M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

C. BOURDARIAS

Sur un système d'E.D.P. modélisant un processus d'adsorption isotherme d'un mélange gazeux

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 26, nº 7 (1992), p. 867-892

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_7_867_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 26, n° 7, 1992, p. 867 à 892)

SUR UN SYSTÈME D'E.D.P. MODÉLISANT UN PROCESSUS D'ADSORPTION ISOTHERME D'UN MÉLANGE GAZEUX (*)

par C. BOURDARIAS (1)

Communiqué par P L LIONS

Résumé — *Nous présentons une étude d'un système non linéaire d'équations hyperboliques utilisé comme modèle en génie chimique Nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité lorsque les données initiales sont à variation bornée, puis un résultat d'existence avec des données initiales dans L^{∞}. Enfin, dans le cadre d'un modèle simplifié, nous étudions les solutions associées à une suite de données initiales convergeant faiblement dans L^{∞} : à l'aide d'un contre-exemple, nous montrons qu'il n'y a pas en général convergence faible vers une solution du « système limite »*

Abstract — On a system of P.D E modelling heatles adsorption of a gazeous mixture *We present a study of a non-linear system of hyperbolic P D E used as a model in chemical engineering We obtain an existence and uniqueness result when the initial data have bounded variation, then an existence result with initial data in L^{∞} Lastly, within a simplified model, whe study the solutions corresponding to a sequence of initial data that converges weakly in L^{∞} · making use of a counterexample, we show that there is generally no weak convergence to a solution of the system*

INTRODUCTION

Nous présentons une étude mathématique d'un système non linéaire d'équations hyperboliques modélisant une phase du cycle d'adsorption d'un mélange gazeux à température constante, appelé cycle P.S.A.

Un cycle complet est un processus permettant la séparation des espèces présentes dans un mélange gazeux initial. Au cours de ce processus, chacune des K espèces présentes ($K \geqslant 2$) peut exister simultanément sous deux phases : l'une gazeuse et mobile, à la concentration $C^k(t, x)$, l'autre solide à la concentration $q^k(t, x)$. Pour la description précise de ce processus on pourra consulter Ruthven [8].

(*) Reçu en juin 1991.

(1) Université d'Orléans, Département de Mathématiques, B.P. 6749, 45067 Orléans Cedex 2

Suivant [8], nous décrivons l'évolution de C^k, q^k sous la forme du système

$$\partial_t C^k + \partial_x(uC^k) = A^k[q^k - q^{k*}(\underline{C})], \tag{1}$$

$$\partial_t q^k + A^k q^k = A^k q^{k*}(\underline{C}), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &t \geqslant 0, \quad x \in (0, 1) \\ &k \in \{1, \dots, K\} \\ &\underline{C} = (C^1, \dots, C^K) \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} &C^k(0, x) = C_0^k(x), \quad q^k(0, x) = q_0^k(x), \\ &C^k(t, 0) = C_W^k(t), \quad C^k(t, 1) = C_L^k(t) \quad \text{si} \quad u(t, 1) < 0, \end{aligned}$$

où $u(t, x)$, la vitesse du mélange, est définie de sorte que

$$\left[\begin{aligned} &u(t, 0) = u_0(t) > 0, \\ &\sum_k C^k(t, x) = p(t), \quad \forall t \geqslant 0, \quad \forall x \in (0, 1). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ici, p représente la densité totale du mélange gazeux ; c'est une fonction donnée ne dépendant que du temps. q^{k*} est une fonction définie sur $(R^+)^K$ dont nous préciserons ultérieurement les propriétés ; elle dépend du modèle adopté et représente les concentrations à l'équilibre. L'exemple le plus simple d'une telle fonction est « l'isotherme de Langmuir » :

$$q^{k*}(\underline{C}) = N \frac{\mu^k C^k}{1 + \sum_j \mu^j C^j} \quad \text{(voir par exemple [2], [4], [7])},$$

mais en général, la forme précise de q^{k*} n'est pas connue : elle est souvent obtenue expérimentalement.

Les équations (1) présentent des analogies avec les lois de conservation scalaires pour lesquelles on dispose de résultats d'existence et d'unicité par des méthodes de compacité L^1 et BV (voir Kruzkov [5]) ; elles s'en distinguent cependant par le type de liaison entre la vitesse u et les variables C^k (nous laissons de côté les q^k) : ajoutant (1) pour $k = 1, \dots, K$ et tenant compte de (3) on obtient une relation du type $\partial_x u = F(\underline{C})$, alors que dans le cas des lois de conservation scalaires on aurait $u = F(\underline{C})$. Nous obtiendrons tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité « dans un cadre BV ». Les coefficients A^k restant bornés, nous utiliserons une méthode de point fixe dans L^1 pour résoudre (1)-(2) pour un u fixé, avec des bornes uniformes pour C^k, q^k dans L^∞ et pour u dans $W^{1,\infty}$. La procédure d'approximation pour (3) est plus délicate et sera menée à bien en utilisant que les

C^k, q^k sont a priori bornés dans l'espace des fonctions à variation bornée et nous utiliserons à nouveau un théorème de point fixe.

Si l'on souhaite travailler dans un « cadre L^∞ » plutôt que « BV », ce qui semble plus naturel, la difficulté consiste à trouver une propriété de compacité forte pour les solutions associées à des données initiales BV, bornées dans L^∞ (en particulier compacité en temps pour u). Nous serons amenés à utiliser une technique d'approximation par régularisation développée par Diperna et Lions [3]. Nous étudierons enfin le comportement des solutions associées à des « données initiales oscillantes » convergeant dans L^∞ faible* : dans le cas des lois de conservation scalaires des effets de convergence forte sont connus (Tartar [9], Lions-Perthame-Tadmor [6]), nous verrons que dans notre cas on ne peut espérer généralement de telles propriétés. Nous utiliserons à ce sujet des résultats d'unicité et de stabilité de Diperna-Lions [3].

Dans les équations (1), (2), le terme $A^k[q^k - q^{k*}]$ rend compte des transferts de matière entre les phases gazeuse et solide, et le terme $\partial_x(uC^k)$ du déplacement du gaz. La contrainte (3) constitue la principale difficulté du modèle.

Ce modèle est simplifié : on pourrait mettre dans (1)-(2) un terme de viscosité, de plus, dans le cas non isotherme, c'est la pression qui serait donnée au cours du temps. A température constante, la loi des gaz parfaits ($P = pRT$) permet de se ramener à (3). Cependant, ce modèle restitue l'essentiel des caractéristiques du phénomène qui ont un sens physique : les fronts se propagent depuis une discontinuité à l'origine ($t = 0$, $x = 0$), la quantité $(C^k + q^k)$ est écrite sous forme conservative (ajouter (1) et (2)), enfin C^k et q^k restent positifs.

Remarquons que lorsque les A^k tendent vers l'infini, nous avons formellement :

$$q^k - q^{k*}(\underline{C}) = -\frac{1}{A^k}\partial_t q^k \to 0\,,$$

et les équations (1)-(2) se réduisent alors à :

$$\partial_t(C^k + q^{k*}(\underline{C})) + \partial_x(uC^k) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, K\,.$$

Ce système hyperbolique de lois de conservation généralise les équations de la chromatographie étudiées dans Rhee, Aris et Admunson [7] où la vitesse u, en particulier, est constante. Dans ce même cas ($A^k = +\infty$, u constante) on pourra consulter James [4] pour une analyse numérique du phénomène et les relations avec la thermodynamique, Canon et James [2] où q^{k*} est l'isotherme de Langmuir. Enfin, dans Bourdarias [1], nous présenterons des aspects numériques du système (1)-(2).

Dans notre étude, les A^k restent bornés. Toutefois, en pratique, ces coefficients ont des valeurs telles que l'équilibre ($q^k = q^{k^*}(\underset{\sim}{C})$) est atteint très rapidement. En contrepartie, nous prenons en compte l'évolution de la vitesse $u(x, t)$ du fluide vecteur. Dans toute la suite, (P) désigne le problème (1)-(2)-(3). Notons que dans le problème de Cauchy (1)-(2), la condition en $x = 0$ est bien posée car nous imposons $u(t, 0) > 0$.

Dans une première partie, nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité de la solution ($\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{q}$, u) de (P) lorsque les données initiales sont à variation totale bornée. Nous établissons ensuite un résultat d'existence pour des données initiales dans L^∞ en mettant en œuvre une technique d'approximation par régularisation développée par Diperna et Lions [3]. Dans une troisième partie, nous étudions l'éventualité d'une propriété de « stabilité faible » du système (1)-(2) en considérant, dans le cadre d'un modèle simplifié, les solutions associées à une suite de données initiales convergeant dans L^∞ faible*. Nous envisageons deux aspects de ce problème et proposons deux contre-exemples.

I. EXISTENCE GLOBALE D'UNE SOLUTION DE (P) POUR DES DONNÉES INITIALES À VARIATION BORNÉE

Dans cette partie, nous précisons les hypothèses sur les données du problème et nous établissons l'existence d'une solution ($\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{q}$, u) pour des données initiales ($\underset{\sim}{C}_0$, q_0) à variation bornée. Nous procédons en deux étapes : résolution de (1)-(2), à l'aide d'un théorème de point fixe, pour un u fixé uniformément borné dans $W^{1,\infty}$ (solutions C^k, q^k dans L^∞) puis prise en compte de (3), avec un nouveau point fixe, en utilisant que les fonctions C^k et q^k sont a priori bornées dans l'espace des fonctions à variation bornée.

I.1. Notations et résultat principal

$BV\,(0, 1)$ désigne l'ensemble des fonctions de $L^1(0, 1)$ à variation bornée sur (0, 1), c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $u \in L^1(0, 1)$ dont la dérivée (au sens des distributions) est une mesure bornée. Pour une telle fonction nous posons

$$TV\,(u) = \int_0^1 |\partial_x u| \quad \text{et} \quad L^\infty(0, T; BV) =$$

$$= \left\{ u(t, x) \in L^1((0, T) \times (0, 1))\,;\, \sup_{[0, T]} TV\,(u(t, .)) < \infty \right\}.$$

Nous allons préciser les hypothèses sur les données de (P) en distinguant celles qui seront reprises dans la suite de cette étude : (H), et celles, désignées par (H_1), qui sont spécifiques à cette partie.

(H) Pour tout $k \in \{1, \ldots, K\}$:

A^k est une constante positive donnée et q^{k*} est une fonction définie sur $(R^+)^K$, lipschitzienne, vérifiant :

$$q^{k*}(\underset{\sim}{C}) \geq 0\,, \quad q^{k*}(C^1, \ldots, C^{k-1}, 0, C^{k+1}, \ldots, C^K) = 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{K} |q^{k*}(\underset{\sim}{C}) - q^{k*}(\underset{\sim}{d})| \leq C_q|\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{d}|\,, \text{ où } |\underset{\sim}{C} - \underset{\sim}{d}| = \sum_{k=1}^{K} |C^k - d^K|$$

$C_w^k(t)$, $C_L^k(t)$ sont positives et lipschitziennes . (4)

$p(t)$ est lipschitzienne et vérifie :

$$\exists p_M, p_m : p_M \geq p \geq p_m > 0\,,$$

$$\sum_{k=1}^{K} C_0^k(x) = p(0)\,, \quad \sum_{k=1}^{K} C^k(t) = \sum_{k=1}^{K} C^k(t) = p(t)\,,$$

$$u_0(t) \in L^\infty(0, 1)\,. \tag{5}$$

$$(H_1) \quad q_0^k, C_0^k \in BV\,(0, 1)\,.$$

Le résultat essentiel de cette partie est le suivant :

THÉORÈME I.1 : *Sous les hypothèses* (H) *et* (H_1) *le problème* (P) *admet une unique solution* $(\underset{\sim}{C}, \underset{\sim}{q}, u)$ *dans l'ensemble des fonctions telles que* $C^k \geq 0$, $q^k \geq 0$ *et pour tout* $T > 0$:

$$C^k, \quad q^k \in L^\infty((0, T) \times (0, 1)) \cap L^\infty(0, T; BV)\,, \tag{6}$$

$$\partial_x u \in L^\infty((0, T) \times (0, 1)) \cap L^1(0, T; BV\,(0, 1))\,. \tag{7}$$

Remarques :

1. Pour une telle solution, u est lipschitzienne en x et on peut définir les courbes caractéristiques solutions de :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d}{ds} X_{t,x}(s) = u(s, X_{t,x}(s))\,, \quad s \leq t\,, \\ X_{t,x}(t) = x \end{array}\right. \tag{8}$$

sur tout intervalle où $(s, X_{t,x}(s)) \in [0, t] \times [0, 1]$.

Le long de ces caractéristiques C^k est continue, de sorte que les conditions limites seront bien satisfaites.

2. En ajoutant les équations (1) pour $k = 1, \ldots, K$ et compte tenu de la seule dépendance en temps de p on a, grâce à (3) :

$$d_t p + p\,\partial_x u = \sum_{k=1}^{K} A^k(q^k - q^{k*}(\underset{\sim}{C}))\,. \tag{9}$$

Cette équation permet d'obtenir immédiatement, à partir de (6), les estimations a priori (7).

Pour établir le théorème I.1 nous avons besoin d'un résultat intermédiaire :

PROPOSITION I.1 : *Supposons* (4) *et soit* $u(t, x) \in L^{\infty}(0, T ; W^{1,\infty}(0, 1))$. *Il existe alors une unique solution* $(\underline{C}, \underline{q})$ *au système* (1)-(2) *dans* $[L^1((0, T) \times (0, 1))]^{2K}$. *Cette solution vérifie :*

$$\begin{aligned} 0 \leqslant C^k(t, x) &\leqslant C_0 \exp\left\{\int_0^t \|(\partial_x u)^-\|_{\infty} + A^k C_q t\right\}, \\ 0 \leqslant q^k(t, x) &\leqslant C_0\, C_q \exp\left\{\int_0^t \|(\partial_x u)^-\|_{\infty} + A^k C_q t\right\}, \end{aligned} \tag{10}$$

où C_0 *ne dépend que des constantes intervenant dans les hypothèses* (4) :

De plus, si :

$$\partial_x u \in L^1(0, T ; BV\,(0, 1)), \tag{11}$$

alors :

$$C^k, \quad q^k \in L^{\infty}(0, T ; BV\,(0, 1)). \tag{12}$$

I.2. Démonstration de la proposition I.1 (existence et unicité)

Nous allons obtenir la solution de (1)-(2) en utilisant le théorème du point fixe de Banach dans $[L^1((0, T_0) \times (0, 1))]^K$ pour un $T_0 > 0$ assez petit et en montrant que l'on peut itérer ce procédé jusqu'à atteindre toute valeur $T > 0$ du temps. Soit $\underline{d} \in [L^{1+}((0, T_0) \times (0, 1))]^K$ où T_0 sera défini ultérieurement. Considérons le système

$$\partial_t q^k + A^k q^k = A^k q^{k*}(\underline{d}), \tag{13}$$

$$\partial_t C^k + \partial_x(uC^k) + C_q A^k C^k = A^k(C_q d^k - q^{k*}(\underline{d}) + q^k), \tag{14}$$

avec les mêmes conditions aux limites que (1) et (2).

(13) est une équation différentielle ordinaire qui admet une unique solution q^k dans L^1_+.

Posons alors $f^k = A^k(C_q d^k - q^{k*}(\underline{d}) + q^k)$; l'équation (14) qui s'écrit $\partial_t C^k + \partial_x(uC^k) + C_q A^k C^k = f^k$, avec

$$f^k \in L^1((0, T_0) \times (0, 1)), \quad C^k(0, x) = C_0^k(x),$$

$$C^k(t, 0) = C_w^k(t), \quad C^k(t, 1) = C_L^k(t) \quad \text{si} \quad u(t, 1) < 0,$$

admet à son tour une unique solution $C^k \in L^1((0, T_0) \times (0, 1))$. De plus, comme $f^k \geq 0$ (conséquence de (4)), on a $C^k \geq 0$. Rappelons seulement que cette solution est obtenue comme solution de :

$$\partial_t C^k + u\, \partial_x C^k + (\partial_x u + A^k C_q)\, C^k = f^k ,$$

en utilisant les caractéristiques définies en (8).

Il est clair qu'une solution de (1) est un point fixe de l'application

$$\begin{aligned} \phi : [L^1_+]^K &\to [L^1_+]^K \\ \underline{d} &\to \underline{C} . \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que ϕ est une contraction. Soient donc $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$ dans $[L^1_+]^K$ auxquelles on associe $\underline{C}_1 = \phi(\underline{d}_1)$ et $\underline{C}_2 = \phi(\underline{d}_2)$, ainsi que $\underline{q}_1$ et $\underline{q}_2$ solutions correspondantes de (13). Posons en outre : $\underline{\delta} = \underline{d}_1 - \underline{d}_2$, $\underline{\alpha} = \underline{C}_1 - \underline{C}_2$ et $\underline{\beta} = \underline{q}_1 - \underline{q}_2$.

En utilisant (13), (14), en multipliant les équations obtenues sur β^k et α^k respectivement par sgn (β^k) et sgn (α^k) et en tenant compte des propriétés de q^{k*}, on obtient :

$$\partial_t |\beta^k| + s^k |\beta^k| \leq A^k C_q |\underline{\delta}| , \tag{15}$$

$$\partial_t |\alpha^k| + \partial_x(u|\alpha^k|) + A^k|\alpha^k| \leq A^k(C_q|\delta^k| + C_q|\underline{\delta}| + |\beta^k|) , \tag{16}$$

où

$$|\underline{\delta}| = \sum_{k=1}^{K} |\delta^k| .$$

Ce raisonnement formel peut être justifié par régularisation des fonctions sgn (β^k) et sgn (α^k) ; il est classique (voir par exemple Kruzkov [5]) et sera utilisé plusieurs fois dans la suite.

Notons que α^k est nulle sur la frontière parabolique de $(0, T_0) \times (0, 1)$, de sorte qu'après avoir intégré (15) et (16) sur $(0, 1)$ et ajouté on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 (|\beta^k| + |\alpha^k|)\, dx \leq A^k C_q \int_0^1 |\delta^k|\, dx + 2 A^k C_q \int_0^1 |\underline{\delta}|\, dx , \tag{17}$$

puis, après sommation sur k et intégration sur $(0, T_0)$:

$$\|\underline{\alpha}\|_{[L^1((0, T_0) \times (0, 1))]K} \leq 3\,(\Sigma A^k)\, C_q\, T_0 \|\underline{\delta}\|_{[L^1((0, T_0) \times (0, 1))]K} . \tag{18}$$

Choisissons T_0 de sorte que $3(\Sigma A^k)\, C_q\, T_0 < 1$, (18) entraîne alors que ϕ est une contraction et le théorème du point fixe de Banach assure l'existence d'une solution sur $(0, T_0) \times (0, 1)$.

Ce qui précède peut être mis en œuvre quelles que soient les données initiales dans L_+^1 et permet donc de prolonger la solution sur $(T_0, 2T_0)$ et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une solution globale sur $(0, T) \times (0,1)$ pour tout $T > 0$.

I.3. Les « estimations L_∞ » (10)

Soient $C(t)$ et $Q(t)$ deux fonctions positives de classe C^1. On a :

$$\partial_t(q^k - Q) + \dot{Q} + A^k q^k = A^k q^{k*}(\underline{C}), \tag{19}$$

$$\partial_t(C^k - C) + \partial_x[u(C^k - C)] + \dot{C} + A^k q^{k*}(\underline{C}) = -C\,\partial_x u + A^k q^k, \tag{20}$$

avec
$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{C} = \frac{dC}{dt}.$$

Posons
$$s^+ = \begin{cases} 1 \text{ si } C^k \geq C \\ 0 \text{ si } C^k < C \end{cases}, \quad \sigma^+ = \begin{cases} 1 \text{ si } q^k \geq Q \\ 0 \text{ si } q^k < Q \end{cases},$$

ajoutons (19) et (20) multipliées respectivement par σ^+ et s^+, et intégrons sur $(0, 1)$. Il vient :

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 (C^k - C)^+ + (q^k - Q)^+\right\} + \int_0^1 \partial_x[u(C^k - C)^+] + \\ + \int_0^1 \left\{s^+\dot{C} + \sigma^+\dot{Q} + A^k(s^+ q^{k*} + \sigma^+ q^k)\right\} \\ \leq \int_0^1 s^+ C(\partial_x u)^- + \int_0^1 A^k(q^k s^+ + q^{k*}\sigma^+). \tag{21}$$

Si on suppose $C \geq \max\left\{\|C_w^k\|_\infty, \|C_L^k\|_\infty\right\}$, alors $\int_0^1 \partial_x[u(C^k - C)^+] = 0$; on obtient alors, à l'aide de quelques inégalités simples :

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 (C^k - C)^+ + (q^k - Q)^+\right\} + \int_0^1 \left\{s^+\dot{C} + \sigma^+\dot{Q} + A^k Q\sigma^+\right\} \leq \\ \leq \int_0^1 \left\{s^+ C\,\|(\partial_x u)^-\|_\infty + \right. \\ \left. + A^k[(q^k - Q)^+ + Qs^+ + C_q(C^k - C)^+ + C_q C\sigma^+]\right\}. \tag{22}$$

Dans ces conditions, si on impose :

$$Q = C_q C, \quad \text{et}$$
$$\dot{C} \geq C\,\|(\partial_x u)^-\|_\infty + C_q C A^k, \tag{23}$$

alors, en posant $W^k = \int_0^1 (C^k - C)^+ + (q^k - Q)^+$, (22) donne :

$$\dot{W}^k \leq A^k(C_q + 1)\, W^k . \tag{24}$$

L'inéquation différentielle (23) est satisfaite si l'on choisit

$$C = C_0 \exp\left\{\int_0^t (\|(\partial_x u)^-\|_\infty (s) + A^k C_q s)\, ds\right\},$$

où $C_0 = \max\left(\|C_0^k\|_\infty, \|C_W^k\|_\infty, \|C_L^k\|_\infty, \frac{1}{C_q}\|q_0^k\|_\infty\right)$, de sorte que W est nulle à l'origine. En utilisant le lemme de Gronwall, on déduit alors de (24) que W est nulle, d'où (10).

I.4. Estimations *BV*

Nous montrons maintenant les estimations (11)-(12) de la proposition I.1. Nous admettons ici, pour alléger l'exposé, le fait que C^k, q^k, q^{k^*} et u ont une régularité suffisante pour nous permettre de dériver (1) et (2) par rapport à x. En procédant comme dans I.2, et en introduisant les fonctions

$$s^k = \operatorname{sgn}(\partial_x C^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } \partial_x C^k \geq 0 \\ -1 & \text{si } \partial_x C^k < 0 \end{cases}, \quad \sigma^k = \operatorname{sgn}(\partial_x q^k),$$

on obtient :

$$\partial_t(|\partial_x C^k|) + \partial_x(u|\partial_x C^k|) + (\partial_x u)|\partial_x C^k| + s^k C^k \partial_{xx}^2 u + \\ + A^k \sum_l \frac{dq^{k^*}}{dc^l} \partial_x C^l s^k = A^k \partial_x q^k s^k , \tag{25}$$

$$\partial t(|\partial_x q^k|) + A^k|\partial_x q^k| = A^k \sum_l \frac{dq^{k^*}}{dc^l} \partial_x C^l \sigma^k . \tag{26}$$

Toujours comme en I.2, après avoir intégré sur (0, 1), ajouté (25) et (26) et sommé pour $k = 1, ..., K$ nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \sum_k (|\partial_x C^k| + |\partial_x q^k|) \leq \sum_k [u(t, 0)|\partial_x C^k(t, 0)| - \\ - u(t, 1)|\partial_x C^k(t, 1)|] + C_0 \int_0^1 \sum (|\partial_x C^k|) + C_1 \int_0^1 |\partial_{xx}^2 u| \tag{27}$$

où l'on a posé

$$C_0 = \|(\partial_x u)^-\|_\infty + 2\sum_k A^k C_q ,$$

$$C_1 = \left\|\sum_k C^k\right\|_\infty .$$

On a d'autre part l'estimation :

$$\begin{aligned} u(t,0)\left|\partial_x C^k(t,0)\right| - u(t,1)\left|\partial_x C^k(t,1)\right| \leq & \|d_t C_W^k\|_\infty + \|d_t C_L^k\|_\infty \\ & + 2\|C^k\|_\infty \|\partial_x u\|_\infty \\ & + 2A^k(\|q^k\|_\infty + C_q\|C\|_\infty) , \end{aligned} \tag{28}$$

en effet, sur la frontière, on a par l'équation (1) :

$$\partial_t C^k + u\,\partial_x C^k + C^k\,\partial_x u = A^k(q^k - q^{k*}(\underline{C})) ,$$

avec, en $x = 0$: $\partial_t C^k = d_t C_w^k$ et en $x = 1$, si $u(t, 1) < 0$, $\partial_t C^k = d_t C_L^k$.

De (27) et (28) on déduit finalement, en utilisant le lemme de Gronwall, l'estimation :

$$\forall t \leq T , \quad \int_0^1 \sum_k (|\partial_x C^k| + |\partial_x q^k|) \leq C(T)\left(1 + \int_0^t \int_0^1 |\partial_{xx}^2 u|\right) , \tag{29}$$

où $C(T)$ ne dépend que des normes L^∞ de C^k, q^k, u, $\partial_x u$, C_W^k, C_L^k, ainsi que de $TV(C_0^k)$ et $TV(q_0^k)$. Ceci prouve (11)-(12) et achève la démonstration de la proposition I.1. ■

I.5. Démonstration du théorème I.1

Soit $T^* > 0$ un réel précisé ultérieurement. A toute fonction $u \in L^\infty(0, T^* ; W^{1,\infty}(0, 1))$ on associe la fonction $v = \psi(u)$ définie par

$$\left[\begin{array}{l} d_t p + \partial_x(pv)\sum A^k(q^k - q^{k*}(\underline{C})) , \\ v(t, 0) = u_0(t) , \end{array}\right. \tag{30}$$

où $(\underline{C}, \underline{q})$ est la solution de (1) correspondant à u (proposition I.1). Remarquons que (30) est une équation différentielle ordinaire sur v, p étant la fonction précisée en (5) et $u_0(t)$ en (3). Elle s'écrit aussi :

$$\left[\begin{array}{l} \partial_x v = -\dfrac{d_t p}{p} - \dfrac{1}{p}\sum A^k(q^k - q^{k*}(\underline{C})) , \\ v(t, 0) = u_0(t) . \end{array}\right. \tag{31}$$

Un point fixe u de ψ fournit, s'il existe, une solution $(\underline{C}, \underline{q}, u)$ de (P) en effet $(\underline{C}, \underline{q})$ vérifie (1)-(2) par construction de ψ ; d'autre part, en sommant les équations (1) pour $k = 1, ..., K$ on obtient :

$$\partial_t\left(\sum C^k\right) + \partial_x\left(\sum (uC^k)\right) = \sum A^k(q^k - q^{k*}(\underline{C}))\,,$$

avec, par hypothèse, $\sum_k C_0^k = p(0)$ de sorte que p et $\sum_k C^k$ sont solution de la même équation de transport. Par unicité de la solution, on obtient donc (3) :

Nous allons prouver que ψ est une contraction en tant qu'opérateur sur l'ensemble des fonctions u vérifiant $\partial_x u \in L^1(0, T^*\,;\, BV(0, 1))$ pour un T^* assez petit mais indépendant des données initiales. Pour ce faire, nous avons besoin d'estimations a priori :

— Tout d'abord, comme les C^k satisfont nécessairement à $0 \leq C^k \leq p$ nous pouvons modifier q^{k*} de façon à ce que :

$$\begin{cases} 0 \leq q^{k*} \leq L\,, \quad q^{k*}(\underline{C}) = L \text{ si } C^k \geq L\,, \quad \text{où la constante } L \text{ vérifie} \\ L \geq p_M + \max\left\{\|q_0^k\|_\infty, \|C_w^k\|_\infty, \|C_L^k\|_\infty\right\}\,. \end{cases} \tag{32}$$

Dans ces conditions, un point fixe de ψ donne encore une solution de (P).

— Ensuite, considérons l'ensemble B des fonctions $u(t, x)$ telles que

$$\begin{cases} |\partial_x u| \leq \dfrac{\tilde{L}}{p_m} + \left\|\dfrac{d_t p}{p}\right\|_\infty\,, \quad \text{avec} \quad \tilde{L} = \sum_k A^k L\,, \\ u(t, 0) = u_0(t)\,. \end{cases} \tag{33}$$

LEMME I.1 : *Sous les hypothèses* (*H*) *et* (32) *on a* $\psi(B) \subset B$, *et pour une solution* $(\underline{C}, \underline{q}, u)$ *de* (1)-(2) *avec* u *vérifiant* (33), *on a*

$$\begin{cases} 0 \leq q^k \leq L\,, \\ 0 \leq C^k \leq L \exp\left\{\left(\dfrac{\tilde{L}}{p_m} + \left\|\dfrac{d_t p}{p}\right\|_\infty\right) t\right\}\,. \end{cases} \tag{34}$$

Preuve : L'estimation $0 \leq q^k \leq L$ s'obtient simplement, à partir de (2) et (32). Pour obtenir l'autre estimation on procède comme pour établir (10) et nous ne refaisons pas la démonstration.

Soient $u \in B$ et $v = \psi(u)$: il faut montrer que $v \in B$. Ceci est une conséquence immédiate de (31) et des inégalités

$$0 \leq q^k \leq L\,, \quad 0 \leq q^{k*} \leq L$$ ■

— Enfin, fixons un réel $T > 0$. Si $u \in B$ vérifie $\partial_x u \in L^1(0, T ; BV(0, 1))$, (31) donne :

$$\int_0^1 |\partial_{xx}^2 v| \leq \frac{1}{p_m} \sum_k A^k \left\{ \int_0^1 |\partial_x q^k| + \sum_l C_q \int_0^1 |\partial_x C^l| \right\}.$$

On a donc, en utilisant (29) :

$$\int_0^1 |\partial_{xx}^2 v| \leq \frac{K(T)}{p_m} \left(1 + \int_0^t \int_0^1 |\partial_{xx}^2 u| \right) \quad \text{pour tout } t \leq T, \tag{35}$$

où $K(T)$ dépend seulement de T, L, A^k et C_q. Un point fixe de ψ vérifiera donc l'estimation uniforme suivante, déduite du lemme de Gronwall :

$$\int_0^1 |\partial_{xx}^2 u| \leq C_0(t) \quad \text{avec} \quad C_0(t) = \frac{K(T)}{p_m} \exp\left\{ \frac{K(T)}{p_m} t \right\}. \tag{36}$$

Nous pouvons maintenant aborder la dernière étape :

LEMME I.2 : *Soit* $B' = B \cap \left\{ u ; \int_0^1 |\partial_{xx}^2 u| \leq C_0(t) \right\}$. *$\psi$ est une application de B' dans lui-même, de plus c'est une contraction pour la norme :*

$$|||u||| = \|\partial_x u\|_{L^1((0,T^*)\times 0,1)} + \|u(t,0)\|_{L^1(0,T^*)}$$

pour T^* assez petit indépendant des données initiales (mais seulement de L, A^k, C_q, p).

Remarque : En réalité on a imposé $L \geq \|q_0^k\|_\infty$ mais on constate en (34) que $L \geq q^k(t)$ pour tout temps $t \geq 0$, donc cette contrainte n'a pas d'incidence sur le choix ultérieur de T^*.

Preuve du lemme I.2 : On sait déjà que $\psi(B) \subset B$ donc la première assertion du lemme est une conséquence immédiate de (35) en remarquant que $C_0(t)$ satisfait à

$$C_0(t) = \frac{K(T)}{p_m} \left(1 + \int_0^t C_0(s)\, ds \right).$$

Soient u_1, u_2, dans B', $(\underline{C}_1, \underline{q}_1)$ et $(\underline{C}_2, \underline{q}_2)$ les solutions correspondantes de (1)-(2). En procédant comme dans I.2 on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \partial_t(|C_1^k - C_2^k|) + \partial_x(u|C_1^k - C_2^k|) \leq C_2^k|\partial_x(u_1 - u_2)| + (u_1 - u_2)|\partial_x C^k| \\ + A^k C_q |\underline{C}_1 - \underline{C}_2| + A^k |\underline{q}_1 - \underline{q}_2|, \end{aligned}$$

$$\partial_t(|q_1^k - q_2^k|) + A^k|\underline{q}_1 - \underline{q}_2| \leq A^k C_q |\underline{C}_1 - \underline{C}_2|,$$

puis :

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^1 (|\underline{C}_1 - \underline{C}_2| + |\underline{q}_1 - \underline{q}_2|)\, dx\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\, C_q \sum_k A^k\left(\int_0^1 |\underline{C}_1 - \underline{C}_2| + |\underline{q}_1 - \underline{q}_2|\right) dx +$$

$$+ \|\underline{C}_2\|_\infty \int_0^1 |\partial_x(u_1 - u_2)|\, dx + \|u_1 - u_2\|_{L^\infty(0,\,1)}(t) \int_0^1 \sum_k |\partial_x C_2^k| . \quad (37)$$

Posons $v_1 = \psi(u_1)$ et $v_2 = \psi(u_2)$. Par (31) on obtient :

$$\int_0^1 |\partial_x v_1 - \partial_x v_2|\, dx \leqslant \frac{1}{p_m} \sum_k A^k(1 + C_q) \int_0^1 (|\underline{C}_1 - \underline{C}_2| + |\underline{q}_1 - \underline{q}_2|)\, dx .$$

En utilisant alors (37) et le lemme de Gronwall on a finalement :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\partial_x v_1 - \partial_x v_2|\, dx &\leqslant \theta \int_0^{T^*} \int_0^1 |\partial_x u_1 - \partial_x u_2|\, dx \\ &\leqslant \theta\, |\!|\!|\, u_1 - u_2 \,|\!|\!|\end{aligned}$$

θ est une constante dépendant de $\|\underline{C}\|_\infty$ (c'est-à-dire de L, p, A^k), de $\int_0^1 |\partial_x C^k|$ (c'est-à-dire de $C_0(T)$) et de C_q. Il reste à choisir T^* de sorte que $\theta T^* \leqslant 1$ et le lemme I.1 est établi. ∎

Le théorème de point fixe de Banach nous assure l'existence d'une solution (unique) de (P) sur $[0, T^*]$. Itérant ce procédé on obtient une solution unique sur $[0, T] \times [0, 1]$ pour tout $T > 0$. Ceci achève la démonstration du théorème I.1. ∎

II. EXISTENCE GLOBALE D'UNE SOLUTION DE (P) POUR DES DONNÉES INITIALES DANS $L^\infty(0, 1)$

Le but de cette partie est de montrer que l'on peut abandonner l'hypothèse (H_1) pour

$$(H_2) : \quad q_0^k,\, C_0^k \in L^\infty(0, 1) ,$$

c'est-à-dire travailler dans un cadre L^∞ plutôt que BV. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME II.1 : *Sous les hypothèses* (H), (H_2), *et si* $d_{tt}^2 p \in L^\infty(0, T)$, *le* *problème* (P) *a au moins une solution* $(\underline{C}, \underline{q}, u)$ *avec* $C^k \geqslant 0$, $q^k \geqslant 0$, *et pour tout* $T > 0$:

$$C^k, q^k \in L^\infty((0, T) \times (0, 1)),$$
$$u \in L^\infty(0, T ; W^{1,\infty}(0, 1)).$$

Par rapport au théorème I.1, on constate en particulier que l'on n'a plus $\partial_x u \in L^1(0, T ; BV(0, 1))$, de plus nous n'énonçons pas de résultat d'unicité.

Pour établir le théorème II.1, nous allons expliciter dans un premier paragraphe l'idée directrice et les principales étapes, puis, dans les paragraphes suivants nous détaillerons les démonstrations.

II.1. Principe et étapes de la démonstration

Pour $k = 1, \ldots, K$ on considère des suites $(C_{0,n}^k)$, $(q_{0,n}^k)$ de données initiales dans $BV(0, 1)$, bornées dans $L^\infty(0, 1)$ et convergeant dans $L^1(0, 1)$ respectivement vers C_0^k et q_0^k.

Soit $(\underline{C}_n, \underline{q}_n, u_n)$ la solution du problème (P_n) correspondant. On se propose d'établir que $(\underline{C}_n, \underline{q}_n, u_n)$ converge dans $[L^1((0, T) \times (0, 1))]^{2k+1}$ (après une éventuelle extraction de sous-suite) vers une solution de (P) satisfaisant aux propriétés énoncées dans le théorème.

Remarquons tout d'abord que les suites (C_n^k), (q_n^k) $k = 1, \ldots, K$, ainsi que (u_n) et $(\partial_x u_n)$ sont bornées dans $L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ par des constantes ne dépendant que des données du problème, ainsi que la partie 1 le met en évidence. On a donc les estimations a priori uniformes :

$$\begin{cases} 0 \leqslant C^k \leqslant p_M , \\ 0 \leqslant q^k \leqslant L \qquad (cf.\ (32)\text{-}(33)) \\ |\partial_x u| \leqslant C . \end{cases} \tag{38}$$

La difficulté principale est d'obtenir de la compacité forte en temps pour (u_n) : nous montrons que u_n est uniformément lipschitzienne en temps ; nous obtenons ensuite un résultat de compacité pour $(\underline{C}_n, \underline{q}_n, u_n)$ et il reste à vérifier que l'on peut passer à la limite dans (1)-(2)-(3).

La démonstration du théorème II.1 se déduit ainsi des trois lemmes suivants :

LEMME II.1 : *Il existe une suite extraite de* (u_n) *qui converge dans* $L^\infty((0, T) \times (0, 1))$ *vers une fonction* $u \in L^\infty(0, T ; W^{1,\infty}(0, 1))$.

LEMME II.2 : *Soit* $u \in L^\infty(0, T ; W^{1,\infty}(0, 1))$. *Le système*

$$\begin{cases} \partial_t C^k + u\, \partial_x C^k = H^k(t, \underline{C}, \underline{q}) , \\ \partial_t q^k + A^k q^k \quad = A^k q^{k*}(\underline{C}) , \quad k = 1, \ldots, K , \end{cases} \tag{39}$$

avec :

$$\begin{aligned} H^k(t, \underline{C}, \underline{q}) = & -A^k(q^{k^*}(\underline{C}) - q^k) \\ & - C^k\left\{-\frac{d_t p}{p} - \frac{1}{p}\sum A^k(q^{k^*}(\underline{C}) - q^k)\right\} \end{aligned} \tag{40}$$

admet une unique solution pour des données initiales dans $L^\infty(0, 1)$.

LEMME II.3 : *Il existe une suite extraite de* $(\underline{C}_n, \underline{q}_n, u_n)$ *qui converge dans* $[L^1((0, T) \times (0, 1))]^{2K+1}$.

II.2. Preuve du lemme II.1

Nous écrivons (1) sous la forme

$$\partial_t C_n^k + u_n \partial_x C_n^k = H^k(t, \underline{C}_n, \underline{q}_n),$$

où $H^k(t, \underline{C}, \underline{q})$ est donné par (40).

Nous posons également $F^k(\underline{C}, q^k) = -A^k(q^{k^*}(\underline{C}) - q^k)$.

Comme dans (31) nous écrivons :

$$\partial_x u_n = -\frac{d_t p}{p} - \frac{1}{p}\sum_k F^k(\underline{C}_n, q_n^k). \tag{41}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_x u_n) = & \left(\frac{d_t p}{p}\right)^2 - \frac{1}{p} d_{tt}^2 p - \frac{d_t p}{p^2}\sum_k F^k(\underline{C}_n, q_n^k) - \\ & - \frac{1}{p}\sum_k A^K\left\{\sum_j \frac{\partial q^{k^*}}{\partial C^j}\partial_t C_n^j - \partial_t q_n^k\right\}. \end{aligned}$$

D'après (2) on a $\partial_t q_n^k = -F^k(\underline{C}_n, q_n^k)$, et (41) donne :

$$\sum_j \frac{\partial q^{k^*}}{\partial C^j}\partial_t C_n^j = \sum_j \frac{\partial q^{k^*}}{\partial C^j}\left\{-u_n \partial_x C_n^j + H^j(t, \underline{C}_n, \underline{q}_n)\right\}.$$

D'autre part on remarque que :

$$\sum_j \frac{\partial q^{k^*}}{\partial C^j}(\underline{C}_n) u_n \partial_x C_n^j = \partial_x\left\{u_n q^{k^*}(\underline{C}_n)\right\} - q^{k^*}(\underline{C}_n)\partial_x u_n.$$

Il en résulte, compte tenu des estimations a priori (38) que

$$\partial_t(\partial_x u_n) = \sum_k -\frac{A^k}{p}\partial_x\left\{u_n q^{k^*}(\underline{C}_n)\right\} + B_n,$$

avec (B_n) bornée dans L^∞, et, compte tenu de la condition aux limites sur u_n que :

$$\partial_t u_n = u_0 + \sum_k -\frac{A^k}{p}\left[u_n\, q^{k^*}(\underline{C}_n) - u_0\, q^{k^*}(\underline{C}_{0,n})\right] + \int_0^x B_n$$

est borné dans $L^\infty((0, T) \times (0, 1))$. De plus $(\partial_x u_n)$ est bornée dans $L^\infty((0, T) \times (0, 1))$, de sorte que u_n est uniformément lipschitzienne, ce qui permet de conclure. ∎

II.3. Preuve du lemme II.2

L'existence et l'unicité de (C_n^k) et (q_n^k) solutions de (39) correspondant aux données initiales $(C_{0,n}^k)$ et $(q_{0,n}^k)$ s'obtient comme dans la proposition I.1. Il reste « à faire tendre n vers $+\infty$ ».

Nous allons montrer que les suites (C_n^k) et (q_n^k) sont de Cauchy dans $L^1((0, T) \times (0, 1))$.

Pour n, $p \in N$ on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t(C_n^k - C_p)^k - u\partial_x(C_n^k - C_p^k) &= H^k(\underline{C}_n, \underline{q}_n) - H^k(\underline{C}_p, \underline{q}_p)\\ \partial_t(q_n^k - q_p^k) + A^k(q_n^k - q_p^k) &= A^k[q^{k^*}(\underline{C}_n) - q^{k^*}(\underline{C}_p)]\,.\end{aligned}$$

On en déduit comme dans (2) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^1 |C_n^k - C_p^k| \leq \int_0^1 |\partial_x u|\,|C_n^k - C_p^k|&\\ + \int_0^1 \left|H^k(\underline{C}_n, \underline{q}_n) - H^k(\underline{C}_p, \underline{q}_p)\right|&\,,\end{aligned} \tag{42}$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 |q_n^k - q_p^k| \leq A^k \int_0^1 |q^{k^*}(\underline{C}_n) - q^{k^*}(\underline{C}_p)|\,. \tag{43}$$

Puisque $\partial_x u \in L^\infty((0, T) \times (0, 1))$, nous obtenons, sommant (42) et (43) pour tous les exposants k :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 |\underline{C}_n - \underline{C}_p| + |\underline{q}_n - \underline{q}_p| \leq C \int_0^1 |\underline{C}_n - \underline{C}_p| + |\underline{q}_n - \underline{q}_p|\,,$$

où C est indépendant de n.

En utilisant le lemme de Gronwall et après intégration sur $(0, T)$, nous avons finalement :

$$\begin{aligned}\|\underline{C}_n - \underline{C}_p\|_{(L^1)^K} + \|\underline{q}_n - \underline{q}_p\|_{(L^1)^K} \leq CT(&\|\underline{C}_{0,n} - \underline{C}_{0,p}\|_{(L^1)^K}\\ &+ \|\underline{q}_{0n} - \underline{q}_{0p}\|_{(L^1)^K})\,,\end{aligned}$$

d'où il résulte que les suites $(\underline{C}_n)$ et $(\underline{q}_n)$ sont de Cauchy dans $(L^1)^K$. Ces suites convergent donc dans ce même espace respectivement vers des fonctions $\underline{C}$ et $\underline{q}$. Le passage à la limite dans les équations (39) ne présente pas de difficulté, de sorte que $(\underline{C}, \underline{q})$ est bien une solution de (39) associée à u et aux données initiales $\underline{C}_0$, $\underline{q}_0$. L'unicité se démontre en suivant la même démarche.

II.4. Preuve du lemme II.3

D'après le lemme II.1, on peut supposer que (u_n) converge dans $L^1((0, T) \times ((0, 1))$ vers une fonction $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$. Nous montrons alors que la solution $(\underline{C}, \underline{q})$ de (39) correspondant à u et aux données initiales $(\underline{C}_0, \underline{q}_0)$, obtenue grâce au lemme II.2, est la limite dans $(L^1)^{2K}$ de $(\underline{C}_n, \underline{q}_n)$. Nous utilisons à cet effet les lemmes de régularisation de Diperna-Lions [3] : le détail de la démonstration est présenté en annexe où, pour alléger l'exposé, nous omettons la variable q et prenons $K = 1$. ■

D'après le lemme II.3, on peut supposer que pour $k = 1, \ldots, K$ les fonctions C_n^k, q_n^k, u_n convergent dans $L^1((0, T) \times (0, 1))$ respectivement vers C^k, q^k, u et, compte tenu des estimations a priori on peut passer à la limite dans (1)-(2) sans difficulté. D'autre part, d'après (41), $\partial_x u_n$ converge dans L^1 vers

$$-\frac{d_t p}{p} - \frac{1}{p} \sum_k A^k (q^{k*}(\underline{C}) - q^k) ;$$

mais $\partial_x u_n$ converge aussi vers $\partial_x u$ au sens des distributions de sorte que l'on peut passer à la limite dans (41). On en déduit que (3) est réalisé à la limite. Ceci achève la démonstration du théorème II.1. ■

III. CONVERGENCE FAIBLE DES DONNÉES INITIALES DANS $L^\infty(0, 1)$

Nous avons obtenu l'existence d'une solution de (P) pour des données initiales dans L^∞ en établissant une propriété de compacité forte dans L^1 de l'ensemble des solutions de (P) associées à une suite de données initiales convergeant fortement dans L^1. Une question se pose alors naturellement : quel est le comportement des solutions associées à des données initiales convergeant dans L^∞ faible $*$? De façon plus précise : soient $(\underline{C}_{0,n})$, $(\underline{q}_{0,n})$ des suites de données initiales dans $L^\infty(0, 1)$ convergeant dans $L^\infty(0, 1)$ faible $*$ respectivement vers $\underline{C}_0$, $\underline{q}_0$. Peut-on extraire de la suite $(\underline{C}_n, \underline{q}_n, u_n)$ des solutions correspondantes une suite convergeant dans $[L^\infty(0, T) \times (0, 1)]^{2K+1}$ faible $*$ vers une solution de (P) ?

Nous allons apporter une réponse négative à cette question pour un modèle simplifié (P') conservant une caractéristique essentielle de (P), à savoir le type de liaison entre la vitesse $u(t, x)$ et la solution $(\underline{C}, \underline{q})$ telle qu'on la lit par exemple en (41).

$$(P') \quad \begin{cases} \partial_t C + u\, \partial_x C = 0 & \text{dans } (0, T) \times R\,, \\ \partial_x u = F(C)\,, & F \text{ lipschitzienne}\,, \\ C(0, x) = C_0 & C_0 \in L^1(R) \cap L^\infty(R)\,, \\ u(t, 0) = u_0(t) & \text{pour } t \in [0, T],\ u_0 \in L^\infty(0, T)\,. \end{cases}$$

Remarques :

1. Ce problème se distingue des lois de conservation scalaires car on aurait $u = F(C)$ et des effets de convergence forte sont alors connus (Tartar [9], Lions-Perthame-Tadmor [6]).

2. Le lemme II.1 s'adapte aisément à (P') de façon à obtenir la convergence forte dans $L^1(0, T ; L^1_{\mathrm{loc}}(R))$ d'une sous-suite de (u_n) associée à une suite $(C_{0,n})$ convergeant dans L^∞ faible $*$.

Nous allons présenter un premier contre-exemple en utilisant une suite de données initiales « oscillantes », puis nous reformulerons (P') en considérant le système vérifié par le couple $(F(C_n), u_n)$; nous construirons alors un second contre-exemple.

III.1. Un contre-exemple (données initiales « oscillantes »)

Nous prenons F définie par $F(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \text{ sinon,} \end{cases}$ et, pour donnée initiale :

$$C_{0,n} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, 1_{\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]}$$

de sorte que l'on a : $C_{0,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ dans L^∞ faible $*$. D'après le lemme II.1 (adapté), on peut supposer que (u_n) converge vers u dans $L^1(0, T ; L^1_{\mathrm{loc}}(R))$. Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME III.1 : *(C_n) ne converge pas dans L^∞ faible $*$ vers une fonction solution de*

$$\begin{cases} \partial_t C + u\, \partial_x C = 0 & \text{dans } (0, T) \times R\,, \\ \partial_x u = F(C)\,, & \\ C(0, x) = 0\,, & u(t, 0) = u_0(t)\,. \end{cases} \tag{44}$$

COROLLAIRE III.1 : *(C_n) ne converge pas fortement.*

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que (C_n, u_n) soit une suite de solutions de (P') telle que $C_n(0, x) = C_{0,n}(x)$, $u_n \to u$ dans $L^1(0, T; L^1_{\mathrm{loc}})$ et $C_n \rightharpoonup C$ dans L^∞ faible $*$ avec (C, u) solution de (44).

Nous allons alors utiliser le

LEMME III.1 : *Le système* (44) *a une unique solution* (C, u) *avec* $C \in L^\infty((0, T) \times R)$, $u \in L^1(0, T;\ L^1_{\mathrm{loc}}(R))$, *à savoir* $C \equiv 0$, $u(t, x) = u_0(t)$.

L'existence étant évidente, il nous suffit d'établir que l'on a nécessairement $C \equiv 0$. Il s'agit en fait d'un cas particulier d'un théorème d'unicité énoncé par Diperna et Lions ([3] théorème II.2) et dont la démonstration s'adapte facilement : nous l'omettons donc.

Posons $f_n = F(C_n)$. D'après le lemme III.1 $\partial_x u = F(0) = 0$ donc $\partial_x u_n \rightharpoonup 0$ dans L^∞ faible $*$, c'est-à-dire aussi $f_n \rightharpoonup 0$ dans L^∞ faible $*$. De plus, f_n est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t f_n + u_n\, \partial_x f_n = 0\,, \\ \partial_x u_n = f_n\,, \\ f_n(0, x) = f_{0,n} = F(C_{0,n}) = 1_{]0,1]}\,. \end{cases} \tag{45}$$

Dans (45) on a convergence forte du champ u_n dans $L^1(0, T;\ L^1_{\mathrm{loc}})$ (lemme II.1 adapté), on en déduit ([3] théorème II.5) que f_n converge dans L^1 vers une fonction f solution de

$$\begin{cases} \partial_t f + u\, \partial_x f = 0\,, \\ f(0, x) = 1_{]0,1]}\,, \end{cases}$$

de sorte que $f \not\equiv 0$, ce qui est absurde. ∎

III.2. Reformulation de (P') et nouveau contre-exemple

Dans l'exemple précédent, on constate que la limite faible de $F(C_{0,n})$ est différente de $F(C_0)$, où C_0 est la limite faible de $(C_{0,n})$. Il est donc naturel de reformuler le problème pour le couple (f_n, u_n) avec $f_n = F(C_n)$. Soit (f_n, u_n) une solution de

$$\begin{cases} \partial_t f_n + u_n\, \partial_x f_n = 0\,, \\ \partial_x u_n = f_n\,, \\ f_n(0, x) = f_{0,n} \in L^1 \cap L^\infty\,, \quad u_n(t, 0) = u_0(t)\,, \end{cases} \tag{46}$$

où l'on suppose que $f_{0,n} \rightharpoonup f_0$ dans L^∞ faible *. Montrons que dès que $f_{0,n}$ ne converge pas vers f^2 dans L^∞ faible *, alors (f_n) ne converge pas (faiblement) vers une solution de

$$\begin{cases} \partial_t f + u\, \partial_x f = 0\,, \\ \partial_x u = f\,, \\ f(0, x) = f_0(x)\,, \quad u(t, 0) = u_0(t)\,, \end{cases} \tag{47}$$

où u est limite de (u_n) dans $L^1(0, T; L^1_{\mathrm{loc}})$ (lemme II.1 adapté). En effet, supposons que (47) soit réalisé à la limite et réécrivons la première équation de (46) sous la forme :

$$\partial_t f_n + \partial_x (f_n u_n) = f_n^2\,,$$

qui passe à la limite pour donner

$$\partial_t f + \partial_x (f u) = G\,,$$

où G est la limite faible de f_n^2. Or (47) se réécrit :

$$\partial_t f + \partial_x (f u) = f^2\,,$$

donc $G = f^2$, c'est-à-dire $f_n^2 \rightharpoonup f^2$. Il en résulte que f_n converge vers f dans $L^1(0, T; L^1_{\mathrm{loc}})$. Il reste donc à donner un exemple où cette convergence forte est mise en défaut. Pour cela, considérons (g, v) solution de

$$\begin{cases} \partial_t g + v\, \partial_x g = 0 \quad \text{sur} \quad (0, 1) \times (0, +\infty), \\ \partial_x v = g\,, \\ g(0, x) = g_0(x) = \sum\limits_{p \geq 0} 1_{]p, p + \frac{1}{2}]}(x)\,, \\ g(t, 0) = \dfrac{1}{2}\,, \quad v(t, 0) = v_0(t) = 0\,, \end{cases}$$

et nous posons alors $f_{0,n}(x) = g_0(nx)$ pour $x \in [0, 1]$,

$$f_n(t, x) = g(t, nx)$$

sur $[0, 1] \times [0, 1]$, $u_n(t, x) = \dfrac{1}{n} v(t, nx)$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$, de sorte que (f_n, u_n) satisfait à :

$$\begin{cases} \partial_t f_n + u_n\, \partial_x f_n = 0 \quad \text{sur} \quad (0, 1) \times (0, 1)\,, \\ \partial_x u_n = f_n\,, \\ f_n(0, x) = f_{0,n}(x)\,, \quad f_n(t, 0) = \dfrac{1}{2}\,, \quad u_n(t, 0) = 0\,. \end{cases}$$

A une extraction de sous-suite près, u_n converge dans L^1 vers une fonction u et d'autre part on constate que $f_{0,n} \rightharpoonup \frac{1}{2}$ dans L^∞ faible *. Supposons que f_n converge (fortement) dans L^1 vers f, alors :

$$\begin{cases} \partial_t f + u\, \partial_x f = 0\,, \\ \partial_x u = f\,, \\ f(0, x) = \dfrac{1}{2}\,, \quad f(t, 0) = \dfrac{1}{2}\,, \end{cases}$$

et on a $f \equiv \frac{1}{2}$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$ grâce au lemme d'unicité III.1 qui s'étend aisément ici. Remarquons que sur $[0, 1] \times [0, 1]$ on a $|u_n| \leqslant 1$ car sur $[0, n]$ on a $|v| \leqslant n$; donc, sur

$$T = \{(t, x)\,; \quad 0 < x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant x\}\,,$$

on a $f_n(t, x) \in \{0, 1\}$, de sorte que :

$$\int_T |f_n - f| = \frac{1}{2} \text{mes. } (T) = \frac{1}{4}\,,$$

ce qui contredit la convergence forte.

Remarque : dans [3] se pose le « problème de stabilité faible » suivant : soit (C_n) une suite de solutions de

$$\begin{aligned} &\partial_t C_n + u_n\, \partial_x C_n = 0\,, \\ &C_n(0, x) = C_{0,n}(x)\,, \quad C_{0,n} \in L^1(R) \cap L^\infty(R)\,, \end{aligned}$$

où, pour simplifier, $|\partial_x u_n|_1 \leqslant C$, $u_n \to u$ dans $L^1(0, T\,; L^1_{\mathrm{loc}})$ et $C_{0,n} \rightharpoonup C_0$ dans L^1 faible. Peut-on conclure à la convergence faible de C_n vers une solution C de

$$\begin{cases} \partial_t C + u\, \partial_x C = 0 \\ C(0, x) = C_0(x)\,? \end{cases}$$

L'étude précédente montre que la réponse est négative.

RÉFÉRENCES

[1] C. Bourdarias, Travail en préparation.

[2] E. Canon et F. James, Résolution du problème de Cauchy pour certains systèmes hyperboliques intervenant en génie chimique (1990).

[3] R. J. DIPERNA et P. L. LIONS, Ordinary differential equation transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.* 98 (1989), p. 511-547.

[4] F. JAMES, Sur la modélisation mathématique des équilibres diphasiques et des colonnes de chromatographie. *Thèse,* École Polytechnique, nov. 1990.

[5] S. N. KRUZKOV, First order quasilinear equations in several independant variables. *Math USSR Sb.,* vol. 10, 1970, p. 217-243.

[6] P. L. LIONS, B. PERTHAME et E. TADMOR, Note aux *C. R. Acad. Sci. Paris, sér. 1,* t. 312, janv. 1991, p. 97.

[7] H. RHEE, R. ARIS and N. R. AMUNDSON, On the theory of multicomponent chromatography. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, A* 267, 1970, p. 419-455.

[8] P. M. RUTHVEN, Principles of adsorption and adsorption processes. *Wiley Interscience Publ.,* New York, 1984.

[9] L. TARTAR, Compensated compactness and applications to partial differential equations. In Research Notes in Mathematics, 39, Herriot-Watt. Sympos. vol. 4, *Pitman Press.* Boston, London (1975), p. 136-211.

ANNEXE

Nous nous proposons ici d'énoncer et de démontrer en détails un résultat qui est la clé du lemme II.3.

PROPOSITION : *Soit* (u_n) *une suite bornée dans* $L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$, *convergent dans* $L^1((0, T)\times(0, 1))$ *vers* $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(0, 1))$. *Soit* $(C_{0,n})$ *une suite de données initiales dans* $BV(0, 1)$ *et* C_n *l'unique fonction vérifiant :*

$$\begin{cases} \partial_t C_n + u_n\, \partial_x C_n = H(C_n) \quad \textit{dans} \quad (0, T)\times(0, 1)\,, \\ C_n(0, x) = C_{0,n}(x)\,, \\ C_n(t, 0) = C_W(t)\,, \quad C_n(t, 1) = C_L(t, 1) \quad \textit{si} \quad u_n(t, 1) < 0\,, \end{cases} \tag{48}$$

où H *est une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et lipschitzienne. Supposons que* $C_{0,n}$ *converge dans* $L^1(0, 1)$ *vers* $C_0 \in L^\infty(0, 1)$, *alors* C_n *converge dans* $L^1((0, T)\times(0, 1))$ *vers la solution* C *de :*

$$\begin{cases} \partial_t C + u\, \partial_x C = H(C) \quad \textit{dans} \quad (0, T)\times(0, 1)\,, \\ C(0, x) = C_0(x)\,, \\ C(t, 0) = C_W(t)\,, \quad C(t, 1) = C_L(t, 1) \quad \textit{si} \quad u(t, 1) < 0\,. \end{cases} \tag{49}$$

Remarque : L'existence et l'unicité de C, solution de (49) ont été établies dans le lemme II.2.

Démonstration : Considérons, pour $0 < \delta < \frac{1}{4}$, $\varphi_\delta \in D^+(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que supp $(\varphi_\delta) = [\delta, 1-\delta]$, $\varphi_\delta \equiv 1$ sur $[2\delta, 1-2\delta]$, φ_δ monotone sur $[\delta, 2\delta]$ et sur $[1-2\delta, 1-\delta]$, avec $|\partial_x \varphi_\delta| \leq \frac{C}{\delta}$.

Pour $0 < \varepsilon < \delta$, ρ_ε désigne un noyau régularisant usuel :

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{avec} \quad \rho \in D^+(\mathbb{R}), \quad \text{supp}(\rho) = [-1, 1],$$

$$\int \rho(x)\, dx = 1 .$$

Nous posons $(C\varphi_\delta)_* \rho_\varepsilon = C_{\delta,\varepsilon}$, $C_n \varphi_\delta = C_{n,\delta}$. Ces fonctions vérifient alors :

$$\partial_t C_{\delta,\varepsilon} + u\, \partial_x C_{\delta,\varepsilon} = H(C_{\delta,\varepsilon}) + u(C\, \partial_x \varphi_\delta)_\varepsilon + r_\varepsilon^\delta , \tag{50}$$

avec $r_\varepsilon^\delta \to 0$ dans $L^1((0,T)\times(0,1))$ quand successivement $\varepsilon \to 0$ et $\delta \to 0$ (d'après un lemme de régularisation de Diperna-Lions [3]),

$$\partial_t C_{n,\delta} + u_n\, \partial_x C_{n,\delta} = H(C_{n,\delta}) + u_n\, C_n\, \partial_x \varphi_\delta + r_n^\delta , \tag{51}$$

avec $r_n^\delta \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$ dans $L^1((0,T)\times(0,1))$ uniformément par rapport à n. De (50) et (51) on déduit :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 |C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}| \leq \int_0^1 |u-u_n|\, |\partial_x C_{\delta,\varepsilon}| + C\int_0^1 |C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}|$$
$$+ \int_0^1 |r_\varepsilon^\delta| + |r_n^\delta| + \int_0^1 R_{n,\delta,\varepsilon} ,$$

avec $E_{n,\delta,\varepsilon} = [u_n\, C_n\, \partial_x \varphi_\delta - u(C\, \partial_x \varphi_\delta)_\varepsilon]\ \text{sgn}\,(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon})$.

Après utilisation du lemme de Gronwall et intégration sur $(0, T)$, nous obtenons finalement :

$$\|C_n - C\|_{L^1} \leq \|C - C_{\delta,\varepsilon}\|_{L^1} + C(T)\Big\{ \|(C_{0,n})_{\delta,\varepsilon} - (C_0)_{\delta,\varepsilon}\|_{L^1} +$$
$$+ \int_0^T\int_0^1 |u-u_n|\,|\partial_x C_{\delta,\varepsilon}| + \int_0^T\int_0^1 |r_\varepsilon^\delta| + |r_n^\delta| + \int_0^T\int_0^1 E_{n,\delta,\varepsilon}\Big\} . \tag{52}$$

Pour achever la démonstration, nous établissons le :

LEMME : $\lim\limits_{\delta \to 0} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim\limits_{n}} \displaystyle\int_0^T \int_0^1 E_{n,\delta,\varepsilon} = 0.$

Démonstration du lemme : Nous avons :

$$E_{n,\delta,\varepsilon} = [(u_n - u)\, C_n\, \partial_x \varphi_\delta + u(C\, \partial_x \varphi_\delta - (C\, \partial_x \varphi_\delta)_\varepsilon) + \\ + u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta]\, \operatorname{sgn}(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}) .$$

Il en résulte que :

$$\int_0^T \int_0^1 E_{n,\delta,\varepsilon} \leqslant \frac{C}{\delta} \int_0^T \int_0^1 |u_n - u| + C \int_0^T \int_0^1 |C\, \partial_x \varphi_\delta - (C\, \partial_x \varphi_\delta)_\varepsilon| + \\ + \int_0^T \int_0^1 u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}) .$$

δ étant fixé, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{C}{\delta} \int_0^T \int_0^1 |u_n - u| = 0 \,, \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \int_0^1 |C\, \partial_x \varphi_\delta - (C\, \partial_x \varphi_\delta)_\varepsilon| = 0 .$$

D'autre part :

$$\int_0^T \int_0^1 u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}) = A_{n,\delta,\varepsilon} + B_{n,\delta,\varepsilon} ,$$

avec

$$A_{n,\delta,\varepsilon} = \int_0^T \int_\delta^{2\delta} u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}) ,$$
$$B_{n,\delta,\varepsilon} = \int_0^T \int_{1-2\delta}^{1-\delta} u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n,\delta} - C_{\delta,\varepsilon}) .$$

Étude de $A_{n,\delta,\varepsilon}$.

$$|A_{n,\delta,\varepsilon}| \leqslant C \int_0^T \frac{1}{\delta} \int_0^{2\delta} |C_n - C| ,$$

on a donc :

$$\lim_{\delta \to 0} \overline{\lim_{n}} |A_{n,\delta,\varepsilon}| \leqslant C \int_0^T \frac{1}{\delta} \int_0^{2\delta} \overline{\lim_{n}} |C_n - C| .$$

Par hypothèse, en $x = 0$, le flux est entrant, de plus u, u_n sont uniformément lipschitziennes en x (par rapport à t et x).
Soit $a > 0$. Il existe un réel $\Delta > 0$ tel que :

si $u_0(t) \geqslant 2\,a$ sur I alors $u(t)$, $u_n(t) \geqslant a$ sur $I \times [0, \Delta]$,
si $u_0(t) \leqslant 2\,a$ sur J alors $|u(t)| \leqslant Ca$ sur $J \times [0, \Delta]$.

Pour $\delta < \Delta/2$ on a alors $\left| \int_J \int_0^{2\delta} u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \right| \leq C a$.

Dans $R = (I \cap [\Delta/a, T]) \times [0, \Delta]$, les caractéristiques sont issues d'un point de la frontière latérale $[0, T] \times \{0\}$ où $C(t, 0) = C_n(t, 0) = C_w(t)$ est lipschitzienne, de sorte que pour tout t dans $I \cap [\Delta/a, T]$ la famille $\{C, C_n ; n \in \mathbb{R}\}$ est uniformément équicontinue. Il en résulte que $\overline{\lim_n} |C - C_n|$ est continue sur R et on a :

$$\int_{\Delta/a}^{T} \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^{2\delta} \overline{\lim_n} |C - C_n| = 0 .$$

Le terme résiduel $\left(\int_0^{\Delta} \ldots \right)$ est majoré par $C\ \Delta^2/a$ qui peut être rendu aussi petit que l'on veut à condition d'imposer par exemple $\Delta < a$.

Étude de $B_{n, \delta, \varepsilon}$.

Soit $a > 0$. Si sur $I \subset [0, T]$ on a $|u(t, 1)| \leq 2a$, alors, pour δ assez petit, on aura $|u| \leq a$ sur $I \times [1 - 2\delta, 1]$ et donc :

$$\left| \int_I \int_{1 - 2\delta}^{1 - \delta} u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \right| \leq C a ,$$

si sur $J \subset [0, T]$ on a $u(t, 1) \leq -2a$, on peut utiliser la condition limite $C(t, 1) = C_n(t, 1) = C_L(t)$ et raisonner comme pour $A_{n, \delta, \varepsilon}$, si enfin sur $K \subset [0, T]$ on a $u(t, 1) \geq 2a$, nous remarquons que sur $[1 - 2\delta, 1 - \delta[$ on a :

$$\operatorname{sgn}(C_{n, \delta} - C_{\delta, \varepsilon}) = \operatorname{sgn}\left(C_n - \frac{C_{\delta, \varepsilon}}{\varphi_\delta} \right) ,$$

de sorte que :

$$u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n, \delta} - C_{\delta, \varepsilon}) \leq u \left| C_n - \frac{C_{\delta, \varepsilon}}{\varphi_\delta} \right| \partial_x \varphi_\delta + R_{\delta, \varepsilon} ,$$

avec
$$R_{\delta, \varepsilon} = \left| u \left(\frac{C_{\delta, \varepsilon}}{\varphi_\delta} - C \right) \partial_x \varphi_\delta \right| .$$

$u \left| C_n - \dfrac{C_{\delta, \varepsilon}}{\varphi_\delta} \right| \partial_x \varphi_\delta \leq 0$ sur $[1 - 2\delta, 1 - \delta[$ si δ est assez petit, d'autre part $R_{\delta, \varepsilon} \to 0$ dans $L^1(1 - 2\delta, 1 - \delta - \alpha)$ pour tout α tel que $0 < \alpha < \delta$, enfin $\displaystyle\int_{1 - \delta - \alpha}^{1 - \delta} |u(C_n - C)\, \partial_x \varphi_\delta \operatorname{sgn}(C_{n, \delta} - C_{\delta, \varepsilon})| \leq C \frac{\alpha}{\delta}$, et il suffit de prendre $\alpha = \delta^2$ pour conclure. ■

δ et ε étant fixés, $|\partial_x C_{\delta,\varepsilon}|$ reste borné ; compte tenu du lemme, nous obtenons donc le résultat annoncé en passant successivement à la limite dans (52) quand n tend vers $+\infty$, quand ε tend vers 0 puis quand δ tend vers 0. ■