u(r)$ est continue sur $[0, R]$. On ne peut pas espérer définir une trace en 0 pour u dans \mathcal{V} (considérer par exemple $u(r) = \int_r^R \frac{dt}{t \cdot \log(t)}$, $R = \frac{1}{2}$).

3) L'ensemble des restrictions à $]0, R[$ de $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ est dense dans \mathcal{V} .

4) L'injection de $H_{1/2}^2(0, R)$ dans $H^1(0, R)$ est continue ; en particulier, $H_{1/2}^2(0, R)$ s'injecte dans $\mathcal{C}([0, R])$. ■

Les résultats de continuité sont obtenus par des majorations dans des intégrales et en remarquant que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V} \subset H^1(\varepsilon, R)$. On montre que \mathcal{V} est réticulé à partir de la définition de la dérivée distribution de u^+ , ceci pour tout u de \mathcal{V} . Le reste de la propriété découle de [12]. □

Nous allons donc poursuivre l'étude qualitative de la solution du problème à travers sa représentation en variable polaire, et donc *via* son expression variationnelle en polaire : pour presque tout t de $]0, T[$ et tout v de \mathcal{V} ,

$$\int_0^R \frac{\partial \beta(u)}{\partial t} v r dr + \int_0^R \frac{\partial \phi(u)}{\partial r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} r dr - R \lambda \{u(R) - u^\infty\} v(R) = \int_0^R \mathcal{F}(u) v r dr. \quad (2.34)$$

• Premièrement, pour le choix de $v = - \int_r^R p_\varepsilon \left(\frac{\partial \phi(u)}{\partial r} \right) dx$ et en tenant compte du fait que $\frac{\partial \beta(u)}{\partial t} \geq 0$, il vient, p.p. dans $]0, T[$, $\frac{\partial \phi(u)}{\partial r} \leq 0$ p.p. dans $]0, R[$. D'où la proposition, énonçant cette propriété descriptive importante.

PROPRIÉTÉ 6 : La température est concentriquement décroissante lorsque l'on s'éloigne du centre du cylindre, à t fixé arbitrairement. ■

• Deuxièmement, les hypothèses simplificatrices ainsi que des données expérimentales [3] nous permettent d'envisager une étude numérique calquée sur celle de [1] en supposant que les fonctions β et ϕ sont linéaires ($\beta = Id$ et $\phi = a Id$, a désignant la diffusivité de l'émulsion), mais en variable polaire. Pour cela, on fait appel aux résultats de [12] dont l'article

permet de transposer les outils utilisés pour construire des majorations d'erreurs dans les éléments finis à la variable polaire. Il nous est alors possible de procéder ainsi : introduisons sur $]0, R[$ une subdivision $\{r_i\}_{i \in \{0, N\}}$ vérifiant $r_{i+1} - r_i \leq c$ et un espace d'éléments finis classiques de type P_k , $k = 1$ ou 2 , au sens de Ciarlet, [12], on note $c(t) = 1 - \varphi(t)$ et on considère les approximations de u et c suivantes u_h^n et c_h^n , définies par (pour u_h^0 et c_h^0 donnés et pour $1/2 \leq \theta \leq 1$) :

$$\int_0^R \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v_h r dr + a \int_0^R ((1 - \theta)(u_h^n)' + \theta(u_h^{n+1})')(v_h)' r dr + R\lambda((1 - \theta)u_h^n(R) + \theta u_h^{n+1}(R) - u^\infty(n \Delta t))(R) v_h(R) = c \int_0^R J(u_h^n) c_h^n v_h r dr \tag{2.35}$$

$$\frac{c_h^{n+1} - c_h^n}{\Delta t} + J(u_h^{n+1}) c_h^{n+1} = 0. \tag{2.36}$$

Alors [1], sous les hypothèses :

$$c \in C^2(0, T; \mathcal{H}), u \in C^2(0, T; \mathcal{H}) \cap C^1(0, T; \mathcal{V})$$

et u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont $L^2(0, T; H_{1/2}^{k+1}(0, R))$, on dispose des majorations d'erreurs :

$$\text{Max}_n \{ |u(t_n) - u_h^n|, |c(t_n) - c_h^n| \} \leq k(\Delta t + h^{k+1}), \quad k = 1, 2. \tag{2.37}$$

Des courbes numériques seront présentées en fin de l'article.

Remarque : Le paragraphe concernant l'étude en variable polaire peut être étendu à la dimension 3 (variable cylindrique). L'application du théorème de STONE peut être reconduit ainsi que les outils d'analyse numérique, ceux-ci figurant dans l'article de [12].

3. PROBLÈME TRIPLEMENT NON LINÉAIRE EN φ [16]

3.1. Présentation variationnelle

Reprenons la modélisation mathématique (§ 1.3) et considérons, selon une suggestion des expérimentateurs, que les fonctions α et κ ne dépendent que de φ . On note toujours Γ à la place de Γ_1 .

Donnons-nous alors deux fonctions lipschitziennes f et g , f croissante et g décroissante, toutes deux comprises entre m et M , deux réels strictement

positifs [7]. Posons alors (F) le problème suivant : pour la donnée initiale u_0 dans V ($\bar{\theta} \leq u_0 \leq T_{\max}$), cherchons u dans $H^1(Q)$, vérifiant :

$\bar{\theta} \leq u \leq T_{\max}$ p.p. dans Q et pour presque tout t de $]0, T[$, $\forall v \in V$:

$$\int_{\Omega} g(\varphi) \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} f(\varphi) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Gamma} (u - u^{\infty}) v \, d\sigma = \\ = c \int_{\Omega} J(u)(1 - \varphi) v \, dx, \quad (3.1)$$

où $\varphi(t, x) = 1 - \exp\left(-\int_0^t J(u(s, x)) \, ds\right)$ et $u(0) = u_0$.

On envisage, pour traiter le problème, d'obtenir une solution par un théorème de point fixe dans $H^1(Q)$. Pour cela, on établit le théorème d'existence suivant :

3.2. Théorème d'existence et d'unicité pour des équations paraboliques dans le cas de coefficients qui dépendent de t et de x

Soient a et c deux éléments de $H^1(0, T; L^{\infty}(\Omega))$ vérifiant :

$$0 < m \leq a, c \leq M \quad \text{p.p. dans } Q. \quad (3.2)$$

Soient f_1 et f_2 des éléments de

$$L^2(Q) \quad \text{et} \quad H^1(0, T; V') \quad \text{respectivement,} \quad (3.3)$$

$$B \text{ élément de } L^{\infty}(Q). \quad (3.4)$$

Considérons l'équation suivante écrite formellement :

$$c(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (a(t, x) \nabla u) + B(t, x) u = \\ = f_1(t, x) + f_2(t) \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.5)$$

associée à la condition de bord :

$$-a(t, x) \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u \cdot 1_{\Gamma}, \quad (3.6)$$

ceci, pour la donnée initiale u_0 choisie dans V .

On cherchera une solution sous la forme (F') suivante : $u \in H^1(Q)$, $u(0) = u_0$ et tel que pour presque tout t de $]0, T[$ et tout v de V :

$$\int_{\Omega} c \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \lambda \int_{\Gamma} uv \, d\sigma + \int_{\Omega} Buv \, dx = \\ = \int_{\Omega} f_1 v \, dx + \langle f_2(t), v \rangle. \quad (3.7)$$

THÉORÈME 3 : *Sous les hypothèses (3.2, 3.3, 3.4) le problème (F') admet une unique solution. De plus, cette solution appartient à $L^\infty(0, T; V)$, donc à $\mathcal{C}_s([0, T], V)$. ■*

Pour la démonstration de ce théorème on considère une suite V_n d'espaces de dimension n , approximation de Galerkin de V , et on reconduit les estimations a priori classiques comme il est présenté dans [8] par exemple.

L'unicité de cette solution est immédiate car le problème est linéaire. □

3.3. Existence d'une solution au problème (II-P)

Dès lors, une méthode de point fixe fondée sur la version hilbertienne sous l'hypothèse de séparabilité du théorème de Schauder-Tychonoff [17] permet, comme dans [5] par exemple, d'obtenir l'existence d'une solution.

PROPOSITION 1 : *Il existe une solution au problème (F) dans $H^1(Q) \cap L^\infty(V)$. ■*

3.4. Au sujet de l'unicité...

En dimension quelconque, le problème de l'unicité reste ouvert. Cependant, on est en mesure d'apporter une information dans le cas monodimensionnel, par la

PROPOSITION 2 : *En dimension 1 d'espace, la solution du problème (F) est unique. ■*

Si on note u et \hat{u} deux éventuelles solutions et $w = u - \hat{u}$ et suite à des majorations élémentaires, il vient, pour $v = w$:

$$\frac{m}{2} |w(t)|^2 + \frac{m}{2} \int_0^t \|w\|^2 ds \leq k \int_0^t \int_\Omega \left(\int_0^s |u - \hat{u}|^2 d\tau \right) M^2(s, x) dx ds + C \int_0^t \int_\Omega w^2 dx ds. \quad (3.8)$$

où on note $M^2(s, t) = \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \hat{u})^2 + 1$.

Ainsi, grâce au lemme de Gronwall ([8] p. 94), on obtient

$$\int_0^t |w|^2 ds \leq K(e^{Ct} - 1) \int_0^t \int_\Omega \left(\int_0^s |u - \hat{u}|^2 d\tau \right) M^2(s, x) dx ds. \quad (3.9)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} |w(t)|^2 + \frac{m}{2} \int_0^t \|w\|^2 ds &\leq \\ &\leq C \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^s |u - \hat{u}|^2 d\tau \right) M^2(s, x) dx ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A ce point de la démonstration, supposons que l'on travaille en dimension 1 ; alors, comme $H^1(\Omega)$ s'injecte de manière continue dans $L^\infty(\Omega)$ lorsque $\Omega =]a, b[$, il s'ensuit,

$$\int_0^t \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 ds \leq C \int_0^t \left(\int_0^s \|w\|_{L^\infty(\Omega)}^2 d\tau \right) \left(\int_{\Omega} M^2(s, x) dx \right) ds. \quad (3.11)$$

Le lemme de Gronwall conduit à l'unicité de la solution. \square

Remarque : « Un résultat d'unicité conditionnel en dimension quelconque. » S'il est possible de trouver une solution \hat{u} , telle que M soit dans $L^\infty(Q)$ (i.e. $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ et $\nabla \hat{u}$ dans $L^\infty(Q)$), alors l'unicité est avérée, car il est alors possible d'appliquer le lemme de Gronwall au niveau de l'assertion (3.9).

4. ANALYSE D'UN MODÈLE DE LA FUSION D'UNE ÉMULSION CRISTALLISÉE [16]

4.1. Présentation du modèle [7]

Le modèle proposé repose principalement sur l'équation de diffusion de la chaleur. Cependant, des termes de sources de chaleur interne sont présents selon que certains états-limites sont atteints ou non, ce qui donne lieu à des problèmes de type « frontière libre ».

On note T_1 la température mesurée expérimentalement. On rappelle que cette température ne peut être qu'une valeur moyenne autour des capteurs thermiques (ceux-ci étant de taille nettement plus importante que celle des gouttes). On appelle T_2 la température théorique des gouttes. On note enfin X la proportion volumique de la phase liquide dans une goutte. Au début de l'expérience, X est nulle car l'émulsion est supposée entièrement cristallisée.

Le processus proposé est le suivant :

L'observation est faite sur une goutte-témoin arbitrairement prise au sein de l'émulsion. On réchauffe alors le bain thermostaté selon le procédé mis en œuvre pour le refroidissement, décrit à l'aide d'une fonction $T^\infty(t)$, selon la formule : $T^\infty(t) = T_0 + \chi(t)(\bar{\theta} - T_0)$, où $\bar{\theta} \geq T_0$ car on chauffe le bain. On suppose que les températures T_1 et T_2 sont identiques tant que la température

de fusion n'est pas atteinte et que ces températures sont régies par l'équation de diffusion de la chaleur sans terme de source interne.

Lorsque la température de fusion est atteinte, le processus de fonte est amorcé. On sait qu'à ce moment-là, la température de la goutte (i.e. T_2) reste constante jusqu'à la fin du processus. La fonte est alors génératrice d'une source de chaleur interne dans le système thermique, source de chaleur proportionnelle à la vitesse de fonte : $\frac{\partial X}{\partial t}$.

L'équation d'équilibre énergétique d'une goutte est alors donnée par :

$$T_2 = T_F \quad \text{et} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = - \frac{3 h}{\rho_0 R h_{SL}} (T_F - T_1). \quad (4.1)$$

L'énergie absorbée par unité de temps, pour une goutte, est :

$$- \rho_0 h_{SL} V \frac{\partial X}{\partial t}; \quad (4.2)$$

le nombre de gouttes étant de $\frac{\rho P}{\rho_0 V}$, la source de chaleur est alors :

$$\dot{q} = - \rho h_{SL} P \frac{\partial X}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Enfin, dès la fin du processus de fonte, on supposera arbitrairement que le système thermique obéit aux mêmes lois qu'avant la fonte (i.e. diffusion de la chaleur sans terme de source interne).

4.2. Élaboration d'une formulation variationnelle

On peut résumer ce modèle sous la forme synoptique :

1) Avant le processus de fonte (tant que $T_1 < T_F$),

$$T_2 = T_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} - a \Delta T_1 = 0. \quad (4.4)$$

2) Pendant le processus de fonte (dès que $T_2 = T_1 = T_F$),

$$T_2 = T_F, \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} - a \Delta T_1 = - c \frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{pour} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = k(T_1 - T_F), \quad (4.5)$$

3) Lorsque le processus de fonte est terminé ($X = 1$), on retrouve le premier cas (pas de terme de source interne).

Ce modèle est en fait adaptable à tous les corps chimiques, à condition de connaître les différentes constantes mises en jeu. Par souci de généralité, on

propose un modèle pour des variables adimensionnelles, c'est-à-dire, en introduisant

$$u = \frac{T_1 - T_F}{T_F - T_0}, \quad u_2 = \frac{T_2 - T_F}{T_F - T_0}, \quad t = \frac{a\bar{t}}{R^2} \quad \text{et} \quad r = \frac{\bar{r}}{R}$$

(où l'on appelle \bar{t} et \bar{r} les anciennes variables de temps et d'espace) ; cela permet de modéliser la fusion d'un corps quelconque en considérant que sa température de fusion est 0° , ceci dans un cylindre de rayon unité pour une température initiale de -1 .

Le modèle adimensionnel s'écrit alors :

1) Avant le processus de fonte, i.e. tant que $u < 0$,

$$u_2 = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{4.6}$$

2) Pendant le processus de fonte, dès que $u_2 = u = 0$,

$$u_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -c \frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{pour} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = ku. \tag{4.7}$$

3) Lorsque le processus de fonte est terminé ($X = 1$), on retrouve le premier cas (disparition du terme de source).

Les conditions initiales deviennent,

$$u(0, \cdot) = u_2(0, \cdot) = -1 \quad \text{et} \quad X(0, \cdot) = 0.$$

Ce système fait apparaître un caractère de « frontière libre » : on ne connaît pas a priori, en un point donné, en un instant donné, l'état physique du système. Ces informations sont des inconnues implicites du problème, qu'il est possible de révéler par une analyse numérique du modèle par exemple.

En vue d'élaborer une formulation variationnelle décrivant le phénomène physique, on intègre ces trois étapes au sein d'une écriture globale ; en introduisant formellement

$$A = \{ (t, x), 0 < u(t, x), 0 < X(t, x) < 1 \},$$

on obtient l'équation de synthèse suivante (où 1_A désigne la fonction indicatrice de la partie A) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -c \frac{\partial X}{\partial t} 1_A(t, x) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial X}{\partial t} = ku 1_A(t, x). \tag{4.8}$$

Ou encore,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= -c \cdot \frac{\partial X}{\partial t} 1_A(t, x) = -ck \cdot u \cdot 1_A(t, x) = \\ &= -ck \cdot (u)^+ \cdot 1_{]0, 1[}(X). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dès lors, l'intégration de l'équation différentielle aboutit à :

$$\forall t \geq 0, X(t, \cdot) = \min \left(k \int_0^t u^+(s, \cdot) ds, 1 \right). \tag{4.10}$$

Ainsi peut-on écrire la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= -ck \cdot (u)^+ \cdot \mathbf{1}_{]0, 1[} \left(k \int_0^t (u)^+ ds \right) = \\ &= -c \frac{\partial}{\partial t} H \left(k \int_0^t (u)^+ ds \right), \end{aligned} \tag{4.11}$$

où on note : H la fonction numérique lipschitzienne $H(x) = \text{Min}(x^+, 1)$, de sorte que l'on peut prendre pour représentant borélien de la classe de H' (au sens $\mathcal{L}^1 - \text{p.p.}$) la fonction $\mathbf{1}_{]0, 1[}(x)$.

On est donc amené à considérer l'équation non linéaire d'évolution suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -c \frac{\partial}{\partial t} H \left(k \int_0^t (u)^+ ds \right), \tag{4.12}$$

associée à la condition de bord :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda (u - u^\infty) \mathbf{1}_\Gamma, \tag{4.13}$$

pour la donnée initiale :

$$u(0, \cdot) = -1. \tag{4.14}$$

Dès lors, en notant

$$W(0, T) = \left\{ u \in L^2(0, T; V) \text{ tel que } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \right\},$$

on se pose le problème variationnel (P) suivant : chercher u dans $W(0, T)$, satisfaisant la contrainte $-1 \leq u \leq \bar{\theta}$ p.p. dans Q tel que $u(0, \cdot) = -1$ et vérifiant l'équation variationnelle à mémoire : pour presque tout t de $]0, T[$, pour tout w de V ,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w \right\rangle_{V', V} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w \, dx + \int_\Gamma \lambda (u - u^\infty) w \, d\sigma = \\ = -c \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} H \left(k \int_0^t (u)^+ ds \right) w \, dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

THÉORÈME 4 : *Il existe dans $W(0, T)$ une solution unique au problème (P). De plus, cette solution est dans $H^1(Q) \cap \mathcal{C}_s([0, T]; V)$ et $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T]; V)$ si $\Omega = D$. ■*

Le second membre ainsi construit permet le passage à la limite faible dans le cadre d'applications du théorème de point fixe de Schauder pour des espaces hilbertiens séparables (car alors, si u_n converge faiblement vers u dans $W(0, T)$, il en sera de même pour $H\left(k \int_0^t (u_n)^+ ds\right)$ vers $H\left(k \int_0^t (u)^+ ds\right)$ dans $H^1(Q)$ et donc $\frac{\partial}{\partial t} H\left(k \int_0^t (u_n)^+ ds\right)$ convergera faiblement vers $\frac{\partial}{\partial t} H\left(k \int_0^t (u)^+ ds\right)$ dans $L^2(Q)$).

En outre, le second membre étant dans $L^2(Q)$, il est possible de préciser que $u \in H^1(Q) \cap \mathcal{C}_s([0, T], V)$. Si de plus, $\Omega = D$, l'analogie au § 2.6 conduit au résultat. L'unicité se démontre à l'aide de la méthode de Ladysenskaja ([9] p. 15, [6], [2] p. 779), où pour deux solutions u et \hat{u} on choisit, pour un s arbitraire, la fonction test : $-\int_t^s u - \hat{u} d\tau \cdot 1_{\{t \leq s\}}$. □

Remarque : Cette méthode permet de fournir un résultat d'unicité mais laisse hors d'atteinte tout résultat de comparaison entre deux solutions provenant de données initiales différentes ou tout résultat de monotonie.

4.3. Croissance de la solution u par rapport au temps

On cherche alors à obtenir directement la croissance dans le temps de la fonction représentative de la température de l'émulsion.

PROPRIÉTÉ 7 : L'unique solution u au problème (P) est croissante en temps, au sens où : pour $0 \leq t < t + h \leq T$, $u(t) \leq u(t + h)$ p.p. dans Ω . ■

Le principe de la démonstration consiste à soustraire l'équation (4.15) considérée à l'instant $t + h$ de celle prise à l'instant t ; on choisit la fonction test $v = (u(t) - u(t + h))^+$ et on remarque qu'alors :

$$\begin{aligned}
 -c \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} H\left(k \int_0^t (u)^+ ds\right) v dx + \\
 + c \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} H\left(k \int_0^{t+h} (u)^+ ds\right) v dx \leq 0. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Pour cela, il y a lieu de considérer le second membre sous sa forme développée (formule 4.10) et travailler avec la valeur de $k \int_0^t (u)^+ ds$.

5. ANALYSE DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES (DANS LE DISQUE *D*) [16]

On présente ici les résultats numériques obtenus par le schéma (2.34-2.35) dans le cadre de la variable polaire pour le problème (*E*) avec β et ϕ linéaires et pour le problème (*F*) (à titre d'illustration, car on n'a pas de théorèmes justifiant la légitimité du schéma numérique dans ce cas). Les courbes de la figure 1 représentent l'évolution de la température, à différents rayons du disque, au cours du temps, pour le modèle (*F*). La courbe la plus à

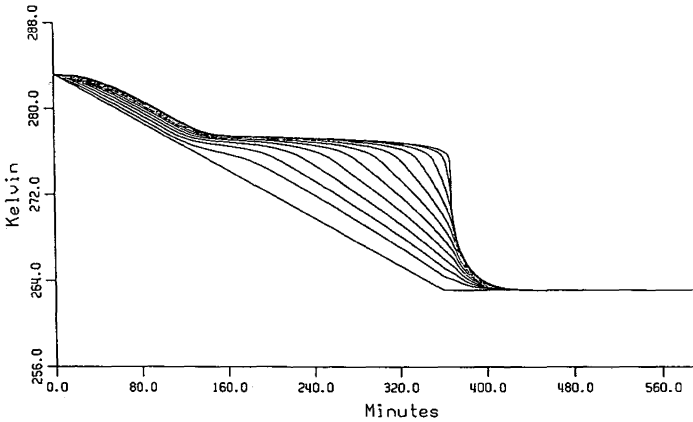


Figure 1.

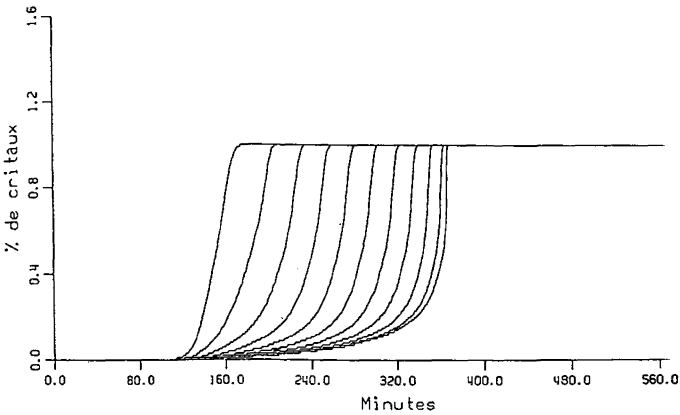


Figure 2.

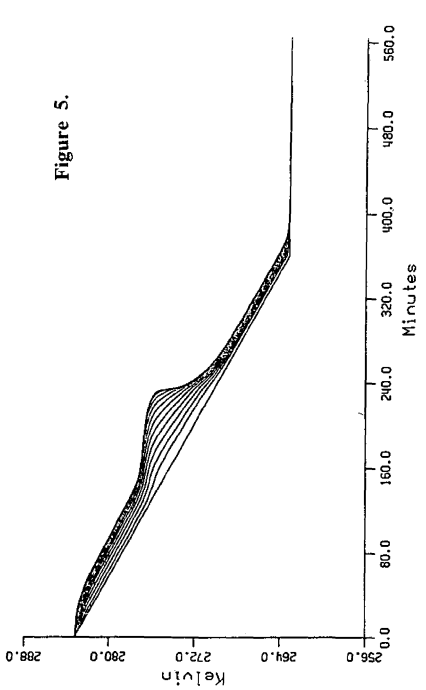
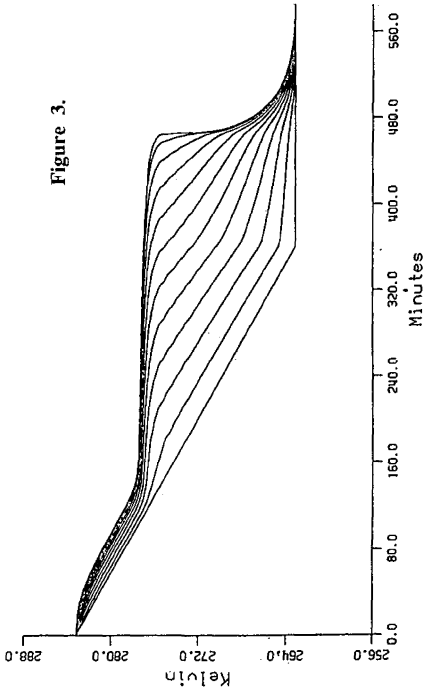
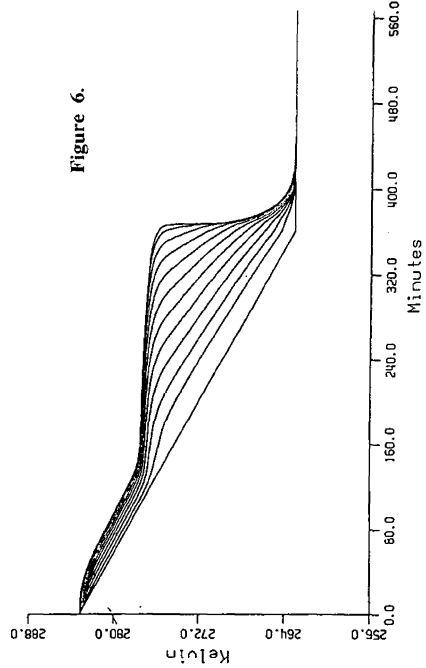
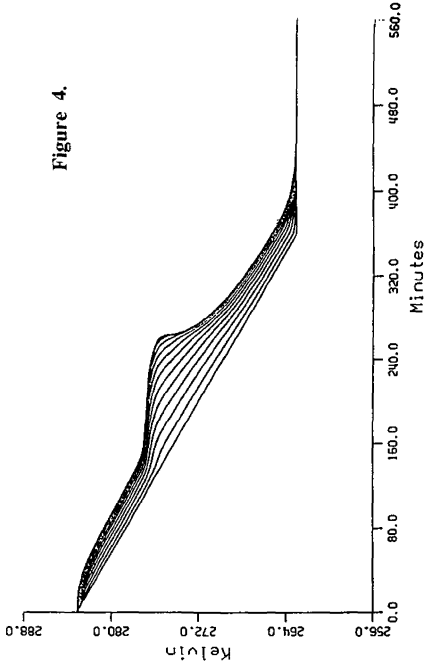


Figure 8.

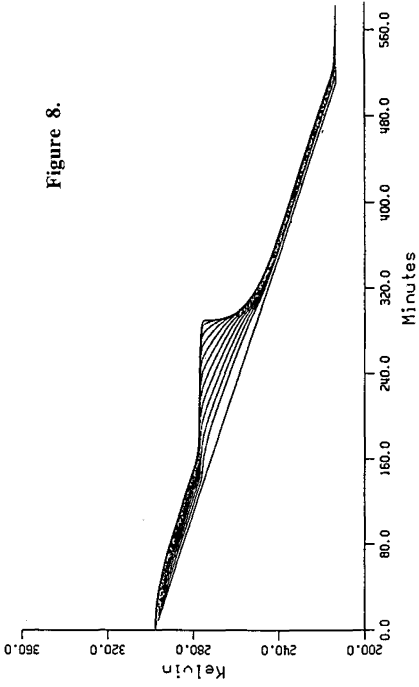


Figure 10.

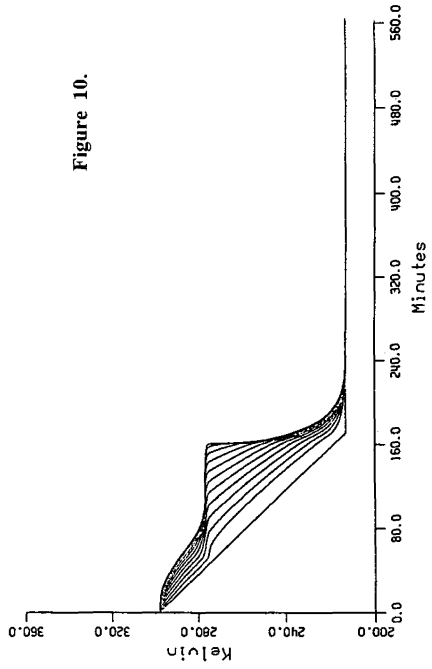


Figure 7.

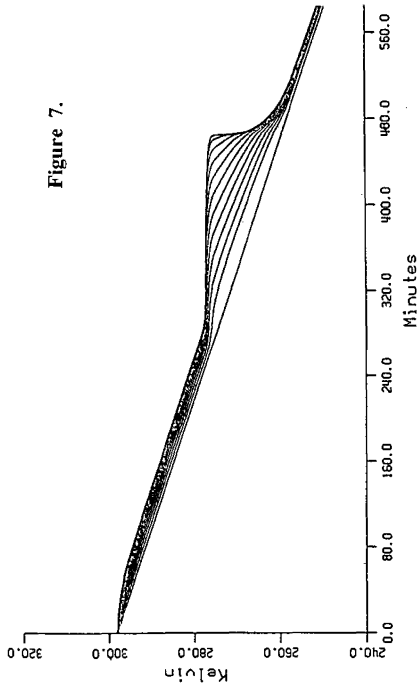
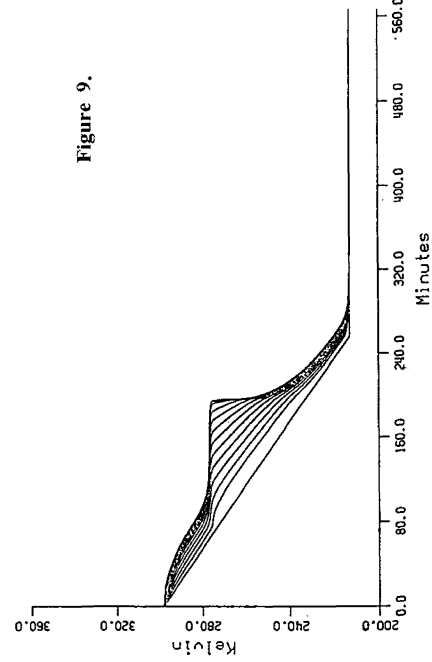


Figure 9.



gauche (linéaire par morceaux), représente la température imposée du bain thermostaté u^∞ , puis viennent les courbes du bord du disque pour la seconde et du centre du disque pour la dernière (la plus à droite). La figure 3 représente, dans les mêmes configurations, le modèle (E). On remarque une différence non négligeable sur la fin du phénomène. La différence de température $\Delta\theta$ qui existe entre la courbe du bord du cylindre et la courbe du centre du cylindre au début de l'expérience, et ce même $\Delta\theta$ en fin de cristallisation, est réduit d'un facteur proche de 2 pour le modèle (F), alors que ce n'est pas le cas dans le modèle (E). Les figures 4 et 5 l'illustrent bien. La figure 5 correspond au modèle (F), et la figure 4 au modèle (E), ceci pour un second membre volontairement réduit. Cette différence est due à l'évolution de α et κ , donc de la viscosité, en fonction de φ pour le modèle (F). Expérimentalement, cette différence est importante, car la viscosité du milieu ne peut pas être la même avant (milieu liquide) et après (milieu solide) le phénomène de cristallisation. La figure 2 donne l'évolution de φ au cours du temps (selon les mêmes critères d'ordre, sauf pour la courbe du bain thermostaté qui n'existe pas pour φ). Les figures 1 et 6 diffèrent par le choix de l'interpolation numérique du second membre, type quadratique (*fig. 1*) ou du type Spline cubique (*fig. 6*). Les courbes 7, 8, 9 et 10, représentent les simulations numériques dans le cadre du modèle (F), pour des configurations plus proches de l'expérimentation et pour des vitesses de refroidissement sur le bord différentes. On remarque que les courbes numériques calquent relativement bien le phénomène observé expérimentalement et développé dans [7]. On peut penser que ces modèles, qui ne sont certes pas optimaux, décrivent assez bien le comportement que l'on souhaitait isoler et analyser.

On retrouve sur les courbes numériques la formation d'un palier, celui-ci est décroissant au cours du temps. Il est assez important au centre du cylindre car la chaleur interne dégagée réchauffe cette région et retarde les cristallisations. Une analyse expérimentale de la présence de ce palier est présentée dans [7].

On retrouve également sur les courbes numériques ce qui a été démontré mathématiquement sur le modèle théorique :

la décroissance de la température au cours du temps (th. 1) ;

pour un temps t fixé, la décroissance concentrique en espace (prop. 6). En effet, les courbes numériques ne se croisent pas ; elles restent toujours dans le même ordre, avec comme température la plus basse celle du bord du cylindre, celle du centre étant la plus élevée. Ceci est le résultat de la conduction thermique ;

le comportement asymptotique vers la température $\bar{\theta}$ du bain thermostaté (prop. 2).

Enfin, un autre avantage de disposer des courbes et du schéma numérique

réside dans le fait qu'il est pratiquement impossible de déterminer expérimentalement l'allure des courbes φ , le modèle numérique le permet à la mesure de la confiance placée dans le modèle mathématique.

REFERENCES

- [1] A. ABKARI, *Modélisation d'une réaction chimique d'ordre un dans un calorimètre*, Thèse, Lyon, 1984.
- [2] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Masson, Paris, 1988.
- [3] J. P. DUMAS, M. STRUB, M. KRICHI, Étude thermique des changements de phases dans une émulsion, *Rev. Gén. Therm. Fr.*, 341, mai 1990, pp. 267-273.
- [4] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1990.
- [5] G. GAGNEUX, *Sur des problèmes unilatéraux dégénérés de la théorie des écoulements diphasiques en milieu poreux*, Thèse de doctorat d'État, Université de Besançon, 1982.
- [6] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, Three-dimensional solutions of nonlinear degenerate diffusion-convection processes, *Euro. Jnl. of Applied Mathematics*, vol. 2, 1991, pp. 171-187.
- [7] M. KRICHI, *Étude des transferts thermiques dans des systèmes dispersés subissant des transformations de phases*, Thèse, Pau, 1992.
- [8] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1968.
- [9] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [10] J. L. LIONS, E. MAGENÈS, Problèmes aux limites non homogènes, Dunod, Paris, t. 1, 1968.
- [11] M. MARCUS, V. J. MIZEL, Every superposition operator mapping one Sobolev space into another is continuous, *J. Functional. Anal.*, 33, 1979, pp. 217-229.
- [12] B. MERCIER, G. RAUGEL, Résolution d'un problème aux limites dans un ouvert axisymétrique par éléments finis en r , z et séries de Fourier en θ , *R.A.I.R.O. M2AN*, Vol. 16, num. 4, 1982, pp. 405-461.
- [13] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [14] M. OLIVE, Le feu apprivoisé, *Archéologia*, n° 225, juin 1987, pp. 16-25.
- [15] P. A. RAVIART, J. M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.
- [16] G. VALLET, *Sur des problèmes non linéaires provenant des transferts thermiques dans des systèmes dispersés subissant des changements de phases*, Thèse, Université de Pau, 1993.
- [17] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications*, t. 1 (Fixed-point Theorems), Springer-Verlag-New York inc, 1986.
- [18] Y. ZERAOULI, *Étude thermique des transformations des émulsions concentrées, application à la calorimétrie à balayage*, Thèse, Pau, 1991.