M2AN - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

R. EYMARD

T. GALLOUËT

Convergence d’un schéma de type éléments finis-volumes finis pour un système formé d’une équation elliptique et d’une équation hyperbolique

M2AN - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 27, n° 7 (1993), p. 843-861

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1993__27_7_843_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 27, n° 7, 1993, p. 843 à 861)

CONVERGENCE D'UN SCHÉMA DE TYPE ÉLÉMENTS FINIS-VOLUMES FINIS POUR UN SYSTÈME FORMÉ D'UNE ÉQUATION ELLIPTIQUE ET D'UNE ÉQUATION HYPERBOLIQUE (*)

par R. EYMARD (1) et T. GALLOUËT (2)

Communiqué par R. TEMAM

Résumé. — *La modélisation des écoulements polyphasiques en milieu poreux conduit, dans un cas simplifié, au système d'équations couplées* $u_t - \operatorname{div}(u \nabla P) = 0$ *et* $\Delta P = 0$, *définies sur un ouvert borné* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *ou de* $\mathbb{R}^3$. *Cet article en étudie une discrétisation.*

Un maillage triangulaire dans $\mathbb{R}^2$ *(tétraèdres dans* $\mathbb{R}^3$*) est utilisé pour la discrétisation en espace des deux équations. Le schéma d'Euler explicite, et une méthode de volumes finis pondérés, sont appliqués à la discrétisation en temps et en espace de la première équation ; une méthode d'éléments finis est utilisée pour l'équation elliptique en* P.

Le schéma numérique ainsi défini permet, sous une condition de stabilité usuelle, une propriété de convergence vers une solution du système d'équations couplées, prouvée à l'aide d'une estimation de la variation totale des solutions approchées. Cette convergence permet de montrer l'existence d'une solution à ce système d'équations.

Abstract. — Convergence of a finite element-finite volume scheme for coupled elliptic-parabolic equations. *We study here a discretization scheme for the following coupled system of equations :*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(u \nabla P) = 0 \\ \Delta P = 0 , \end{cases}$$

defined over a bounded open set Ω *of* $\mathbb{R}^2$ *or* $\mathbb{R}^3$.

A triangular mesh is used for the space discretization of both equations, in the case of two space dimensions (a tetrahedral mesh is used in the 3D *case). The time discretization of the first equation is performed with the explicit Euler scheme, while its space discretization uses a weighted finite volume method. A finite element method is used for the elliptic equation. The numerical scheme thus defined converges, under a usual stability condition, in the sense that a family of approximate solutions converges, when the mesh size tends to 0, towards a solution of the original coupled system. This result is proven* via *an estimate on the total variation of the approximate solutions. Note that it also yields the existence of a solution to this system of equations.*

(*) Manuscrit reçu le 2 décembre 1991 et sous forme révisée le 3 novembre 1992.
(1) Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 58 Boulevard Lefebvre, 75015 Paris.
(2) Université de Savoie, Département de Mathématiques, BP 1104, 73011 Chambéry Cedex.

1. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

1.1. Contexte physique

La simulation des écoulements en milieu poreux est un enjeu important dans l'industrie pétrolière, car elle permet la compréhension, la prévision et l'optimisation de la production des hydrocarbures. Les traitements numériques utilisés industriellement ont surtout fait appel à des méthodes couplées volumes/différences finis [1]. Depuis 1990, une méthode est apparue, qui concilie pour la première fois dans ce domaine le couplage d'une méthode d'éléments finis avec une méthode de volumes finis. Cet article a pour but d'en montrer la convergence, dans un cas très simple. Le modèle physique à l'origine du problème traité ici est le suivant :

— on étudie des écoulements diphasiques immiscibles incompressibles ;

— chaque phase liquide est composée d'un unique constituant, dont on étudie la conservation ;

— la gravité, et les phénomènes capillaires sont négligés devant les champs de pression développés par les termes d'alimentation ;

— la porosité du milieu est supposée constante ;

— le flux volumique de chaque phase est supposé suivre une loi de Darcy polyphasique linéaire, et les viscosités des deux fluides sont supposées égales ;

— la perméabilité du réservoir est supposée constante et isotrope.

Sous ces hypothèses, le problème se ramène à la recherche de la saturation $u(x, t)$ de l'une des deux phases, et de la pression $P(x, t)$, fonctions de la variable d'espace x et de temps t, solutions du système d'équations couplées suivant :

$$\begin{cases} (u(x, t))_t - \operatorname{div}\,(u(x, t)\,\nabla P(x)) = 0 \\ (1 - u(x, t))_t - \operatorname{div}\,((1 - u(x, t))\,\nabla P(x)) = 0\,. \end{cases}$$

Un cadre classique de traitement de ce problème est l'emploi de la théorie des caractéristiques, jointe à un traitement classique d'une équation elliptique. Cependant, une telle approche ne peut pas permettre de résoudre des problèmes posés dans un cadre physique plus complexe (compressibilité, équilibres thermodynamiques, ...), pour lequel seules des méthodes de volumes finis permettent d'obtenir des solutions admissibles.

1.2. Modèle mathématique

On désignera par $d = 2$ ou 3 la dimension de l'espace dans laquelle se pose le problème physique. Le lieu des phénomènes d'écoulement est représenté par Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à contours polygonaux ($d = 2$) ou à contours polyédriques ($d = 3$). On désignera par Γ la frontière de Ω, et $\vec{n}$ sera la normale à Γ extérieure à Ω.

On se donne une fonction $g \in L^2(\Gamma)$ vérifiant $\int_\Gamma g(\gamma)\, d\gamma = 0$; cette fonction traduit les termes d'alimentation par la frontière d'un fluide dont la nature doit être précisée sur la partie de la frontière où les flux sont entrants.

On pose $\Gamma^+ = \{\gamma \in \Gamma, g(\gamma) \geqslant 0\}$, $\Omega^+ = \Omega \cup \Gamma^+$ et $\Gamma^- = \{\gamma \in \Gamma, g(\gamma) \leqslant 0\}$.

On se donne deux fonctions $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\bar{u} \in L^\infty(\Gamma^+ \times \mathbb{R}^+)$, représentant respectivement la saturation initiale, et la saturation du fluide entrant.

On pose :

$$\mathscr{D}(\Omega^+ \times \mathbb{R}^+) = \left\{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^- \times \mathbb{R}^+\right\}.$$

On recherche $(u, P) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+) \times H^1(\Omega)$ solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta P(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega \\ \nabla P(\gamma) \,.\, \vec{n}(\gamma) = g(\gamma) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \\ u_t(x, t) - \operatorname{div}(u(x, t) \nabla P(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \Omega, \text{ et } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \\ u(\gamma, t) = \bar{u}(\gamma, t) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma^+ \text{ et tout } t \in \mathbb{R}^+ . \end{cases}$$

Une telle solution $(u, P) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+) \times H^1(\Omega)$ est, en fait, solution au sens faible suivant :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega^+ \times \mathbb{R}^+) \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \int_\Omega u(x, t) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) - \nabla P(x) \,.\, \nabla \varphi(x, t) \right) dx\, dt \\ \displaystyle + \int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x, 0)\, dx \\ \displaystyle + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Gamma^+} \bar{u}(\gamma, t)\, \varphi(\gamma, t)\, g(\gamma)\, d\gamma\, dt = 0 \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\forall X \in H^1(\Omega) \int_\Omega \nabla P(x) \,.\, \nabla X(x)\, dx - \int_\Gamma X(\gamma)\, g(\gamma)\, d\gamma = 0 . \tag{2}$$

L'existence et l'unicité (à une constante près) de $P \in H^1(\Omega)$ solution de (2) est bien connue. La fonction ∇P est alors déterminée de manière unique.

Un résultat d'existence d'une fonction u solution de (1) a été établi par G. Caginalp [9], lorsque les hypothèses sur la régularité du champ de pression, jointes aux hypothèses de régularité du maillage, sont suffisantes.

L'existence d'une fonction u solution de (1) n'est pas un résultat classique, dans le cas contraire. Aussi, l'existence de u sera une conséquence de la démonstration de la convergence du schéma numérique. L'unicité de cette solution ne pourrait être montrée que si des hypothèses supplémentaires sur la fonction g conduisent à une régularité du champ P suffisante.

Remarques :

i) (u, P) solution de (1) (2) satisfait également au sens faible l'équation :

$$(1 - u(x, t))_t - \operatorname{div}\left((1 - u(x, t))\,\nabla P(x)\right) = 0$$

ii) le schéma exposé dans cet article assure la conservativité locale de chacune des deux grandeurs u et $1 - u$;

iii) l'estimation faible de la variation totale de u_h (approchant u), démontrée en partie 4, fait intervenir l'appartenance de P_h (approchant P) à $H^1(\Omega)$, et la démonstration de la convergence du schéma fait intervenir la convergence de la pression approchée dans $H^1(\Omega)$ vers la solution de (2) (partie 5) ;

iv) d'autres auteurs ont utilisé des estimations sur la solution approchée (notée u_h ci-dessus) voisines de l'estimation faible sur la variation totale de u_h (que nous utilisons dans cet article), pour montrer la convergence de schémas numériques pour l'approximation d'équations hyperboliques non linéaires [4] ;

v) le schéma et la démonstration exposés ici s'étendent sans difficulté au problème suivant, appelé « problème avec termes source » :

$$\begin{cases} -\Delta P(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \\ \nabla P(\gamma)\,.\,\vec{n}(\gamma) = g(\gamma) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \\ u_t(x, t) - \operatorname{div}\left(u(x, t)\,\nabla P(x)\right) + u(x, t)\,f^-(x) = s(x, t)\,f^+(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour tout } x \in \Omega, \text{ et } t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ pour tout } x \in \Omega \\ u(\gamma, t) = \bar{u}(\gamma, t) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma^+ \text{ et tout } t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ avec $\displaystyle\int_\Gamma g(\gamma)\,d\gamma + \int_\Omega f(x)\,dx = 0$ et $s \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)$; cependant, afin de ne pas alourdir la démonstration, seuls les ajouts liés à ce problème seront mentionnés dans la suite en remarques.

2. SCHÉMA NUMÉRIQUE

2.1. Définition des triangulations et espaces de fonctions approchées

Propriétés géométriques :

Soit $h \in \mathbb{R}^{+*}$; on définit une triangulation $\mathfrak{I}_h = (K_i)_{i=1,\ldots,N_e}$ de Ω, constituée si $d = 2$ par des triangles, si $d = 3$ par des tétraèdres. La famille des sommets du maillage sera notée $(A_j)_{j \in \mathbb{S}}$ où $\mathbb{S} = \{1, 2, ..., N_s\}$ dépend de h.

On veut imposer sur $\mathfrak{I}_h$ des conditions qui suffisent à assurer :

— que les gradients des fonctions de base des élements finis P^1 sur cette triangulation aient deux à deux des produits scalaires négatifs (condition suffisante de positivité des transmissivités) ;

— que la distance entre tout élément de $H^1(\Omega)$ et les fonctions approchées par élément fini P^1 sur $\mathfrak{I}_h$ tende vers 0 avec h (condition de convergence de la méthode d'éléments finis).

Il suffit pour cela de supposer, et on le fera dans la suite, qu'il existe trois réels a, b, η, avec $0 < a < b$ et $0 < \eta < \pi/3$, tels que :

* la distance entre deux sommets d'un même élément soit comprise entre ah et bh

* la mesure en radians de tout angle constitué de trois sommets d'un même élément soit comprise entre η et $\pi/2$.

On peut déduire de ces hypothèses que a et b peuvent être choisis pour que la mesure de K_i soit comprise entre ah^d et bh^d. On déduit aussi l'existence d'un entier n_0 indépendant de h tel que :

$$n_0 \geq \sup_{j \in \mathbb{S}} \text{card } \{k \in \mathbb{S}/k \text{ et } j \text{ sont deux sommets d'un même élément}\} .$$

Ce nombre n_0 majore le nombre des sommets « voisins » d'un sommet donné.

Fonctions de base P^1 :

On définit la base classique P^1 de l'espace de fonctions V_h constituée des fonctions $X_j \in H^1(\Omega)$, $j \in \mathbb{S}$, telles que $\forall j \in \mathbb{S}$, $\forall k \in \mathbb{S}$, $X_j(A_k) = \delta_{jk}$ où δ_{jk} est le symbole de Kronecker. Pour chaque $j \in \mathbb{S}$, la fonction X_j est alors continue, de gradient ∇X_j constant dans chaque élément, et vérifie la propriété suivante essentielle pour la suite :

$$\forall x \in \Omega \sum_{j \in \mathbb{S}} X_j(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j \in \mathbb{S}} \nabla X_j(x) = 0 .$$

Définition des transmissivités :

Du fait des hypothèses sur le maillage (angles entre arêtes inférieurs à un droit), on a, pour tout j, $k \in \mathbb{S}$, $j \neq k$, et tout $x \in \Omega$:

$$\nabla X_j(x) \cdot \nabla X_k(x) \leq 0 .$$

Cette propriété sera utilisée explicitement dans la démonstration de la convergence du schéma.

On définit la transmissivité entre deux sommets j, $k \in \mathbb{S}$ par :

$$T_{jk} = - \int_{\Omega} \nabla X_j(x) \, . \, \nabla X_k(x) \, dx \, .$$

Définition du volume fini pondéré associé à chaque sommet :

On pose pour tout $j \in \mathbb{S}$: $\mathcal{V}_j = \int_{\Omega} X_j(x) \, dx$: nous appelons $\mathcal{V}_j$ le volume fini pondéré associé au sommet A_j.

On notera $\mathcal{V}_{\Omega} = \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathcal{V}_j$ le volume de Ω (l'aire de Ω si $d = 2$).

On notera $\mathcal{S}_j = \int_{\Gamma} X_j(\gamma) \, d\gamma$: $\mathcal{S}_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{S}$ tel que $A_j \in \Omega$, et $\mathcal{S}_j \neq 0$ pour tout $j \in \mathbb{S}$ tel que $A_j \in \Gamma$.

2.2. Définition des champs de pression P et P_h

On note $P \in H^1(\Omega)$ une solution quelconque de la formulation variationnelle (2). De même, on note $P_h \in V_h$ une solution du problème suivant :

$$\forall X \in V_h \int_{\Omega} \nabla P(x) \, \nabla X(x) \, dx = \int_{\Gamma} X(\gamma) \, g(\gamma) \, d\gamma \, . \tag{2_h}$$

Le problème (2_h) admet, comme le problème (2), une solution unique à une constante près. Il est alors possible de choisir les fonctions P et P_h telles que $\int_{\Omega} P_h(x) \, dx = \int_{\Omega} P(x) \, dx = 0$. On peut alors utiliser l'inégalité de Poincaré sur les fonctions à moyenne nulle, pour conclure à la coercivité de la forme bilinéaire apparaissant dans l'équation (2).

Un résultat classique d'interpolation conduit alors à la propriété :

$$\lim_{h \to 0} \|P - P_h\|_{H^1(\Omega)} = 0 \, .$$

On notera P_j les composantes de P_h dans la base d'éléments finis :

$$P_h = \sum_{j \in \mathbb{S}} P_j \, X_j \, .$$

On a alors, par définition de P_h, une relation équivalente à la relation (2_h), en posant $g_j = \int_{\Gamma} X_j(\gamma) \, g(\gamma) \, d\gamma$:

pour tout $j \in \mathbb{S}$:

$$\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}(P_k - P_j) + g_j = 0 \, . \tag{3_a}$$

On définit l'ensemble $\mathscr{A} \subset \mathbb{S}^2$ des arêtes par $\mathscr{A} = \{(j, k) \in \mathbb{S}^2 / T_{jk} \neq 0$ et $P_j > P_k\}$. On introduit les fonctions $g^+(\gamma) = \sup(g(\gamma), 0)$, et $g^- = (-g)^+$.

Nous posons :

$$g_j^+ = \int_\Gamma X_j(\gamma)\, g^+(\gamma)\, d\gamma \quad \text{et} \quad g_j^- = \int_\Gamma X_j(\gamma)\, g^-(\gamma)\, d\gamma\ ;$$

nous avons $g_j^+ - g_j = g_j$.

On note $G^+ = \int_\Gamma g^+(\gamma)\, d\gamma = \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+$ (cette grandeur ne dépend pas de h).

La relation (3_a) s'écrira donc aussi pour tout $j \in \mathbb{S}$:

$$\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}(P_k - P_j) + g_j^+ - g_j^- = 0 . \tag{3}$$

Remarque : dans le cas du problème « avec termes source », la relation (3) inclut également un terme $f_j^+ - f_j^-$, avec $f_j^+ = \int_\Omega X_j(x)\, f^+(x)\, dx$ (idem pour f_j^-).

2.3. Choix du pas de temps

Pour une triangulation $\mathfrak{J}_h$ donnée, on choisit un réel $\Delta t > 0$ vérifiant la condition suivante, notée condition (S) dans la suite :

On se donne $\alpha \in]0, 1[$. On impose sur Δt que :

$$\begin{cases} \forall (j, k) \in \mathscr{A} & 1 - \Delta t \dfrac{(n_0 + 1)}{\mathscr{V}_k} T_{jk}(P_j - P_k) > \alpha \\ \forall j \in \mathbb{S} & 1 - \Delta t \dfrac{(n_0 + 1)}{\mathscr{V}_j} g_j^+ > \alpha . \end{cases} \tag{S}$$

Remarques :

i) Dans la plupart des cas pratiques, la fonction $g(\gamma)$ est assez régulière pour pouvoir obtenir une majoration de $\|\nabla P_h\|_\infty$ indépendante de h (on montre dans la suite une majoration de $\|\nabla P_h\|_2$, quelle que soit la fonction $g \in L^2(\Gamma)$). Dans ces cas, la condition (S) est du type $\Delta t \leq Dh$, où D n'est pas fonction de h ; cependant, dans les autres cas, on peut toujours trouver $\Delta t > 0$ vérifiant les conditions (S).

ii) Dans le cas du problème « avec termes source », on remplacera $(n_0 + 1)$ par $(n_0 + 2)$, avec la condition supplémentaire :

$$\forall j \in \mathbb{S} \quad 1 - \Delta t \frac{(n_0 + 2)}{\mathscr{V}_j} f_j^+ > \alpha .$$

La relation déduite de (3) :

$$\sum_{k \in \mathbb{S},\, P_k > P_j} T_{jk}(P_k - P_j) + g_j^+ = \sum_{k \in \mathbb{S},\, P_k < P_j} T_{jk}(P_j - P_k) + g_j^-$$

permet d'écrire l'inégalité suivante, qui est une condition de type *CFL* :

$$\Delta t \leqslant \inf_{j \in \mathbb{S}} \frac{\mathcal{V}_j}{\sum_{k \in \mathbb{S},\, P_k < P_j} T_{jk}(P_j - P_k) + g_j^-} . \tag{4}$$

On notera, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n = n\,\Delta t$.

2.4. Définition du schéma numérique sur la saturation

Origine du schéma : l'équation $u_t - \operatorname{div} u\, \nabla P\ \ 0$ est d'abord traitée par le schéma d'Euler explicite :

$$u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n) - \Delta t \operatorname{div} u(x, t^n)\, \nabla P = 0 .$$

La discrétisation spatiale est obtenue en multipliant l'équation ci-dessus par chacune des fonctions X_j, $j \in \mathbb{S}$, et en intégrant dans Ω. On écrit alors le traitement de chaque terme, en appliquant un développement de Galerkin à P (principe des éléments finis), mais pas à u :

$$\int_\Omega X_j(x)\, u(x, t^n)\, dx = u(A_j, t^n) \int_\Omega X_j(x)\, dx$$

$$\int_\Omega X_j(x) \operatorname{div} u(x, t^n)\, \nabla P\, dx =$$

$$= - \int_\Omega u_{\text{amont}}\, \nabla X_j(x)\, \nabla P\, dx + \int_\Gamma u_{\text{amont}}\, X_j(\gamma)\, g(\gamma)\, d\gamma .$$

Dans l'équation ci-dessus, u_{amont} est une valeur discrète prise par décentrement vers l'amont de l'écoulement, aussi bien entre deux sommets, que pour les termes de bord.

Cette discrétisation permet de retrouver, à partir de la formulation variationnelle sur P_h, une discrétisation similaire pour l'équation :

$$(1 - u)_t - \operatorname{div}\,(1 - u)\, \nabla P = 0 .$$

Cette propriété permet l'application du schéma aux cas d'équations non linéaires par rapport à u, tout en maintenant la conservativité de ce schéma [2]. Le problème de la convergence du schéma dans ce contexte est encore complètement ouvert. Cependant, dans des cas non linéaires où l'équation elliptique est indépendante de u, la démonstration de la convergence du schéma est vraisemblablement possible [3].

Écriture du schéma : on se donne deux fonctions, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $\bar{u} \in L^\infty(\Gamma^+ \times \mathbb{R}^+)$. On prolonge $\bar{u}$ par 0 sur Γ, pour tout t.

On définit u_j^0, pour tout $j \in \mathbb{S}$, par $u_j^0 = \frac{1}{\mathscr{V}_j} \int_\Omega X_j(x)\, u_0(x)\, dx$.

On définit $\bar{u}_j^n$, pour tout $j \in \mathbb{S}$ et $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\text{si} \qquad \mathscr{S}_j \neq 0\,, \quad \bar{u}_j^n = \frac{1}{\mathscr{S}_j\, \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\Gamma X_j(\gamma)\, \bar{u}(\gamma, t)\, d\gamma\, dt$$

$$\text{si} \qquad \mathscr{S}_j = 0\,, \quad \bar{u}_j^n = 0\,.$$

On notera $\bar{u}_h^n(\gamma) = \sum_{j \in \mathbb{S}} \bar{u}_j^n X_j(\gamma)$ et $\bar{u}_h(\gamma, t) = \bar{u}_h^n(\gamma)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ tel que $n\, \Delta t \leqslant t < (n+1)\, \Delta t$.

Pour tout $\mathcal{O}$, on définit la convergence d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers une fonction f dans $L^\infty(\mathcal{O})$, pour la topologie faible *, par :

$$\forall \varphi \in L^1(\mathcal{O}) \ \lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{O}} \varphi(x)\, f_n(x)\, dx = \int_{\mathcal{O}} \varphi(x)\, f(x)\, dx\,.$$

La convergence dans $L^\infty(\Gamma \times \mathbb{R}^+)$, pour la topologie faible *, de $\bar{u}_h$ vers $\bar{u}$, quand h tend vers 0, résulte aisément de la définition de $\bar{u}_h$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $j \in \mathbb{S}$ on définit u_j^{n+1} à partir des u_k^n, $k \in \mathbb{S}$ par la relation suivante :

$$\mathscr{V}_j(u_j^{n+1} - u_j^n) - \Delta t \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}\, u_{jk}^n (P_k - P_j) + \bar{u}_j^n\, g_j^+ - u_j^n\, g_j^- \right) = 0 \quad (5)$$

équation dans laquelle u_{jk}^n est la valeur prise à l'amont de l'écoulement entre les sommets j et k :

$$\text{si} \qquad P_k > P_j \quad \text{alors} \quad u_{jk}^n = u_k^n \quad \text{sinon} \quad u_{jk}^n = u_j^n\,.$$

La somme sur k contient moins de n_0 termes non nuls a priori.

Pour h et Δt donnés, on définit les fonctions $u_h^n : \Omega \to \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\forall x \in \Omega \quad u_h^n(x) = \sum_{j \in \mathbb{S}} u_j^n X_j(x)\,.$$

La solution approchée $u_h : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, est alors définie par :

$$\forall x \in \Omega\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \forall t \in [n\, \Delta t, (n+1)\, \Delta t[\quad u_h(x, t) = u_h^n(x)\,.$$

Remarque :

Dans le problème « avec termes source », on introduira de même :

$$s_j^n = \frac{1}{\mathscr{V}_j\,\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\Omega X_j(x)\,s(x,t)\,dx\,dt \quad \text{et un terme}$$

$$s_j^n f_j^+ - u_j^n f_j^- \qquad \text{dans la relation (5)}.$$

3. ESTIMATION $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ DES SOLUTIONS APPROCHÉES

Le schéma (relation (5)) peut être écrit sous la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n\left(1 - \frac{\Delta t}{\mathscr{V}_j}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{S}\\ P_j>P_k}} T_{jk}(P_j - P_k) + g_j^-\right)\right) + \\ + \frac{\Delta t}{\mathscr{V}_j}\left(\sum_{\substack{k\in\mathbb{S}\\ P_j<P_k}} T_{jk}\,u_k^n(P_k - P_j) + g_j^+\,\bar{u}_j^n\right).$$

L'inégalité (4) permet alors d'écrire que u_j^{n+1} est une combinaison linéaire des termes u_k^n et $\bar{u}_j^n$, à coefficients tous positifs. De plus, la relation (3) conduit à :

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{S}\\ P_j>P_k}} T_{jk}(P_k - P_j) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{S}\\ P_j<P_k}} T_{jk}(P_k - P_j) - g_j^- + g_j^+ = 0$$

ce qui permet d'écrire que la somme des coefficients de cette combinaison linéaire est égale à 1 ; on a donc une estimation $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$:

$$|u_j^{n+1}| \leqslant \sup_{j\in\mathbb{S}}\,(|u_j^n|, |\bar{u}_j^n|) \leqslant \cdots \leqslant \sup\left(\sup_{j\in\mathbb{S}}|u_j^0|, \sup_{\substack{j\in\mathbb{S}\\ n\in\mathbb{N}}}|\bar{u}_j^n|\right)$$

or

$$\left\{\begin{aligned} |u_j^0| &= \left|\frac{1}{\mathscr{V}_j}\int_\Omega X_j(x)\,u_0(x)\,dx\right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\mathscr{V}_j}\int_\Omega X_j(x)\,dx\,\sup_{x\in\Omega}|u_0(x)| = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ |\bar{u}_j^n| &= \left|\frac{1}{\mathscr{S}_j\,\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}}\int_\Gamma X_j(\gamma)\,\bar{u}(\gamma,t)\,d\gamma\,dt\right| \leqslant \|\bar{u}\|_{L^\infty(\Gamma^+\times\mathbb{R}^+)} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

donc

$$\|u_h\|_{L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)} \leq \sup\left(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\bar{u}\|_{L^\infty(\Gamma^+ \times \mathbb{R}^+)}\right). \tag{7}$$

Ceci permet de déduire l'existence de sous-suites (de toute suite de solutions approchées) qui convergent dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ pour la topologie faible *.

Remarque :

Dans le problème « avec termes source », l'inégalité (7) fait également intervenir $\|s\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)}$.

4. ESTIMATION FAIBLE DE LA VARIATION TOTALE

Soit $T > 0$.

L'objet de ce paragraphe est de montrer une estimation sur la variation de la solution approchée pour t inférieur à T.

Soit un réel h tel que $0 < h < 1$, et Δt vérifiant les conditions (S).

On définit N par $N\,\Delta t \leq T < (N+1)\,\Delta t$; on suppose $N \geq 1$; on pose :

$$BV_h(T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)\left|u_j^n - u_k^n\right| + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+ \left|u_j^n - \bar{u}_j^n\right| .$$

LEMME : *Il existe une constante H indépendante de $(\mathfrak{I}_h, \Delta t)$ telle que :*

$$BV_h(T) \leq H / \sqrt{h} . \tag{8}$$

Démonstration : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{S}$:

Multiplions l'équation (5) par u_j^n ; il vient :

$$\mathscr{V}_j(u_j^{n+1} u_j^n - u_j^n u_j^n) - \\ - \Delta t\left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk} u_{jk}^n u_j^n (P_k - P_j) + \bar{u}_j^n u_j^n g_j^+ - u_j^{n^2} g_j^-\right) = 0 . \tag{9}$$

Or on a

$$u_j^{n+1} u_j^n - u_j^n u_j^n = -\frac{1}{2}(u_j^{n+1} - u_j^n)^2 - \frac{1}{2}(u_j^n)^2 + \frac{1}{2}(u_j^{n+1})^2 .$$

On en déduit donc, en sommant (9) sur $n = 0, \ldots, N$, et $j \in \mathbb{S}$:

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}\sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2) \\ - \Delta t \sum_{n=0}^{N}\sum_{j \in \mathbb{S}}\left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk} u_{jk}^n u_j^n (P_k - P_j) + \bar{u}_j^n u_j^n g_j^+ - u_j^{n^2} g_j^-\right) = 0 . \tag{10}$$

On peut écrire, pour tout $(j, k) \in \mathscr{A}$, $u_{jk}^n = u_j^n$, et donc :

$$u_{jk}^n u_j^n - u_{jk}^n u_k^n = (u_j^n)^2 - u_j^n u_k^n = \frac{1}{2}(u_j^n - u_k^n)^2 + \frac{1}{2}((u_j^n)^2 - (u_k^n)^2).$$

On a de plus, d'après (3) :

$$\forall j \in \mathbb{S} \sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}(P_k - P_j) + g_j^+ - g_j^- = 0$$

et donc

$$\sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} T_{jk}(P_k - P_j)((u_j^n)^2 - (u_k^n)^2) =$$

$$= \sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} ((u_j^n)^2 T_{jk}(P_k - P_j) + (u_k^n)^2 T_{kj}(P_j - P_k))$$

$$= - \sum_{j \in \mathbb{S}} (u_j^n)^2 (g_j^+ - g_j^-).$$

Grâce à cela, on a :

$$- \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk} u_{jk}^n u_j^n (P_k - P_j) + \bar{u}_j^n u_j^n g_j^+ - u_j^{n^2} g_j^- \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \Delta t \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+ (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 \right)$$

$$- \frac{1}{2} \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} (g_j^+ \bar{u}_j^{n^2} - g_j^- u_j^{n^2}). \tag{11}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \frac{\Delta t^2}{\mathscr{V}_j} \times$$

$$\times \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk} u_{jk}^n (P_k - P_j) + \bar{u}_j^n g_j^+ - u_j^n g_j^- \right)^2.$$

On a encore pour tout $j \in \mathbb{S}$:

$$u_j^n \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}(P_k - P_j) + g_j^+ - g_j^- \right) = 0$$

donc

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 = \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \frac{\Delta t^2}{\mathscr{V}_j} \times$$

$$\times \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} T_{jk}(u_{jk}^n - u_j^n)(P_k - P_j) + g_j^+ (\bar{u}_j^n - u_j^n) \right)^2.$$

On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall m \in \mathbb{N}\,, \quad \forall\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m\,, \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right)^2 \leqslant m \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2\,.$$

On peut donc écrire, puisque le nombre de voisins d'un sommet est inférieur à n_0 :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 \leqslant (n_0 + 1) \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \frac{\Delta t^2}{\mathscr{V}_j} \times$$
$$\times \left(\sum_{k \in \mathbb{S}} (T_{jk}(u_{jk}^n - u_j^n)(P_k - P_j))^2 + (g_j^+ (\bar{u}_j^n - u_j^n))^2 \right)\,.$$

Si maintenant, on regroupe les indices (j, k) par arêtes, on fait apparaître :

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2 \leqslant (n_0 + 1) \sum_{n=0}^{N} \Delta t^2 \times$$
$$\times \left(\sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} \frac{1}{\mathscr{V}_k} T_{jk}^2 (u_j^n - u_k^n)^2 \, (P_j - P_k)^2 + \sum_{j \in \mathbb{S}} \frac{1}{\mathscr{V}_j} g_j^{+\,2} (\bar{u}_j^n - u_j^n)^2 \right)\,. \tag{12}$$

Reportons maintenant cette inégalité (12), et la relation (11), au sein de l'équation (10), en multipliant par 2 :

$$\sum_{\in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j ((u_j^{N+1})^2 - (u_j^0)^2) - (n_0 + 1) \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{N} \Delta t^2 \left(\sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} \frac{1}{\mathscr{V}_k} T_{jk}^2 (u_j^n - u_k^n)^2 \, (P_j - P_k)^2 + \sum_{j \in \mathbb{S}} \frac{1}{\mathscr{V}_j} g_j^{+\,2} (\bar{u}_j^n - u_j^n)^2 \right) +$$
$$+ \Delta t \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+ \, (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 \right) -$$
$$- \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} (g_j^+ \, \bar{u}_j^{n^2} - g_j^- \, u_j^{n^2}) \leqslant 0 \tag{13}$$

soit

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} \theta_{jk} \, T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} \theta_j \, g_j^+ \, (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 +$$
$$+ \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{N+1})^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^- \, u_j^{n^2} \leqslant \sum_{j \in \mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^0)^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+ \, \bar{u}_j^{n^2} \tag{14}$$

avec

$$\theta_{jk} = 1 - \Delta t \, \frac{(n_0 + 1)}{\mathscr{V}_k} \, T_{jk}(P_j - P_k) \geqslant \alpha \quad \text{et}$$

$$\theta_j = 1 - \Delta t \, \frac{(n_0 + 1)}{\mathscr{V}_j} \, g_j^+ \geqslant \alpha \quad \text{par condition } (S)\,.$$

On en déduit :

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+ (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{j\in\mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^0)^2 + \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{N} \Delta t \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+ \bar{u}_j^{n^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} \mathscr{V}_\Omega \|u_0\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{\alpha} T G^+ \|\bar{u}\|^2_{L^\infty(\Gamma^+ \times \mathbb{R}^+)} \tag{15}$$

d'après les inégalités (6) sur u_j^0 et $\bar{u}_j^n$.

Ceci permet de montrer l'existence d'une constante K indépendante de h telle que :

$$\sum_{j\in\mathbb{S}} \mathscr{V}_j (u_j^{N+1})^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^- \, u_j^{n^2} \leqslant K \tag{16}$$

et

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \\ + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+ (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2 \leqslant K/\alpha \,. \tag{17}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire :

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)\left|u_j^n - u_k^n\right| + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+ \left|u_j^n - \bar{u}_j^n\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)(u_j^n - u_k^n)^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+ (u_j^n - \bar{u}_j^n)^2\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\Delta t \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k) + \sum_{j\in\mathbb{S}} g_j^+\right)\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{18}$$

Le membre de droite est la grandeur $BV_h(T)$ que l'on cherche à majorer ; il faut maintenant estimer le membre de gauche.

Posons $W = \sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)$; on a :

$$W \leqslant \left(\sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(j,k)\in\mathscr{A}} T_{jk}(P_j - P_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Or on a la propriété suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla P_h(x)^2\, dx = \sum_{j \in \mathbb{S}} \sum_{k \in \mathbb{S}} \int_{\Omega} P_j\, P_k\, \nabla X_j(x) \,.\, \nabla X_k(x)\, dx$$

et
$$\sum_{j \in \mathbb{S}} \sum_{k \in \mathbb{S}} \int_{\Omega} P_j^2\, \nabla X_j(x) \,.\, \nabla X_k(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla P_h(x)^2\, dx &= -\frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{S}} \sum_{k \in \mathbb{S}} \int_{\Omega} (P_j - P_k)^2\, \nabla X_j(x) \,.\, \nabla X_k(x)\, dx \\ &= \sum_{(j,k) \in \mathcal{A}} T_{jk}(P_j - P_k)^2 \,. \end{aligned}$$

Or, comme $P_h \in V_h$ satisfait la formulation variationnelle (2_h), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla P_h(x)^2\, dx &= \int_{\Gamma} P_h(\gamma)\, g(\gamma)\, d\gamma = \int_{\Omega} \nabla P_h(x)\, \nabla P\,(x)\, dx \\ &\leqslant \left(\int_{\Omega} \nabla P_h(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \nabla P\,(x)^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a donc :

$$\int_{\Omega} \nabla P_h(x)^2\, dx \leqslant \int_{\Omega} \nabla P\,(x)^2\, dx \tag{20}$$

pour toute triangulation $\mathcal{T}_h$.

Par ailleurs, on a

$$\sum_{(j,k) \in \mathcal{A}} T_{jk} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \mathbb{S}} \int_{\Omega} \nabla X_j(x)\, dx \right)^2 \leqslant D h^{-2} \,.$$

Il existe donc une constante K' telle que $W \leqslant K'/h$, en utilisant (20).

De plus, $\sum_{j \in \mathbb{S}} g_j^+ = G^+ = \int_{\Gamma} g^+(\gamma)\, \mathrm{d}\gamma$ est une constante.

Ceci permet donc de déduire l'existence d'une constante H indépendante de h telle que, pour tout $h < 1$, on a (8).

Remarque : Dans le cas du problème « avec termes source », il apparaît aussi dans la définition de $BV_h(T)$ le terme :

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N} \sum_{j \in \mathbb{S}} f_j^+ \left| u_j^n - s_j^n \right| \,.$$

5. CONVERGENCE DU SCHÉMA

Nous savons, grâce à la stabilité L^∞ du schéma, que d'une suite des fonctions u_h on peut extraire une suite convergente dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ pour la topologie faible *. Appelons u la limite de cette suite. Nous allons montrer que u est solution du problème au sens faible, et c'est en ce sens que nous dirons que le schéma converge. Nous noterons encore u_h une sous-suite convergente de la suite initiale.

Remarque : Il est clair que l'unicité de la solution du problème continu donne alors la convergence de u_h vers u quand h tend vers 0 (sous la condition (S)).

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega^+ \times \mathbb{R}^+)$. On choisit un réel T tel que pour tout $t > T - 1$, et tout $x \in \Omega^+$, on ait $\varphi(x, t) = 0$. Nous prendrons Δt et h inférieurs à 1.

On multiplie le schéma (5) par $\dfrac{X_j(x)}{\mathscr{V}_j}\,\varphi(x, t^n)$ et on intègre sur Ω :

$$\int_\Omega \mathscr{V}_j(u_j^{n+1} - u_j^n)\frac{X_j(x)}{\mathscr{V}_j}\,\varphi(x, t^n)\,dx - \int_\Omega \Delta t\left(\sum_{k\in\mathbb{S}} T_{jk}\,u_{jk}^n(P_k - P_j) + g_j^+\,\bar{u}_j^n - g_j^-\,u_j^n\right)\frac{X_j(x)}{\mathscr{V}_j}\,\varphi(x, t^n)\,dx = 0\,. \tag{21}$$

On somme cette expression sur $j \in \mathbb{S}$ et sur $n = 0, \ldots, N$, avec $N\,\Delta t \leqslant T < (N+1)\,\Delta t$.

On obtient alors $E_{1h} + E_{2h} = 0$, avec :

$$E_{1h} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in\mathbb{S}}\int_\Omega \mathscr{V}_j(u_j^{n+1} - u_j^n)\frac{X_j(x)}{\mathscr{V}_j}\,\varphi(x, t^n)\,dx$$

et

$$E_{2h} = -\sum_{n=0}^{N}\sum_{j\in\mathbb{S}}\int_\Omega \Delta t\left(\sum_{k\in\mathbb{S}} T_{jk}\,u_{jk}^n(P_k - P_j) + g_j^+\,\bar{u}_j^n - g_j^-\,u_j^n\right) \times \frac{X_j(x)}{\mathscr{V}_j}\,\varphi(x, t^n)\,dx\,.$$

La démonstration que $\lim_{h\to 0} E_{1h} = T_1$ avec :

$$T_1 = -\int_{\mathbb{R}^+}\int_\Omega u(x, t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, t)\,dx\,dt - \int_\Omega u_0(x)\,\varphi(x, 0)\,dx$$

est un résultat classiquement obtenu avec les schémas d'Euler.

Il est par contre plus difficile de démontrer que $\lim_{h \to 0} E_{2h} = T_2$ avec

$$T_2 = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} u(x, t) \nabla P(x) \,.\, \nabla \varphi(x, t) \, dx \, dt - \\ - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Gamma} \bar{u}(\gamma, t) \, \varphi(\gamma, t) \, g(\gamma) \, d\gamma \, dt$$

ce qui permet de conclure à la convergence du schéma, au sens précisé en introduction à ce paragraphe ; pour obtenir ce résultat, il faut procéder par les étapes suivantes :

Étape 1 : On définit E_{3h} par :

$$E_{3h} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta t \sum_{(j,k) \in \mathscr{A}} (u_j^n - u_k^n)(P_j - P_k) \int_{\Omega} \nabla X_j(x) \,.\, \nabla X_k(x) \, \varphi(x, t^n) \, dx + \\ + \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta t \sum_{j \in \mathbb{S}} (u_j^n - \bar{u}_j^n) \int_{\Gamma} X_j(\gamma) \, \varphi(\gamma, t^n) \, g(\gamma) \, d\gamma$$

et l'on montre que $\lim_{h \to 0} E_{3h} = T_2$. Ceci se fait de la manière suivante :

On remarque que le terme E_{4h}, défini par :

$$E_{4h} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Delta t \, \times \\ \times \left(\int_{\Omega} u_h^n(x) \nabla P(x) \nabla \varphi(x, t^n) \, dx - \int_{\Gamma} \bar{u}_h^n(\gamma) \, \varphi(\gamma, t^n) \, g(\gamma) \, d\gamma \right)$$

converge vers T_2 quand h, et donc Δt tendent vers 0, par convergence faible * de u_h borné vers u, et de $\bar{u}_h$ vers $\bar{u}$ dans Γ^+.

Ensuite, on montre l'existence d'une constante C_4 telle que :

$$|E_{3h} - E_{4h}| \leq C_4 \, T(\mathscr{V}_{\Omega})^{\frac{1}{2}} \, \|P_h - P\|_{H^1} \,. \tag{22}$$

Cette démonstration utilise la formulation variationnelle (2) et (2_h), appliquée à la fonction $\varphi(\,.\,, t^n) \, u_h^n$ qui est un élément de $H^1(\Omega)$ (on tire ici parti du choix de l'espace d'approximation des fonctions u).

L'inégalité (22) permet donc de conclure l'étape 1.

Étape 2 : On montre que :

$$|E_{3h} - E_{2h}| \leq Mh \,.\, BV_h(T) \tag{23}$$

où M est une constante ne dépendant pas de h.

Ceci est obtenu grâce à la régularité des fonctions φ, et grâce à l'inégalité : $\nabla X_j(x) \cdot \nabla X_k(x) \leq 0$, pour tout $x \in \Omega$ et tout couple de sommets (j, k).

Les inégalités (22), (23) et (8) permettent alors de montrer le résultat désiré : $\lim_{h \to 0} E_{2h} = T_2$. Ceci achève alors la démonstration de la convergence du schéma.

Remarque : Dans le cas du problème « avec termes source », la même majoration convient pour $|E_{3h} - E_{2h}|$.

6. CONCLUSION

On a montré dans cet article une propriété non évidente d'existence à un système formé d'une équation elliptique, et d'une équation hyperbolique. Cette démonstration est le résultat de la démonstration de convergence d'un schéma naturel, qui n'est apparu pourtant que récemment. Des exemples d'application dans de nombreux cas montrent la validité de ce schéma, dans des configurations physiques bien plus complexes [5, 6, 7, 8].

La preuve de la convergence permet de mieux cerner les contraintes à appliquer au maillage, notamment la positivité des transmissivités.

REFERENCES

[1] K. Aziz, A. Settari, 1980, in *Petroleum Reservoir Simulation,* Applied Science Publishers.

[2] R. Eymard, 1991, *Utilisation de Techniques d'Éléments Finis pour la Simulation de Réservoir,* en préparation.

[3] S. Champier, T. Gallouët, R. Herbin, 1991, *Convergence of an Upstream Finite Volume Scheme for a Nonlinear Hyperbolic Equation on a Triangular Mesh,* Rapport Université de Savoie.

[4] A. Szepessy, 1989, *Convergence of the Streamline Diffusion Finite Element Method for Conservation Law,* Thèse, Mathematics Department, Chalmers University of Technology.

[5] J. Rozon, 1989, *A Generalized Finite Volume Discretization Method for Reservoir Simulation,* SPE 18414, présenté au SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston.

[6] P. A. Forsyth, 1989, *A Control Volume Finite Element Method For Local Mesh Refinement,* SPE 18415, présenté au SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston.

[7] L. S.-K. Fung, A. D. Hiebert, L. Nghiem, 1991, *Reservoir Simulation with a Control-Volume Finite-Element Method,* SPE 21224, présenté au SPE Symposium on Reservoir Simulation.

[8] F. SONIER, R. EYMARD, 1993, *Mathematical and Numerical Properties of Control-Volume Finite-Element Scheme for Reservoir Simulation,* SPE 25267, présenté au SPE Symposium on Reservoir Simulation, La Nouvelle-Orléans.

[9] G. CAGINALP, 1982, Nonlinear Equations with Coefficients of Bounded Variation in Two Space Variables, *Journal of Differential Equations,* Vol. 43, N° 1, janvier 1982.