

F. ZEDEK

**Interpolation de Lagrange par des splines
quadratiques sur un quadrilatère de \mathbb{R}^2**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 26, n° 5 (1992), p. 575-593

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1992__26_5_575_0

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**INTERPOLATION DE LAGRANGE
PAR DES SPLINES QUADRATIQUES
SUR UN QUADRILATÈRE DE \mathbb{R}^2 (*)**

par F. ZEDEK (1)

Communiqué par P J LAURENT

Résumé — Le but de ce travail est la résolution d'un problème d'interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur une triangulation τ d'un quadrilatère Q de \mathbb{R}^2 . Des résultats concernant des estimations de la norme de l'opérateur et de l'erreur d'interpolation sont donnés dans le cas où Q est un carré

Abstract — Lagrange interpolation by quadratic splines on a quadrilateral domain of \mathbb{R}^2 . The aim of this paper is to solve a Lagrange interpolation problem by quadratic splines on a triangular partition τ of a quadrilateral Q in \mathbb{R}^2 . Some results concerning the norm of the interpolation operator and error estimates are given in the case when Q is a square

1. INTRODUCTION

Pour des raisons pratiques et théoriques, les surfaces polynômiales par morceaux sont largement utilisées dans les constructions géométriques assistées par ordinateur. Les plus simples sont les surfaces splines quadratiques C^1 (fonctions polynômiales par morceaux de degré 2 et de classe C^1).

Étant donné un quadrilatère Q de \mathbb{R}^2 ; on le munit de la triangulation τ suivante :

Q est une réunion de quadrilatères emboîtés (appelés macro-quadrilatères) subdivisés en micro-quadrilatères, chacun d'eux étant à son tour subdivisé en quatre triangles par le tracé de ses diagonales. Les points d'interpolation sont les sommets des macro-quadrilatères, les milieux des segments déterminés par τ sur leurs frontières et quelques points choisis convenablement à l'intérieur du quadrilatère central (cf. fig. 1, 3 et 4) ;

(*) Reçu pour publication le 28 janvier 1991

(1) Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois, Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, Bât M3, 59655 Villeneuve d'Ascq, Cedex

Au paragraphe 2, on rappelle quelques résultats sur la représentation locale des splines quadratiques à une et deux variables dans la base de Bernstein et sur l'interpolation à une variable.

Au paragraphe 3, on explicite le calcul de l'interpolant en construisant sa représentation associée à chaque triangle de τ . Dans [8] G. Heindl traite également un problème d'interpolation par des splines quadratiques C^1 , mais en faisant une interpolation d'Hermite aux sommets d'une triangulation donnée. Dans la plupart des cas, le problème est traité localement, mais dans ce travail, l'algorithme proposé traite le problème globalement.

Au paragraphe 4, on donne un encadrement de la norme de l'opérateur d'interpolation.

Au paragraphe 5, on étudie le cas particulier où Q est un carré de \mathbb{R}^2 muni d'une triangulation régulière (cf. fig. 5). Il faut remarquer que dans le cas d'un domaine rectangulaire, on peut construire une base de l'espace des splines quadratiques au moyen de B -splines (cf. Chui et Wang [2]) mais que ceci n'est pas possible dans le cas d'un domaine plus général comme celui que nous étudions dans cet article. On précise les résultats sur la norme de l'opérateur, on donne une majoration de l'erreur d'interpolation ainsi que des exemples numériques.

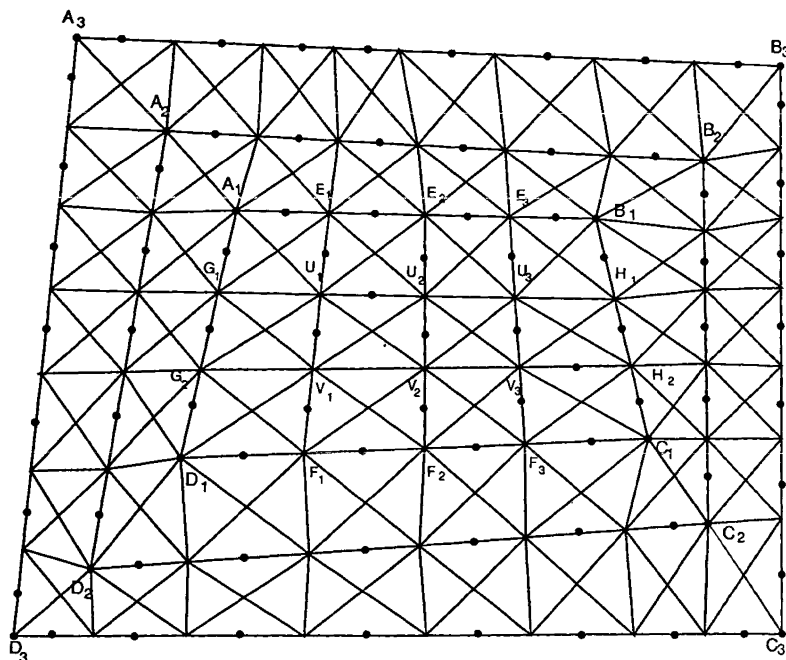


Figure 1. — Triangulation τ de Q et points d'interpolation. On a 3 macro-quadrilatères emboîtés $(A, B, C, D)_i$, $i = 1, 2, 3$.

2. RAPPELS SUR LES SPLINES QUADRATIQUES

2.1. Interpolation de Lagrange à une variable

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ une subdivision de I et $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, N - 1$. Soit : $t_0^* = t_0$; $t_i^* = (t_i + t_{i-1})/2$ ($i = 1, \dots, N$) et $t_{N+1}^* = t_N$. Pour $i = 0, \dots, N - 1$ on désigne par $P_2(I_i)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 définis sur I_i et par $P_2^1(I)$ l'ensemble des fonctions s de classe C^1 telles que $s|_{I_i}$ appartienne à $P_2(I_i)$. Le problème d'interpolation est le suivant : étant donné une fonction f définie sur I , on pose $f(t_i^*) = f_i$ ($i = 0, \dots, N + 1$) et on cherche $s \in P_2^1(I)$ tel que $s(t_i^*) = f_i$.

Considérons alors la base de Bernstein :

$$\phi_j(t) = \binom{2}{j} t^j (1 - t)^{2-j} \quad (j = 0, 1, 2).$$

Sur I_i , s s'écrit :
$$s(t) = \sum_{j=0}^2 b_{2i+j} \phi_j\left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right).$$

Les coefficients b_{2i+j} ($i = 0, \dots, N - 1$ et $j = 0, 1, 2$) sont appelés *B-coefficients* de s .

LEMME 1 : Les *B-coefficients* d'indices pairs sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} 6 b_2 + b_4 &= -f_0 + 4 f_1 + 4 f_2 \\ b_{2i-2} + 6 b_{2i} + b_{2i+2} &= 4 f_i + 4 f_{i+1} \quad (2 \leq i \leq N - 2) \\ b_{2N-4} + 6 b_{2N-2} &= 4 f_{N-1} + 4 f_N - f_{N+1} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit : $b_{2i+1} = 2 f_{i+1} - (b_{2i} + b_{2i+2})/2$ pour $0 \leq i \leq N - 1$, avec $b_0 = f_0$ et $b_{2N} = f_{N+1}$.

Preuve : voir [9] et [12].

LEMME 2 : Soit $f \in C([a, b])$ vérifiant $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \leq 1$; alors

les *B-coefficients* de son interpolant spline vérifient : $|b_0| \leq 1$; $|b_{2N}| \leq 1$; $|b_1| \leq 3,5$; $|b_{2N-1}| \leq 3,5$; $|b_{2i}| \leq 2$ ($i = 1, \dots, N - 1$) et $|b_{2i+1}| \leq 4$ ($i = 1, \dots, N - 2$).

Preuve : D'après le développement de s dans la base de Bernstein on a :

$$s(t_i) = b_{2i} \quad \text{pour } i = 0, \dots, N$$

or $b_0 = f_0$ et $b_{2N} = f_{N+1}$ (lemme 1)

d'où $|b_0| \leq 1$ et $|b_{2N}| \leq 1$.

D'autre part $\|s\| \leq 2$ (cf. [9]) donc $|b_{2i}| \leq 2$ pour $i = 1, \dots, N-1$ et

$$|b_{2i+1}| \leq 2 \|f\| + (|b_{2i}| + |b_{2i+2}|)/2 \quad (i = 0, \dots, N-1)$$

d'où : $|b_1| \leq 3,5$; $|b_{2N-1}| \leq 3,5$

et $|b_{2i+1}| \leq 4$ pour $i = 1, \dots, N-2$.

2.2. Coordonnées barycentriques et base de Bernstein dans un triangle de τ .

Pour $T \in \tau$, on note $P_2(T)$ l'ensemble des polynômes à 2 variables, de degré total au plus égal à 2, définis sur T , et $P_2^1(Q)$ l'ensemble des fonctions $s \in C^1(Q)$ telles que $s|_T \in P_2(T)$ pour tout $T \in \tau$ (splines quadratiques).

Soit T_1 le triangle $A_1 A_2 A_3$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées barycentriques dans T_1 de $X \in \mathbb{R}^2$.

i.e. les solutions de : $X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$
 $1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

et $\{\phi_i(\lambda)\}_{1 \leq i \leq 6} = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, 2\lambda_1\lambda_2, 2\lambda_2\lambda_3, 2\lambda_1\lambda_3\}$ la base de Bernstein de $P_2(T_1)$. (Ces fonctions vérifient : $\phi_i(\lambda) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^6 \phi_i(\lambda) = 1$). (Voir [4, 12]).

Soit $p_1 \in P_2(T_1)$. Écrivons p_1 dans cette base

$$p_1(X) = p_1(\lambda) = \sum_{i=1}^6 a_i \phi_i(\lambda). \quad (1)$$

En désignant par A_i ($4 \leq i \leq 6$) les milieux des côtés de T_1 (cf. fig. 2), on vérifie aisément que :

$$X = \sum_{i=1}^6 A_i \phi_i(\lambda). \quad (2)$$

DÉFINITION 1 : Les coefficients a_i ($i = 1, \dots, 6$) sont appelés *B-coefficients* de p_1 . L'ensemble des points $\tilde{A}_i = (A_i, a_i) \in \mathbb{R}^3$ est appelé *B-réseau* de p_1 . Le graphe de p_1 sur T_1 est appelé *triangle quadratique*.

Les égalités (1) et (2) précédentes signifient que le point $(X, P_1(X))$ appartient à l'enveloppe convexe du *B-réseau*.

2.3. Raccordement C^1 de 2 triangles quadratiques

Soit T_2 le triangle $A_1 A_2 A'_3$ de τ ayant $A_1 A_2$ comme côté commun avec T_1 et soient a_i et a'_i ($1 \leq i \leq 6$) les B -coefficients respectifs de $p_1 \in P_2(T_1)$ et $p_2 \in P_2(T_2)$.

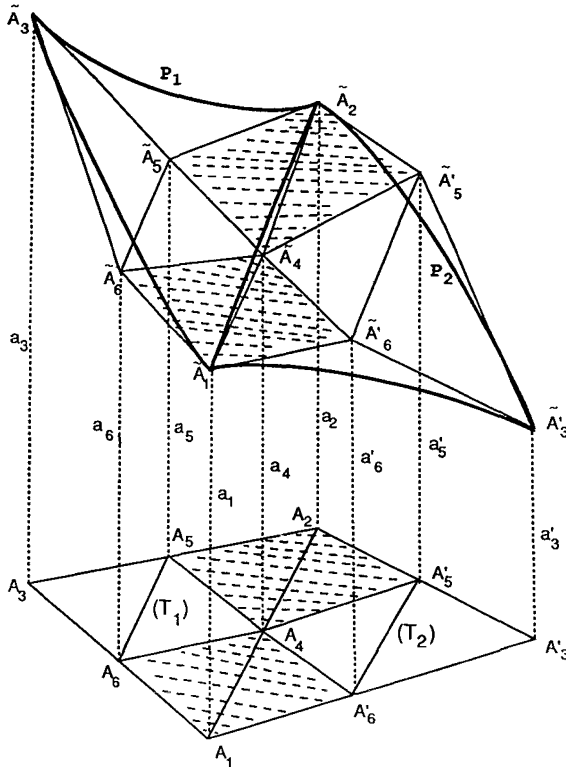


Figure 2. — Raccordement C^1 de 2 triangles quadratiques.

THÉORÈME 1 : Si $A'_3 = \lambda'_1 A_1 + \lambda'_2 A_2 + \lambda'_3 A_3$, le raccordement de p_1 et p_2 le long de $A_1 A_2$ se traduit par :

- 1) $a'_1 = a_1$; $a'_2 = a_2$ et $a'_4 = a_4$ pour la continuité C^0 .
- 2) $\left. \begin{aligned} a'_5 &= \lambda'_1 a_4 + \lambda'_2 a_2 + \lambda'_3 a_5 \\ a'_6 &= \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_4 + \lambda'_3 a_6 \end{aligned} \right\}$ pour la continuité C^1 .

COROLLAIRE 1 : Si de plus A_1, A_3 et A'_3 sont alignés, avec $A'_3 A_1 = k \cdot A_3 A_1$ alors la continuité C^1 se traduit par :

$$\begin{aligned}(1+k) a_1 &= a'_6 + k \cdot a_6 \\ (1+k) a_4 &= a'_5 + k \cdot a_5.\end{aligned}$$

Preuve : Voir [4, 12].

Remarques :

a) A'_5 et A'_6 étant les milieux respectifs de $A_2 A'_3$ et $A_1 A'_3$ on pose $\tilde{A}'_i = (A'_i, a'_i)$ ($i = 5; 6$); le théorème 1 signifie que d'une part $\tilde{A}_1, \tilde{A}_6, \tilde{A}_4$ et \tilde{A}'_6 et d'autre part $\tilde{A}_4, \tilde{A}_5, \tilde{A}_2$, et \tilde{A}'_5 sont coplanaires.

b) Dans la suite de l'exposé le B -réseau d'un polynôme est projeté sur le plan de base : sur les figures, on écrit les B -coefficients à la place des projections des points du B -réseau.

3. INTERPOLATION PAR DES SPLINES QUADRATIQUES SUR Q

3.1. Description de τ et choix des points d'interpolation

Soit Q un quadrilatère de \mathbb{R}^2 ; I, n et n' des entiers naturels fixés. Pour la triangulation τ , on procède ainsi : en partant du bord de Q on trace des quadrilatères emboîtés, appelés macro-quadrilatères et notés Q_i ($i = 1, \dots, I$) : Q_1 est le quadrilatère central et Q_I coïncide avec Q (cf. fig. 1 où $I = 3$). Les régions $(Q_i \setminus Q_{i-1})$ ($i = 2, \dots, I$) sont des couronnes de micro-quadrilatères. A l'intérieur de Q_1 les segments $E_i F_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) et $G_i H_i$ ($i = 1, \dots, n'-1$) déterminent n' rangées de n micro-quadrilatères chacune (cf. fig. 1, 3, 4). Dans la région $(Q_2 \setminus Q_1)$ on trace tous les micro-quadrilatères ayant chacun deux sommets sur la frontière de Q_1 (i.e. un côté commun avec un micro-quadrilatère de Q_1); et dont les deux autres sommets se trouvent sur la frontière de Q_2 .

La même construction se répète dans $(Q_i \setminus Q_{i-1})$ ($i = 3, \dots, I$); chaque micro-quadrilatère est subdivisé en 4 triangles par ses diagonales.

Pour $i = 1, \dots, I$ les points d'interpolation choisis sur la frontière de Q_i sont ses sommets et les milieux des segments déterminés par τ (cf. fig. 1). A l'intérieur de Q_1 ce sont les milieux des côtés des micro-quadrilatères ayant comme supports $E_i F_i$ ($i = 1, \dots, n-1$) et un point au milieu de l'un des côtés portés par les segments $G_i H_i$ ($i = 1, \dots, n'-1$) (cf. figs. 1, 3 et 4).

THÉORÈME 2 : *Étant donné une fonction f définie sur Q , il existe une spline unique $s \in P_2^1(Q)$ interpolant f aux points choisis.*

Preuve : La démonstration se fait en explicitant les B -coefficients de s sur chaque triangle T inclu dans Q .

Ce calcul se fait sur chacun des macro-quadrilatères emboîtés en partant de Q_1 .

3.2. Interpolation sur le quadrilatère central Q_1

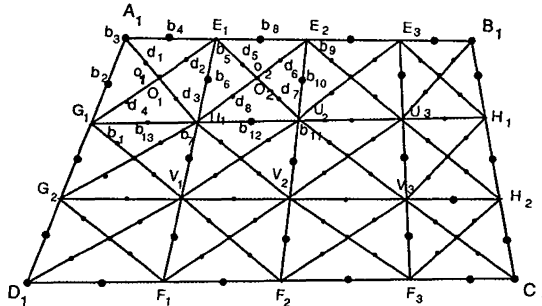


Figure 3. — Représentation des points d'interpolation et des B -coefficients sur Q_1 (cas où $n = 4$; $n' = 3$).

Les sommets des triangles sont représentés par des lettres majuscules et les B -coefficients par des lettres minuscules. Pour la clarté de la figure on ne nomme que certains B -coefficients, les autres sont soit confondus avec les points d'interpolation (\cdot), soit représentés par des petits points (\cdot).

ALGORITHME : *L'application du lemme 1 aux côtés de Q_1 , à $E_i F_i$ ($i = 1, \dots, n - 1$) et aux côtés des micro-quadrilatères, ayant comme supports $G_i H_i$ ($i = 1, \dots, n' - 1$) et contenant un point d'interpolation (sur la figure 3, $U_1 U_2$ et $V_3 H_2$) donne les B -coefficients correspondant à ces segments, donc en particulier b_i ($i = 1, \dots, 12$).*

Le calcul des autres B -coefficients nécessite le lemme suivant :

LEMME 3 :

a) *Le calcul des B -coefficients sur la frontière d'un micro-quadrilatère détermine de manière unique la spline sur ce dernier.*

b) *Si de plus, ces B -coefficients sont majorés par une constante K , alors la norme uniforme de la spline est majorée par K sur ce micro-quadrilatère.*

Preuve : a) Considérons un micro-quadrilatère dont tous les B -coefficients de la frontière sont connus par exemple $E_1 E_2 U_2 U_1$.

Pour déterminer la spline sur ce micro-quadrilatère il suffit de déterminer son expression sur chacun des triangles inclus dans ce dernier. Ce qui revient à déterminer les B -coefficients d_i ($i = 5, \dots, 8$) et o_2 (cf. 2.2).

Posons :

$$\frac{O_2 E_1}{O_2 U_2} = k_2 \quad \text{et} \quad \frac{O_2 E_2}{O_2 U_1} = k'_2.$$

D'après le corollaire 1 on a :

$$\begin{aligned} d_5 &= (b_8 + k'_2 \cdot b_6)/(1 + k'_2) \\ d_6 &= (b_8 + k_2 \cdot b_{10})/(1 + k_2) \\ d_7 &= (b_{10} + k'_2 \cdot b_{12})/(1 + k'_2) \\ d_8 &= (b_6 + k_2 \cdot b_{12})/(1 + k_2) \\ o_2 &= (d_5 + k_2 \cdot d_7)/(1 + k_2) = (d_6 + k'_2 \cdot d_8)/(1 + k'_2). \end{aligned}$$

b) Les formules précédentes montrent que les B -coefficients internes sont majorés par K ; ainsi en utilisant les propriétés de la base de Bernstein sur chacun des triangles, on en déduit immédiatement le résultat.

Pour déterminer les B -coefficients appartenant à la frontière de chacun des micro-quadrilatères, il reste à calculer ceux qui correspondent à $G_i H_i$ ($i = 1, \dots, n' - 1$) et qui ne coïncident pas avec un point d'interpolation. On explicite le calcul de b_{13} , les autres B -coefficients sont obtenus de manière analogue.

Posons $O_1 = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 O_2 + \lambda_3 U_1$ et $\frac{O_1 E_1}{O_1 G_1} = k'_1$.

D'après le théorème 1 on a :

$$d_3 = \lambda_1 b_6 + \lambda_2 d_8 + \lambda_3 b_7.$$

D'après le corollaire 1 on a :

$$b_{13} = ((1 + k'_1) d_3 - b_6)/k'_1.$$

Les autres B -coefficients sont obtenus à l'aide du lemme 3 ; ce qui détermine complètement les B -coefficients dans Q_1 .

3.3. Interpolation sur Q_i ($2 \leq i \leq I$)

Les B -coefficients correspondant aux côtés de tous les macro-quadrilatères Q_i s'obtiennent par application du lemme 1. Pour la méthode de calcul des autres B -coefficients, on se limite à la région $(Q_2 \setminus Q_1)$, le calcul étant semblable dans $(Q_i \setminus Q_{i-1})$ ($i = 3, \dots, I$).

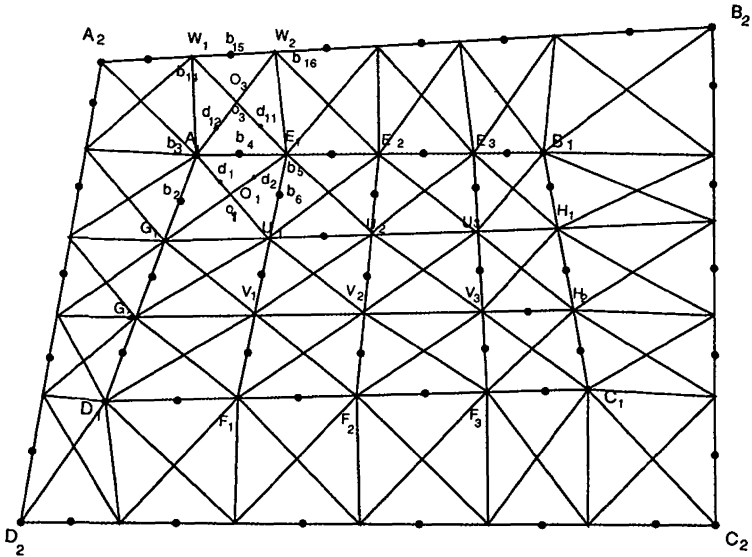


Figure 4. — Représentation de quelques B -coefficients sur Q_2 .

Dans le micro-quadrilatère $W_1 W_2 E_1 A_1$ les B -coefficients b_i ($i = 3, 4, 5$) sont calculés précédemment (interpolation sur Q_1), les b_i ($i = 14, 15, 16$) sont obtenus par application du lemme 1 à $A_2 B_2$.

$$O_3 = \mu_1 A_1 + \mu_2 E_1 + \mu_3 O_1.$$

D'après le théorème 1 on a :

$$\begin{aligned} d_{11} &= \mu_1 b_4 + \mu_2 b_5 + \mu_3 d_2 \\ d_{12} &= \mu_1 b_3 + \mu_2 b_4 + \mu_3 d_1. \end{aligned}$$

Pour calculer le reste des B -coefficients dans $W_1 W_2 E_1 A_1$ on reprend le calcul fait dans $A_1 E_1 U_1 G_1$.

En faisant le même raisonnement dans tous les autres micro-quadrilatères de $(Q_2 \setminus Q_1)$ on détermine complètement les B -coefficients dans Q_2 .

L'existence et l'unicité des B -coefficients sur Q_i pour tout i ($i = 1, \dots, I$) entraîne celles de s sur Q tout entier. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

COROLLAIRE 2 : Si τ détermine N_1 segments sur deux côtés opposés de Q et N_2 segments sur les deux autres côtés, alors la dimension de $P_2^1(Q)$ est :

$$N_0 = (N_1 + 2)(N_2 + 2) - 1.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème 2. La spline s est déterminée par interpolation de Lagrange avec $N_0 = (N_1 + 2)(N_2 + 2) - 1$ points d'interpolation.

4. NORME DE L'OPÉRATEUR D'INTERPOLATION

DÉFINITION 2 :

a) On appelle Π l'opérateur qui à f associe son interpolant $\Pi(f)$ appartenant à $P_2^1(Q)$.

b) N_0 étant la dimension de $P_2^1(Q)$, on appelle $\{L_k\}_{1 \leq k \leq N_0}$ les fonctions de base de Lagrange i.e. telles que $L_k(X_j) = \delta_{kj}$, où les $\{X_j\}_{1 \leq j \leq N_0}$ sont les points d'interpolation et δ_{kj} le symbole de Kronecker. On note

$$A_{N_0}(X) = \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)|, \quad X \in Q, \quad \text{la fonction de Lebesgue associée.}$$

Pour toute fonction f définie sur Q , on note : $\|f\|_Q = \sup_{X \in Q} |f(X)|$.

LEMME 4 : En posant :

$$\|\Pi\| = \sup \{ |\Pi(f)(X)|, \|f\|_Q \leq 1, X \in Q \}$$

$$\text{et} \quad \|A_{N_0}\|_Q = \sup_{X \in Q} |A_{N_0}(X)|$$

on a alors :

$$\|\Pi\| = \|A_{N_0}\|_Q.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \|\Pi\| &= \sup_{\|f\|_Q \leq 1} \|\Pi f\|_Q = \sup_{\substack{X \in Q \\ \|f\|_Q \leq 1}} \left| \sum_{k=1}^{N_0} L_k(X) f(X_k) \right| \\ &\leq \sup_{X \in Q} \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)| = \|A_{N_0}\|_Q. \end{aligned}$$

D'autre part, pour un $X_0 \in Q$ tel que $A_{N_0}(X_0) = \|A_{N_0}\|_Q$ et une fonction g définie sur Q par :

$$\begin{aligned} g(X_k) &= \text{signe } L_k(X_0) \quad (\text{pour } k = 1, \dots, N_0) \\ |g(X)| &\leq 1 \quad \text{pour } X \neq X_k. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \|A_{N_0}\|_Q &= \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X_0)| = \left| \sum_{k=1}^{N_0} L_k(X_0) g(X_k) \right| \\ &\leq \sup_{\|f\|_Q \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{N_0} L_k(X_0) f(X_k) \right| \leq \sup_{\substack{\|f\|_Q \leq 1 \\ X \in Q}} \left| \sum_{k=1}^{N_0} L_k(X) f(X_k) \right| = \|II\| \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Soit r un entier naturel fixé. Sur chaque triangle T de Q on considère les points $X_{r_1, r_2}(T)$ de coordonnées barycentriques

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r_1/r & 0 \leq r_1 \leq r \\ \lambda_2 &= r_2/r & \text{pour} \\ \lambda_3 &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \leq r_2 \leq r - r_1. \end{aligned}$$

Appelons $E_r(T)$ l'ensemble de ces points et $\chi_r = \bigcup_{T \in \tau} E_r(T)$. Pour tout $T \in \tau$, on a : $\text{Card } E_r(T) = (r + 1)(r + 2)/2$.

THÉORÈME 3 : Pour $k = 1, \dots, N_0$ et $T \in \tau$, on désigne par $\{a_i^k(T), i = 1 \dots 6\}$ les *B-coefficients* de L_k sur T .

En posant :

$$\begin{aligned} m_r &= \sup_{N_0} \left\{ |A_{N_0}(X)|, X \in \chi_r \right\} \\ M &= \sup \left\{ \sum_{k=1}^{N_0} |a_i^k(T)|, 1 \leq i \leq 6; T \in \tau \right\} \end{aligned}$$

on a alors :

$$m_r \leq \|II\| \leq M.$$

Preuve : La minoration étant évidente car $\|II\| = \|A_{N_0}\|_Q$ (lemme 4), il suffit de démontrer la majoration.

Soit $T \in \tau$ et $X \in T$ de coordonnées barycentriques $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ relativement à T .

Écrivons L_k dans la base de Bernstein de T :

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^6 a_i^k(T) \phi_i(\lambda) \quad \text{d'où}$$

$$\sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)| \leq \sum_{i=1}^6 \phi_i(\lambda) \sup_{1 \leq i \leq 6} \sum_{k=1}^{N_0} |a_i^k(T)|$$

or $\sum_{i=1}^6 \phi_i(\lambda) = 1$ (cf. 2.2) d'où en passant aux sup :

$$\sup_{T \in \tau} \sup_{X \in T} \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)| \leq \sup_{T \in \tau} \sup_{1 \leq i \leq 6} \sum_{k=1}^{N_0} |a_i^k(T)|.$$

Ainsi $\|II\| \leq M$.

5. NORME ET ERREUR D'INTERPOLATION DANS LE CAS OU Q EST UN CARRÉ

Soit N un entier naturel impair, Q est alors formé de N^2 micro-carrés tous identiques au carré central Q^1 (cf. fig. 5). Pour plus de commodité dans la suite, on choisit Q^N comme nouvelle notation de Q ; (les côtés de Q étant subdivisés en N segments égaux) et II_N l'opérateur d'interpolation associé. De la même manière on appelle Q^n ($1 \leq n \leq N$, n impair) les différents macro-carrés inclus dans Q^N : leurs côtés étant subdivisés en n segments égaux. (Q^1 étant le micro-carré central).

5.1. Majoration de $\|II_N\|$

THÉORÈME 4 :

- a) $\|II_1\| = 3$
- b) $\|II_N\| \leq 2N - 1$ pour N impair, $N \geq 3$.

Preuve : a) Soit f fonction définie sur Q^1 telle que $\|f\|_{Q^1} \leq 1$; appelons f_i ($1 \leq i \leq 8$) les valeurs de f aux points confondus avec b_i ($1 \leq i \leq 8$) (cf. fig. 5); d'après le lemme 1 on a :

$$b_i = f_i \quad (i \text{ impair})$$

d'où $|b_i| \leq 1$ et $b_i = 2f_i - (b_{i-1} + b_{i+1})/2$ (i pair)

d'où $|b_i| \leq 3$ ($b_9 = b_1$).

Ainsi d'après le lemme 3

$$\|II_1(f)\|_{Q^1} \leq 3.$$

Montrons que cette norme est égale à 3.

Soit f une fonction définie sur Q^1 vérifiant $f_i = -1$ (i impair) et $f_i = 1$ (i pair). On a alors

$$\begin{aligned} b_i &= -1 & (i \text{ impair}) \\ b_i &= 3 & (i \text{ pair}). \end{aligned}$$

En utilisant le corollaire 1, on obtient les autres B -coefficients de l'interpolant s dans Q^1 .

L'expression de l'interpolant dans chacun des triangles de Q^1 est donc

$$s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$$

d'où

$$s(0, 0, 1) = 3.$$

Par conséquent :

$$\|II_1(f)\|_{Q^1} = \|s\|_{Q^1} = 3.$$

b) Pour les majorations dans les autres micro-carrés, vu la symétrie de la figure, et d'après le lemme 3, il suffit de majorer les B -coefficients sur les bords de $B_1 B_1' C_1'' C_1$ (fig. 5) ; l'algorithme du paragraphe III donne :

$$m_3 = 2b_3 - b_2 \quad \text{d'où} \quad |m_3| \leq 2|b_3| + |b_2| \leq 5. \quad (1)$$

Les majorants des B -coefficients sur les bords de Q^n ($3 \leq n \leq N$, n impair) sont donnés par le lemme 2 d'où en particulier

$$|m_4| \leq 2.$$

On obtient des majorations analogues pour m_3' et m_4' . Les plus grands majorants se trouvent donc sur les axes $(X_i Y_i)$. ($i = 1, \dots, 4$). Vu la symétrie de la figure, il suffit de considérer $(X_1 Y_1)$ par exemple. Les B -coefficients de cet axe vérifient

$m_n = 2m_{n-1} - m_{n-2}$ ($n \geq 5$, n impair ; voir algorithme) or $|m_{n-1}| \leq 2$ (lemme 2) d'où

$$|m_n| \leq 4 + |m_{n-2}|. \quad (2)$$

On déduit alors de (1) et (2)

$$|m_n| \leq 2n - 1 \quad (\text{pour } n \geq 3, n \text{ impair})$$

et d'après le lemme 3 on conclut :

$$\|II_N\| \leq 2N - 1.$$

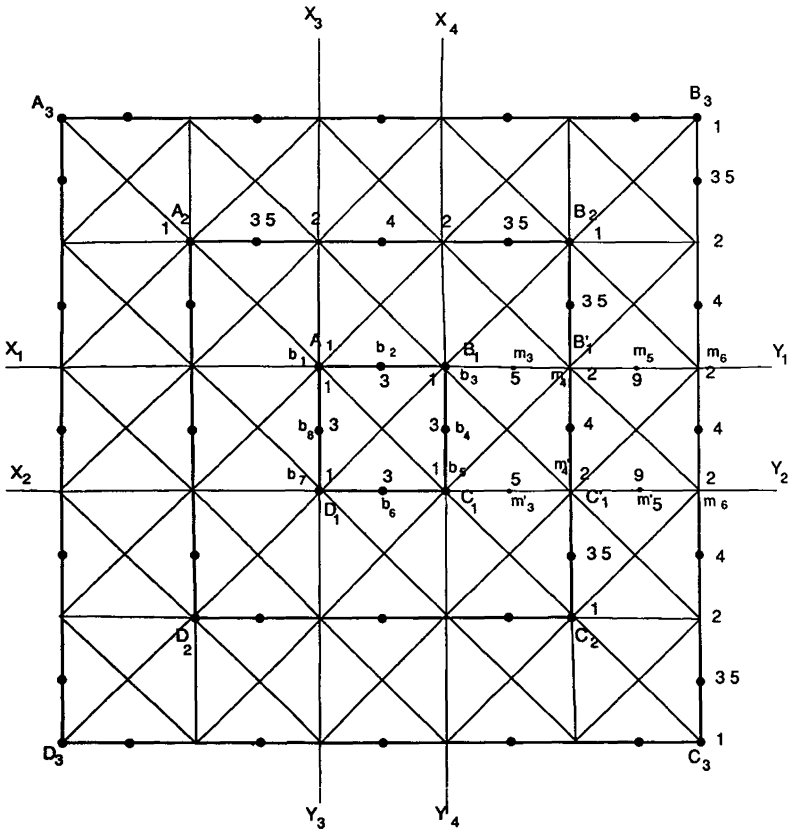


Figure 5. — Représentation de quelques majorants des B-coefficients dans Q^5 .

5.2. Erreur d'interpolation

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note $D^{kl} f(x, y) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y)$.

THÉORÈME 5 : N étant le nombre de segments égaux déterminés par τ sur les côtés de $Q^N = [a, b]^2$, on pose $h = 1/N$ et $\hat{Q}^N = [a - h/2, b + h/2]^2$. Si $f \in C^3(\hat{Q}^N)$ alors

$$\|f - \Pi_N(f)\|_{Q^N} \leq (c_1 M_3 + c_2 \hat{\omega}_{3,N}) \cdot h^2$$

avec : $c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{27}$; $c_2 = \frac{31}{12}$; $M_3 = \max_{k+l=3} \|D^{kl} f\|_{Q^N}$

$$\hat{\omega}_{3,N} = \max_{k+l=3} \sup_{\substack{\|X_1 - X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in Q^N}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)| .$$

Preuve : Supposons pour simplifier que Q^N est centré à l'origine. Soit $f \in C^3(\hat{Q}^N)$. Notons C_{ij} les micro-carrés de côté h inclus dans Q^N , centrés en $O_{ij} = (ih, jh)$ avec $-(N-1)/2 \leq i, j \leq (N-1)/2$; et \hat{C}_{ij} les carrés centrés en O_{ij} et de côtés $2h$. Dans [12] P. Sablonnière définit le quasi-interpolant :

$$S_2 f = \sum_{i,j} \left[f(O_{ij}) - \frac{1}{8} h^2 \Delta f(O_{ij}) \right] \cdot M_{ij}$$

(où Δf est le laplacien de f et M_{ij} la B -spline quadratique centrée en O_{ij}) et montre que

$$\|S_2 f - f\|_{C_{ij}} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{27} M_3(O_{ij}) + \frac{31}{24} \hat{\omega}_3^{i,j} \right) \cdot h^3$$

où

$$M_3(O_{ij}) = \max_{k+l=3} |D^{kl} f(O_{ij})|$$

et

$$\hat{\omega}_3^{i,j} = \max_{k+l=3} \sup_{\substack{\|X_1 - X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in \hat{C}_{ij}}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)|$$

d'où en posant

$$\hat{\omega}_{3,N} = \max_{k+l=3} \sup_{\substack{\|X_1 - X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in \hat{Q}^N}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)|$$

$$M_3 = \max_{k+l=3} \|D^{kl} f\|_{Q^N}; \quad c'_1 = \frac{\sqrt{3}}{27} \quad \text{et} \quad c'_2 = \frac{31}{24}.$$

On a :

$$\|S_2 f - f\|_{Q^N} \leq (c'_1 M_3 + c'_2 \hat{\omega}_{3,N}) \cdot h^3. \tag{1}$$

D'autre part $S_2 f$ étant une spline quadratique alors $\Pi_N(S_2 f) = S_2 f$ d'où

$$\Pi_N(f) - f = \Pi_N(f) - \Pi_N(S_2 f) + S_2 f - f$$

$$\|\Pi_N f - f\|_{Q^N} \leq (1 + \|\Pi_N\|) \|S_2 f - f\|_{Q^N}. \tag{2}$$

Le théorème 4 donne

$$\|\Pi_N\| \leq 2N - 1 \quad \text{i.e.} \quad \|\Pi_N\| \leq 2/h - 1. \tag{3}$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent

$$\| \Pi_N f - f \|_{Q^N} \leq [c_1 M_3 + c_2 \hat{\omega}_{3N}] \cdot h^2$$

avec

$$c_i = 2 c'_i \quad (i = 1, 2)$$

6 RESULTATS NUMERIQUES

6.1. Opérateur d'interpolation Π_N

Les résultats numériques suivants représentent la variation de m , et M en fonction de N . Les valeurs de m_r sont calculées avec $r = 10$ (cf théorème 3) on a ainsi 66 points dans chaque triangle

| | | | | | | | | | | |
|-------|---|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| N | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| m_r | 3 | 3 98 | 4 84 | 6 31 | 7 76 | 9 23 | 10 69 | 12 15 | 13 61 | 15 07 |
| M | 3 | 5 | 8 14 | 11 13 | 14 07 | 16 99 | 19 91 | 22 84 | 25 76 | 28 68 |

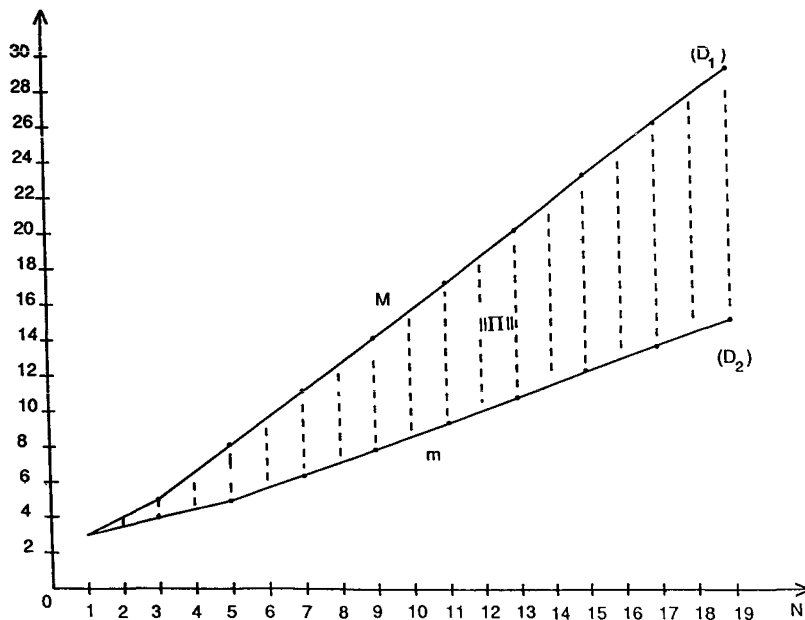


Figure 6. — Variation de m , et M en fonction de N .

D'après le théorème 3, la norme de l'opérateur se trouve dans la partie hachurée du plan, limitée par les droites D_1 et D_2 , $1 e 0 73 N + 1 16 \leq \|II_N\| \leq 1 47 N + 0 9$

6.2. Erreur d'interpolation et ordre de convergence

Appelons e_N l'erreur d'interpolation sur Q^N . Dans les exemples suivants on prend $Q^N = [-0 5, 0 5]^2$ et $e_N = \sup_{X \in X_r} |f(X) - II_N f(X)|$ avec $r = 10$

On désigne par α l'ordre de convergence calculé de la manière suivante

$$\alpha = \text{Ln}(e_N/e_{N'}) / \text{Ln}(N'/N) \quad \text{où } N' = 2N + 1$$

Les tableaux suivants représentent la variation de e_N et α en fonction de N

| N | $f(x, y) = \text{Ln}(2 + x + y)$ | | |
|----|----------------------------------|-----------------------|----------|
| | e_N | e_N | α |
| 1 | $9 33 \times 10^{-3}$ | $4 77 \times 10^{-4}$ | 2 7 |
| 3 | $4 77 \times 10^{-4}$ | $4 35 \times 10^{-5}$ | 2 82 |
| 5 | $1 15 \times 10^{-4}$ | $1 15 \times 10^{-5}$ | 2 91 |
| 7 | $4 35 \times 10^{-5}$ | $4 6 \times 10^{-6}$ | 2 96 |
| 9 | $2 08 \times 10^{-5}$ | $2 3 \times 10^{-6}$ | 2 97 |
| 11 | $1 15 \times 10^{-5}$ | $1 3 \times 10^{-6}$ | 2 97 |
| 13 | 7×10^{-6} | 8×10^{-7} | 2 99 |
| 15 | $4 6 \times 10^{-6}$ | 5×10^{-7} | 3 00 |
| 17 | $3 1 \times 10^{-6}$ | 4×10^{-7} | 3 00 |
| 19 | $2 3 \times 10^{-6}$ | 3×10^{-7} | 3 00 |

| N | $f(x, y) = x^2 y$ | | |
|----|-----------------------|-----------------------|----------|
| | e_N | e_N | α |
| 1 | $2 95 \times 10^{-2}$ | $1 09 \times 10^{-3}$ | 3 00 |
| 3 | $1 09 \times 10^{-3}$ | $8 61 \times 10^{-5}$ | 2 99 |
| 5 | $2 36 \times 10^{-4}$ | $2 26 \times 10^{-5}$ | 2 99 |
| 7 | $8 61 \times 10^{-5}$ | $8 7 \times 10^{-6}$ | 3 01 |
| 9 | $4 05 \times 10^{-5}$ | $4 5 \times 10^{-6}$ | 2 99 |
| 11 | $2 26 \times 10^{-5}$ | $2 4 \times 10^{-6}$ | 3 00 |
| 13 | $1 34 \times 10^{-5}$ | $1 5 \times 10^{-6}$ | 3 00 |
| 15 | $8 7 \times 10^{-6}$ | $1 0 \times 10^{-6}$ | 2 99 |
| 17 | 6×10^{-6} | 7×10^{-7} | 3 00 |
| 19 | $4 5 \times 10^{-6}$ | 5×10^{-7} | 2 99 |

| N | $f(x, y) = \sin(\pi(x + y))$ | | |
|-----|------------------------------|-----------------------|----------|
| | e_N | e_N | α |
| 1 | 5.22×10^{-2} | 1.69×10^{-2} | 1.07 |
| 3 | 1.69×10^{-2} | 8.97×10^{-4} | 3.46 |
| 5 | 2.95×10^{-3} | 2.03×10^{-4} | 3.39 |
| 7 | 8.97×10^{-4} | 7.62×10^{-5} | 3.25 |
| 9 | 3.9×10^{-4} | 3.66×10^{-5} | 3.16 |
| 11 | 2.03×10^{-4} | 2.04×10^{-5} | 3.11 |
| 13 | 1.19×10^{-4} | 1.25×10^{-5} | 3.10 |
| 15 | 7.62×10^{-5} | 8.2×10^{-6} | 3.05 |
| 17 | 5.17×10^{-5} | 5.7×10^{-6} | 3.07 |
| 19 | 3.66×10^{-5} | 4.1×10^{-6} | 3.04 |

| N | $f(x, y) = 1/(1.1 + x + y)$ | | |
|-----|-----------------------------|-----------------------|----------|
| | e_N | e_N | α |
| 1 | 2.63 | 1.02 | 0.86 |
| 3 | 1.02 | 2.85×10^{-1} | 1.49 |
| 5 | 5×10^{-1} | 1.27×10^{-1} | 1.73 |
| 7 | 2.85×10^{-1} | 6.65×10^{-2} | 1.92 |
| 9 | 1.85×10^{-1} | 3.92×10^{-2} | 2.07 |
| 11 | 1.27×10^{-1} | 2.51×10^{-2} | 2.19 |
| 13 | 9.06×10^{-2} | 1.69×10^{-2} | 2.30 |
| 15 | 6.65×10^{-2} | 1.19×10^{-2} | 2.36 |
| 17 | 5.05×10^{-2} | 8.66×10^{-3} | 2.44 |
| 19 | 3.92×10^{-2} | 6.49×10^{-3} | 2.50 |

7. CONCLUSION GÉNÉRALE

La simplicité de l'algorithme est un point important de ce travail. En effet sur les côtés des macro-quadrilatères le calcul des B -coefficients se fait uniquement par interpolation à une variable (résolution d'un système tridiagonal).

Les B -coefficients se trouvant à l'intérieur de chaque micro-quadrilatère sont calculés à l'aide d'opérations élémentaires.

Notons que ce calcul se généralise naturellement au cas où les points d'interpolation ne coïncident pas forcément avec les milieux des segments portés par la frontière des macro-quadrilatères, mais se trouvent à une distance inférieure à $(\sqrt{2} - 1)/2$ de ces derniers [3].

Il est à remarquer que dans le cas où Q est un carré, les résultats numériques donnent une meilleure majoration de la norme de l'opérateur

d'interpolation ($\|I_N\| \leq 1,47N + 0,9$ au lieu de $\|I_N\| \leq 2N - 1$) ; d'autre part ils semblent indiquer que l'erreur d'interpolation serait en $O(h^3)$. Le tracé très voisin des courbes de niveau de quelques fonctions et de leurs interpolants laisse penser que l'erreur est suffisamment faible en pratique [15].

RÉFÉRENCES

- [1] C. K. CHUI, *Bivariate quadratic splines on criss cross triangulations*, Proc. First Army Conf. dans Appl. Math. Comp. 1 (1984), 877-882.
- [2] C. K. CHUI and R. H. WANG, *On a bivariate B-spline basis*, Scientia Sinica (Series A) Vol. 27, n° 11 (1984) 1129-1142.
- [3] S. DEMKO, *Interpolation by quadratic splines*, J. Approx. Theory 23 (1978) 392-400.
- [4] G. FARIN, *Triangular Bernstein-Bézier patches*, Comput. Aided Geom. Design 3 (1986) 83-127.
- [5] G. FARIN, *Piecewise triangular C^1 surface strips*, Comput. Aided Geom. Design 18 (1) (1986) 45-47.
- [6] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic Press, New York (1988).
- [7] R. Franke, L. L. SCHUMAKER, *A bibliography of multivariate approximation*, dans Topics in Multivariate Approximation, C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras ed., Academic Press, New York (1987) 275-335.
- [8] G. HEINDL, *Interpolation and approximation by piecewise quadratic C^1 functions of two variables*, I.S.N.M. 51, Birkhauser Verlag, Basel (1979) 146-161.
- [9] W. J. KAMMERER, W. REDDIEN, R. S. VARGA, *Quadratic interpolatory splines*, Numer. Math. 22 (1974) 241-259.
- [10] M. J. D. POWELL, *Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting*, Software for Numerical Mathematics, D. J. Evans Ed. Academic Press, New York (1974) 253-272.
- [11] M. J. D. POWELL and M. A. SABIN, *Piecewise quadratic approximations on triangles*, dans ACM trans. Math. Software 3 (1972) 316-325.
- [12] P. SABLONNIÈRE, *Bases de Bernstein et approximants splines*, Thèse de Doctorat ès-sciences, Université de Lille (juin 1982).
- [13] P. SABLONNIÈRE, *Interpolation by quadratic splines on triangles and squares*, Computers in Industry 3 (1982) 45-52.
- [14] P. SABLONNIÈRE, *Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximant*, Comput. Aided Geom. Design 2 (1985) 29-36.
- [15] F. ZEDEK, *Interpolation sur un domaine carré par des splines quadratiques à 2 variables*, Thèse de Doctorat 3^e cycle, Université de Lille (1985).
- [16] P. B. ZWART, *Multivariate splines with non degenerate partitions*, dans SIAM J. Num. Anal. 10 (1973) 665-673.