

YOUCEF AMIRAT

**Écoulements en milieu poreux n'obéissant  
pas à la loi de Darcy**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 25, n° 3 (1991), p. 273-306

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1991\\_\\_25\\_3\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1991__25_3_273_0)

© AFCET, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ÉCOULEMENTS EN MILIEU POREUX  
 N'OBÉISSANT PAS A LA LOI DE DARCY (\*)**

Youcef AMIRAT <sup>(1)</sup>

Communiqué par R. TEMAN

Résumé. — *L'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux, qu'on suppose régi par une loi quadratique de perte de charge, est modélisé en régime transitoire par un problème parabolique non linéaire dégénéré. On établit des résultats d'existence, d'unicité et de régularité. On étudie ensuite le comportement limite des solutions lorsque le paramètre de résistance inertielle tend vers zéro.*

Abstract. — *This paper deals with the study of a transient gas flow through a porous medium, with a quadratic pressure drop law, governed by a nonlinear degenerate parabolic equation. Existence, uniqueness and regularity results are established. The asymptotic behaviour of the solutions when the inertial flow resistance tends to zero is also considered.*

**I. INTRODUCTION**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière régulière  $\Gamma$ , et  $\nu$  la normale unitaire sortante de  $\Omega$ . On considère le problème parabolique non linéaire dégénéré :

$$(1.1) \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[ ,$$

avec 
$$F(v) = K \frac{(1 + \sigma |v|)^{1/2} - 1}{\sigma |v|} v, \quad v \in \mathbb{R}^d ,$$

$$(1.2) \quad F(\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[ ,$$

$$(1.3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega ,$$

où  $\phi$ ,  $K$ ,  $\sigma$ ,  $u_0$  sont des fonctions données dans  $\Omega$  et  $g$  est une fonction donnée sur  $\Sigma$ . Ce problème modélise, dans certaines conditions, l'écoule-

(\*) Reçu en mai 1988, révisé en avril 1990.

(<sup>1</sup>) INRIA Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex France.

ment d'un gaz à travers un milieu poreux, en régime visco-inertiel,  $u$  représentant le carré de la pression. Les lois de base pour l'établissement du modèle sont [1] :

— la loi de conservation de la masse :

$$(1.4) \quad \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0 \quad \text{dans } Q,$$

— la loi quadratique de perte de charge ou loi de Forchheimer, généralisant celle de Darcy (cf. [6], [10], [13], [14]) :

$$(1.5) \quad -\rho \nabla p = \alpha u q + \beta |q| q \quad \text{dans } Q,$$

— la loi d'état des gaz parfaits isothermes :

$$(1.6) \quad \rho = b p, \quad b \text{ constante.}$$

Dans (1.4), (1.5), (1.6),  $\phi$  désigne la porosité de la roche,  $\rho$  la masse spécifique du fluide,  $p$  la pression,  $q$  le débit massique unitaire,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide,  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le facteur de résistance visqueuse (resp. inertielle). Avec ces notations,  $K = \frac{1}{\alpha \mu}$ ,  $\sigma = 2 b \beta K^2$ . La condition (1.2) exprime que le flux de masse sur  $\Gamma$  est imposé et (1.3) résulte de la donnée de la pression à l'instant initial. Si l'on prend une loi d'évolution thermodynamique adiabatique,  $\rho = b p^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , on obtient que  $u = p^{\gamma+1}$  est solution positive de :

$$(1.7) \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{r-2} u) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans } Q,$$

$$\text{avec} \quad r = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}, \quad K = \frac{1}{\alpha \mu (\gamma+1)}, \quad \sigma = b (\gamma+1) \beta K^2.$$

Remarquons que si la fonction  $\sigma$  est nulle alors (1.7) coïncide avec l'équation classique des milieux poreux. L'équation des milieux poreux et, plus généralement, les équations paraboliques non linéaires dégénérées du type  $u_t - \Delta \phi(u) = 0$ , ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. par exemple [2], [4], [5] et la bibliographie de ces travaux). Nous nous intéressons ici au cas où  $\sigma$  est positive, cas dont l'étude présente un intérêt pratique dans l'exploitation des gisements de gaz. Les problèmes inhérents à ce type d'écoulement ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux en simulation numérique (cf. [8], [9], [11], [15], [17] entre autres).

L'objet de cet article est l'étude mathématique du problème (1.1), (1.2), (1.3). Moyennant des hypothèses convenables sur les données, on montre l'existence d'une solution en utilisant une technique de semi-discrétisation en temps, développée dans [7]. On établit des résultats de régularité,

d'unicité et de positivité. On présente ensuite une extension de ces résultats aux cas suivants : affaiblissement des hypothèses sur les données, écoulements compressibles adiabatiques. Le dernier paragraphe concerne l'étude du comportement limite des solutions  $u_\sigma$  du problème (1.1), (1.2), (1.3), lorsque le paramètre  $\sigma$  tend vers 0. On établit un résultat de convergence de  $u_\sigma$  vers la solution de l'équation des milieux poreux. Le champ du gradient étant localement coercif, on obtient ce résultat à l'aide d'estimations a priori qui tiennent compte du changement de comportement de la fonction  $F$  au voisinage de 0 et de l'infini. Une partie de ces résultats est annoncée dans [1]. L'analyse numérique du problème (1.1), (1.2), (1.3) fera l'objet d'une publication ultérieure.

## II. RÉSULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITÉ ET DE RÉGULARITÉ POUR LE PROBLÈME (P)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , de frontière régulière  $\Gamma$ , de vecteur normal extérieur  $\nu$ , et  $]0, T[$  l'intervalle de temps d'étude du phénomène.

Il s'agit de trouver  $u$  solution de :

$$(P) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) &= 0 & \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[ , \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{dans } \Omega , \\ F(\nabla u) \cdot \nu &= g & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times ]0, T[ , \end{aligned}$$

où :

$$F(v) = K \frac{(1 + \sigma |v|)^{1/2} - 1}{\sigma |v|} v, \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

$\phi$ ,  $K$ ,  $\sigma$  sont dans des fonctions de  $L^\infty(\Omega)$ , vérifiant :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 0 < \phi_- \leq \phi(x) \leq \phi_+ & \quad \text{p.p. dans } \Omega , \\ 0 < K_- \leq K(x) \leq K_+ & \quad \text{p.p. dans } \Omega , \\ 0 < \sigma_- \leq \sigma(x) \leq \sigma_+ & \quad \text{p.p. dans } \Omega . \end{aligned}$$

Nous utilisons les méthodes développées dans [7] et [12]. Posons  $V = W^{1,3/2}(\Omega)$  et notons  $A$  l'opérateur non linéaire de  $V$  dans  $V'$  défini par :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \forall u, v \in V \\ (Au, v) = \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx . \end{aligned}$$

$B$  est l'opérateur non linéaire de  $L^{3/2}(\Omega)$  dans  $L^3(\Omega)$  défini par :

$$(2.3) \quad Bu = \phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} .$$

Supposons :

$$(2.4) \quad u_0 \in V ,$$

$$(2.5) \quad g \in W^{1,3}(0, T; W^{-1/3,3}(\Gamma)) ,$$

où  $W^{-1/3,3}(\Gamma)$  est le dual de  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ , et  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$  est l'espace parcouru par  $v|_{\Gamma}$  lorsque  $v$  parcourt  $W^{1,3/2}(\Omega)$ .

On définit  $f \in L^3(0, T; V')$  par :

$$(2.6) \quad (f(t), v) = (g(t), v|_{\Gamma})_{W^{-1/3,3}(\Gamma), W^{1/3,3/2}(\Gamma)} .$$

(2.5) implique  $\frac{df}{dt} \in L^3(0, T; V')$ , donc  $f \in C^0([0, T]; V')$ .

On considère alors le problème non linéaire suivant :

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} (Bu) + Au = f \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V') ,$$

$$(2.8) \quad u(0) = u_0 .$$

## II.1. Existence d'une solution faible

Nous allons établir le résultat suivant.

**THÉORÈME 2.1 :** *Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction  $u$  telle que :*

$$(2.9) \quad u \in L^\infty(0, T; V) ,$$

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^\infty(0, T; V') ,$$

et  $u$  vérifiant (2.7), (2.8).

*Remarque 2.1 :* La condition (2.8) a bien un sens car il résulte de (2.9) et (2.10) que  $Bu \in C^0([0, T]; V')$ .

*Remarque 2.2 :* La démonstration que nous proposons ici est inspirée des techniques de [7]. Elle consiste en :

- une semi-discrétisation en temps de (2.7), (2.8) par un schéma implicite,
- l'obtention d'estimations a priori (cf. Remarque (2.3) ci-après),
- le passage à la limite.

*Remarque 2.3 :* Multiplions formellement (2.7) par  $u$  (resp.  $\frac{du}{dt}$ ) ; il vient (resp.) :

$$(2.11) \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi |u|^{3/2} dx + \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma |\nabla u|)^{1/2} - 1}{\sigma} |\nabla u| dx = (f, u),$$

$$\frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx + \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla \left( \frac{du}{dt} \right) dx = \left( f, \frac{du}{dt} \right);$$

mais,  $\left( f, \frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (f, u) - \left( \frac{df}{dt}, u \right)$ , et

$$\int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla \left( \frac{du}{dt} \right) dx = \frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma |\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u|}{\sigma} dx \right];$$

donc

$$(2.12) \quad \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx + \frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma |\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u|}{\sigma} dx \right] = \frac{d}{dt} (f, u) - \left( \frac{df}{dt}, u \right).$$

Les estimations a priori qui suivent seront calculées sur (2.11) et (2.12).

Explicitons d'abord quelques propriétés simples des opérateurs  $A$  et  $B$ .

**PROPOSITION 2.1 :**

i) Les opérateurs  $A$  et  $B$  définis respectivement par (2.2) et (2.3) sont haldériens d'ordre 1/2 et monotones.

ii) Les fonctionnelles  $J_A$  et  $J_B$  définies respectivement sur  $V$  et  $L^{3/2}(\Omega)$  par :

$$(2.13) \quad J_A(v) = \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma |\nabla v|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla v|}{\sigma} dx,$$

$$(2.14) \quad J_B(v) = \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |v|^{3/2} dx,$$

sont convexes, Fréchet différentiables et telles que :

$$J'_A = A, \quad J'_B = B.$$

De plus,

$$(2.15) \quad J_A(v) \geq C_1 \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx - C_2 \quad \forall v \in V,$$

$C_1$  et  $C_2$  constantes strictement positives,

$$(2.16) \quad J_B(v) \geq C_3 \int_{\Omega} |v|^{3/2} dx \quad \forall v \in L^{3/2}(\Omega),$$

$C_3$  constante strictement positive.

La démonstration utilise le lemme suivant (cf. [1]).

LEMME 2.1 : L'application  $F$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  définie par :

$$F(v) = \frac{(1 + |v|)^{1/2} - 1}{|v|} v,$$

est holdérienne d'ordre 1/2.

Démonstration de la proposition 2.1 : Nous la donnons seulement pour  $A$  (la preuve est immédiate pour  $B$ ).

Point (i) : Soient  $u_1, u_2 \in V$ . On écrit :

$$(Au_1 - Au_2, v) = \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} (F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)) \cdot \nabla v dx,$$

alors, grâce au lemme 2.1 et (2.1),

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{1/2} |\nabla v| dx, \quad C \text{ constante}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leq C \|u_1 - u_2\|_V^{1/2} \|v\|_V,$$

c'est-à-dire  $A$  est holdérien d'ordre 1/2. Pour prouver que  $A$  est monotone, on écrit :

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} |F(\nabla u_1)| |\nabla u_1| dx + \int_{\Omega} |F(\nabla u_2)| |\nabla u_2| dx \\ &\quad - \int_{\Omega} F(\nabla u_1) \cdot \nabla u_2 dx - \int_{\Omega} F(\nabla u_2) \cdot \nabla u_1 dx, \end{aligned}$$

d'où

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq \int_{\Omega} (|F(\nabla u_1)| - |F(\nabla u_2)|)(|\nabla u_1| - |\nabla u_2|) dx,$$

qui est positif car  $x \rightarrow (1 + x)^{1/2}$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Point (ii)* : Un calcul facile montre que  $J_A$  est différentiable au sens de Gateaux, de différentielle  $J'_A = A$  ; la monotonie et la continuité de  $A$  (point (i)) prouvent alors que  $J_A$  est convexe et Fréchet différentiable.

Soit maintenant  $v \in V$ . On a, grâce à (2.1),

$$J_A(v) \geq C'_1 \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx - C'_2 \int_{\Omega} |\nabla v| dx,$$

puis, en appliquant l'inégalité de Young :

$$\forall \eta > 0, \exists C_{\eta} > 0, \text{ tel que,}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla v| dx \leq \eta \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx + C_{\eta}(\text{mes } \Omega),$$

avec  $\eta$  convenablement choisi, on obtient l'inégalité (2.15).

#### *Démonstration du Théorème 1*

##### *a) Construction du problème approché*

Nous introduisons les notations suivantes :

$N$  est un entier destiné à tendre vers l'infini et  $h = \frac{T}{N}$ . Si  $a = (a^0, \dots, a^N) \in E^{N+1}$ , où  $E$  est un espace de Banach,  $\Pi_h(a)$  est la fonction étagée définie par :

$$\begin{aligned} \Pi_h(a)(t) &= a^{n+1} \quad \text{si } nh < t \leq (n+1)h, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ \Pi_h(a)(0) &= a_0. \end{aligned}$$

$\Lambda_h(a)$  est la fonction définie sur  $[0, T]$ , linéaire sur  $[nh, (n+1)h]$  avec :

$$\Lambda_h(a)(nh) = a^n, \quad n = 0, \dots, N,$$

et

$$D_h \Pi_h(a) = \frac{d}{dt} \Lambda_h(a).$$

On considère le problème discrétisé suivant :

$$(2.17) \quad u_h^0 = u_0,$$

$$(2.18) \quad \frac{1}{h} (B u_h^{n+1} - B u_h^n, v) + (A u_h^{n+1}, v) = (f_h^n, v) \quad \forall v \in V,$$

avec  $f_h^n = \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} f(t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$



Ce problème admet une solution unique  $u_h = (u_h^0, \dots, u_h^N) \in V^{N+1}$ . En effet, la fonction  $J_0$  de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$J_0(v) = \frac{1}{h} J_B(v) + J_A(v) - (f_h^0, v) - \frac{1}{h} (Bu_h^0, v),$$

( $J_A$  et  $J_B$  étant définies respectivement par (2.13), (2.14)) est convexe, et même strictement puisque  $J_B$  l'est, continue, tendant vers l'infini à l'infini sur  $V$  (grâce à (2.15), (2.16)), donc admet un minimum unique en  $u^*$  et  $J_0(u^*) = 0$ . On obtient ainsi l'existence et l'unicité de  $u_h^1$  dans (2.18), puis par récurrence celle de  $u_h^n$ ,  $n = 2, \dots, N$ .

b) *Estimations a priori*

b.1) Prenons dans (2.18)  $v = u_h^{n+1}$ ; il vient :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} dx + (Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) = (f_h^n, u_h^{n+1}).$$

Utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\Omega} |Bu_h^n u_h^{n+1}| dx \leq \int_{\Omega} \phi |u_h^n|^{1/2} |u_h^{n+1}| dx \leq \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u_h^n|^{3/2} dx,$$

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} dx \geq C_4 \left[ \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right],$$

avec  $C_4 = \frac{1}{3} \phi_-$ . D'autre part,

$$|(f_h^n, u_h^{n+1})| \leq \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_V \|u_h^{n+1}\|_V dt;$$

on en déduit :

$$(2.20) \quad \forall \eta > 0, \exists C_{\eta} > 0, \text{ tel que, } |(f_h^n, u_h^{n+1})| \leq \eta \|u_h^{n+1}\|_V^{3/2} + \frac{C_{\eta}}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_V^3 dt.$$

Les inégalités (2.19), (2.20) et l'inégalité :

$$(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) \geq C_1' \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx - C_2' \quad (\text{conséquence de (2.15)})$$

impliquent :

$$\begin{aligned} \frac{C_4}{h} \left[ \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right] + C_1 \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx &\leq \\ &\leq \eta h \|u_h^{n+1}\|_V^{3/2} + \frac{C_{\eta}}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_V^3 dt + C'_2, \end{aligned}$$

d'où, en choisissant  $\eta$  convenablement,

$$(2.21) \quad \frac{C_4}{h} \left[ \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right] + C_5 \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \\ \eta \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + \frac{C_{\eta}}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_V^3 dt + C'_2,$$

$C_5$  constante strictement positive, indépendante de  $h$  et  $n$ .

Multipliant maintenant (2.21) par  $h$  et sommant de 0 à  $N-1$ , il vient :

$$\begin{aligned} C_4 \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx + h C_5 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx &\leq \\ \eta h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + C_{\eta} \int_0^T \|f(t)\|_V^3 dt + T C'_2 + C_4 \int_{\Omega} |u_0|^{3/2} dx, \end{aligned}$$

d'où :

$$(2.22) \quad \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq C_6 + h C_7 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx,$$

$$(2.23) \quad h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq C_6 + h C_7 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx,$$

$C_6$  et  $C_7$  constantes indépendantes de  $h$  et  $n$ .

De (2.22) on déduit :

$$\int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq \text{constante},$$

puis, de (2.23),

$$h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \text{constante}.$$

Finalement :

$$(2.24) \quad \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq \text{constante},$$

$$(2.25) \quad h \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_V^{3/2} \leq \text{constante}.$$

b.2) Prenons dans (2.18)  $v = u_h^{n+1} - u_h^n$ ; il vient :

$$(2.26) \quad \frac{1}{h} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) + (Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n) \\ = (f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n).$$

Négligeant le premier terme qui est positif, et tenant compte de :

$$(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n) \geq J_A(u_h^{n+1}) - J_A(u_h^n) \quad (J_A \text{ convexe}),$$

on obtient en sommant (2.26) de 0 à  $N - 1$ ,

$$J_A(u_h^N) - J_A(u_0) \leq \sum_{n=0}^{N-1} (f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) = \\ = (f_h^{N-1}, u_h^N) - (f_h^0, u_0) - \sum_{n=1}^{N-1} (f_h^n - f_h^{n-1}, u_h^n),$$

d'où, avec l'inégalité de Young et (2.25),

$$J_A(u_h^N) \leq C_8 + \eta \|u_h^N\|_V^{3/2},$$

$C_8$  constante indépendante de  $h$  et  $n$ .

Utilisant maintenant (2.15) et (2.24), on obtient (avec  $\eta$  convenablement choisi) :

$$(2.27) \quad \|u_h^N\|_V \leq \text{constante},$$

et de (2.18), il résulte alors :

$$(2.28) \quad \frac{1}{h} \|Bu_h^{n+1} - Bu_h^n\|_{V'} \leq \text{constante}.$$

b.3) Soit  $\psi_h$  la fonction numérique définie sur  $[0, T]$  par :

$$\psi_h(t) = \int_{\Omega} |\Lambda_h(u_h)(t)|^{3/2} dx.$$

D'après (2.24),  $\psi_h$  est uniformément bornée. De plus, (2.21) et (2.24) impliquent :

$$\frac{1}{h} (\psi_h(nh + h) - \psi_h(nh)) \leq \text{constante},$$

et en prenant  $v = u_h^n$  dans (2.18), on obtient grâce à (2.27) :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^n - Bu_h^{n+1}) u_h^n dx \leq \text{constante},$$

d'où :

$$\frac{1}{h} (\psi_h(nh) - \psi_h(nh + h)) \leq \text{constante}.$$

Par conséquent :

$$(2.29) \quad \left| \frac{1}{h} (\psi_h(nh + h) - \psi_h(nh)) \right| \leq \text{constante}.$$

### c) Passage à la limite

Des estimations (2.27), (2.28), (2.29) on déduit qu'on peut extraire des sous suites (encore indexées par  $h$ ) telles que :

$$\begin{aligned} \Pi_h(u_h) &\rightarrow u && \text{dans } L^\infty(0, T; V) \text{ faible } *, \\ \Pi_h(Bu_h) &\rightarrow v && \text{dans } L^\infty(0, T; L^3) \text{ faible } *, \\ D_h \Pi_h(Bu_h) &\rightarrow \frac{dv}{dt} && \text{dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible } *, \\ \Pi_h(Au_h) &\rightarrow \chi && \text{dans } L^\infty(0, T; V') \text{ faible } *, \\ \psi_h &\rightarrow \psi && \text{dans } C^0([0, T]; \mathbb{R}); \end{aligned}$$

$$\text{(ainsi } \psi(0) = \int_{\Omega} |u_0|^{3/2} dx, \psi(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx).$$

En reprenant la démonstration de [7], on obtient :

$$v = Bu, \frac{d}{dt} (Bu) + \chi = f \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V'), \chi = Au;$$

ce qui termine la démonstration du théorème 2.1.

## II.2. Régularité de la solution faible

Une estimation a priori supplémentaire va nous permettre d'établir le résultat de régularité suivant :

PROPOSITION 2.2 : Si  $u$  est la solution précédemment trouvée, alors :

$$(2.30) \quad u \in C^0([0, T]; L^{3/2}(\Omega)),$$

$$(2.31) \quad |u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q).$$

*Démonstration* : On considère la suite  $(u_h^n)$  définie par (2.17), (2.18). D'après (2.26) et l'estimation (2.27),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n)(u_h^{n+1} - u_h^n) dx \leq \text{constante},$$

d'où, avec (2.1),

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left( \frac{u_h^{n+1}}{\sqrt{|u_h^{n+1}|}} - \frac{u_h^n}{\sqrt{|u_h^n|}} \right) (u_h^{n+1} - u_h^n) dx \leq \text{constante} .$$

Utilisant l'inégalité dans  $\mathbb{R}$  :

$$\frac{|x-y|^2}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leq \left( \frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{y}{\sqrt{|y|}} \right) (x-y) ,$$

on obtient :

$$(2.32) \quad \sum_{n=0}^{N-1} h \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{|u_h^{n+1}|} + \sqrt{|u_h^n|}} \left[ \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{h} \right]^2 dx \leq \text{constante} .$$

Soit  $w_h$  la fonction étagée de  $[0, T]$  dans  $L^3(\Omega)$  définie par :

$$w_h(t) = |u_h^{n+1}|^{1/2} + |u_h^n|^{1/2} \quad \text{si } nh < t \leq (n+1)h, n = 0, \dots, N-1 ,$$

$$w_h(0) = |u_h^1|^{1/2} + |u_0|^{1/2} .$$

Posons :

$$s_h = \frac{1}{w_h^{1/2}} D_h \Pi_h(u_h) .$$

D'après (2.32) (resp. (2.27))  $s_h$  (resp.  $w_h$ ) est bornée dans  $L^2(Q)$  (resp.  $L^3(Q)$ ). On en déduit, avec l'inégalité suivante :

$$\int_0^T \left( \int_{\Omega} |w_h|^{3/4} |s_h|^{3/2} dx \right) dt \leq \left( \int_0^T \|w_h\|_{L^3(\Omega)}^3 \right)^{1/4} \left( \int_0^T \|s_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{3/4} ,$$

$D_h \Pi_h(u_h)$  est bornée dans  $L^{3/2}(Q)$ .

Appliquant le théorème d'Ascoli à la suite  $\Lambda_h(u_h)$ , on a pour une suite extraire :

$$\Lambda_h(u_h) \quad \text{converge vers } u \quad \text{dans } L^{3/2}(Q) ,$$

$$\frac{d}{dt} \Lambda_h(u_h) \quad \text{converge vers } \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^{3/2}(Q) \text{ faible} ,$$

d'où (2.30). De la convergence de  $\Pi_h(u_h)$  vers  $u$  dans  $L^{3/2}(Q)$ , on déduit

$$w_h \quad \text{converge vers } 2|u|^{1/2} \quad \text{dans } L^3(Q) ,$$

$$w_h^{1/2} \quad \text{converge vers } \sqrt{2}|u|^{1/4} \quad \text{dans } L^6(Q) ,$$

Alors, si  $s$  est la limite (dans  $L^2(Q)$  faible) d'une suite extraire de  $s_h$ , on a :

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} |u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q).$$

*Remarque 2.4 :* On vient aussi de montrer que  $\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(Q)$ . Notons qu'on peut déduire ce résultat de (2.31), (2.9) et de l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} dx dt &= \int_Q (|u|^{3/8}) \left( \frac{1}{|u|^{3/8}} \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} \right) dx dt \leq \\ &\leq \left( \int_Q |u|^{3/2} dx dt \right)^{1/4} \left( \int_Q \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx dt \right)^{3/4} \end{aligned}$$

### II.3. Un résultat d'unicité

On a un résultat d'unicité dans une classe de fonctions régulières, donné par le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.2 :** *Il n'existe, au plus, qu'une solution de (2.7), (2.8), possédant la régularité :*

$$(2.33) \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^1(Q).$$

*Démonstration :* Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux fonctions vérifiant (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) et (2.33). On a :

$$(2.34) \quad \frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) + Au_1 - Au_2 = 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V').$$

Soit pour  $\varepsilon > 0$ ,  $u_\varepsilon = \text{sign}_\varepsilon (u_1 - u_2)$ , où  $\text{sign}_\varepsilon$  est la régularisée de la fonction  $\text{sign}$  :

$$\begin{aligned} \text{sign}(y) = 1 & \quad \text{si } y > 0, & \text{sign}_\varepsilon(y) = 1 & \quad \text{si } y > \varepsilon, \\ \text{sign}(y) = -1 & \quad \text{si } y < 0, & \text{sign}_\varepsilon(y) = y/\varepsilon & \quad \text{si } |y| \leq \varepsilon, \\ & & \text{sign}_\varepsilon(y) = -1 & \quad \text{si } y < -\varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien :  $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V \cap L^\infty(\Omega))$ , et

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_\varepsilon) &= \int_{\Omega} (F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)) \cdot \nabla (u_1 - u_2) \times \\ &\quad \times (\text{sign}'_\varepsilon (u_1 - u_2)) dx \geq 0, \end{aligned}$$

d'où, avec (2.34),

$$\int_0^{T'} \left( \frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2), u_\varepsilon \right) dt \leq 0 \quad \forall T', 0 < T' \leq T,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) \right) u_\varepsilon dx dt \leq 0.$$

On fait maintenant tendre  $\varepsilon$  vers 0 ; on obtient :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) \right) \text{sign} (u_1 - u_2) dx dt \leq 0,$$

ou encore, puisque  $B$  est monotone,

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \left( \frac{d}{dt} (Bu_1 - Bu_2) \right) \text{sign} (Bu_1 - Bu_2) dx dt \leq 0$$

or, pour  $w \in L^1(0, T'; L^1(\Omega))$  tel que  $\frac{dw}{dt} \in L^1(0, T'; L^1(\Omega))$  on montre (par régularisation et passage à la limite) :

$$\int_0^{T'} \int_\Omega \frac{dw}{dt} \text{sign} (w) dx dt = \int_\Omega |w(x, T')| dx - \int_\Omega |w(x, 0)| dx.$$

Ainsi .

$$\int_0^{T'} \int_\Omega |Bu_1(x, T') - Bu_2(x, T')| dx \leq 0 \quad \forall T', 0 < T' \leq T,$$

d'où  $Bu_1 = Bu_2$  qui implique  $u_1 = u_2$ , car  $\phi > 0$  et  $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{|x|}}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**II.4. Un cas d'existence et d'unicité d'une solution positive du problème (P)**

Établissons d'abord un lemme qui permet de donner un sens à la condition aux limites du problème (P) (dans  $C^0([0, T]; W^{-1/3, 3}(\Gamma))$ ) lorsque la solution de (2.7), (2.8) vérifie  $\frac{d}{dt} (Bu) \in L^2(Q)$ . On suppose ici que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \leq 6$ , dont la frontière  $\Gamma$  est de classe  $C^2$  par morceaux.

LEMME 2.2 : Soit  $E = (q \in (L^3(\Omega))^d; \operatorname{div} q \in L^2(\Omega))$ , muni de la norme  $\|q\|_E = \|q\|_{(L^3(\Omega))^d} + \|\operatorname{div} q\|_{L^2(\Omega)}$ , qui en fait un espace de Banach. Pour  $q \in E$ , on peut définir de manière unique la trace normale  $T_\nu q$  de  $q$  sur  $\Gamma$  par :

$$(2.35) \quad T_\nu q \in W^{-1/3,3}(\Gamma),$$

$$(T_\nu q, v|_\Gamma) = \int_\Omega q \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \quad \forall v \in V.$$

L'application  $T_\nu$  est linéaire continue de  $E$  dans  $W^{-1/3,3}(\Gamma)$  et sa restriction à  $(C^1(\bar{\Omega}))^d$  coïncide avec la trace normale au sens usuel.

Démonstration : Soit  $\phi \in W^{1/3,3/2}(\Gamma)$  ; on peut associer à  $\phi$  un relèvement  $v \in V$ , vérifiant  $v|_\Gamma = \phi$  et tel que l'application  $\phi \rightarrow v$  soit linéaire continue de  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$  dans  $V$ . On vérifie que, pour  $q$  et  $\phi$  fixés, la quantité :  $\int_\Omega q \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \, dx$  (qui a un sens compte tenu de l'injection de Sobolev  $V \subset L^2(\Omega)$  lorsque  $d \leq 6$ ) est indépendante du choix du relèvement ; en effet, si  $v_1, v_2 \in V$  et  $v_1|_\Gamma = v_2|_\Gamma = \phi$ , alors  $v_1 - v_2 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$  et le résultat est immédiat par densité de  $D(\Omega)$  dans  $W_0^{1,3/2}(\Omega)$ . Donc  $\phi \rightarrow \int_\Omega q \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \, dx$  est une forme linéaire continue sur  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$  et par conséquent,

$$\int_\Omega q \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \, dx = (T_\nu q, \phi), \quad T_\nu q \in W^{-1/3,3}(\Gamma),$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit de dualité entre  $W^{-1/3,3}(\Gamma)$  et  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ . Il est facile de voir que l'application  $T_\nu$  ainsi définie est linéaire continue de  $E$  dans  $W^{-1/3,3}(\Gamma)$ . Soit maintenant  $q \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$  ; on a :

$$(2.36) \quad (T_\nu q, v|_\Gamma) = \int_\Omega q \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega v \operatorname{div} q \, dx =$$

$$= \int_\Gamma q \cdot \nu|_\Gamma \, d\sigma \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Or les traces des fonctions de  $C^1(\bar{\Omega})$  forment un sous-espace dense de  $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$  et l'égalité (2.36) a donc lieu pour tout  $v \in V$ . Il s'ensuit que  $T_\nu q = q \cdot \nu, \quad \forall q \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$ . Enfin,  $(C^1(\bar{\Omega}))^d$  étant dense dans  $E$  (cf. [16]),  $T_\nu$  est donc définie par (2.35) de manière unique.

Le lemme suivant montre l'existence d'une solution positive (resp. négative) de (2.7), (2.8) lorsque la donnée initiale et la donnée aux limites



sont positives (resp. négatives). On dira que  $g$  est positive (resp. négative) si :

$$(g(t), v|_{\Gamma}) \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0), \quad \forall v \in V, v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega; \forall t \in [0, T].$$

LEMME 2.3 : Si,

$$(2.37) \quad \inf \text{ ess } u_0 > -\infty \text{ et } g \text{ est positive,}$$

alors, la solution  $u$  de (2.7), (2.8) donnée par le théorème 2.1 vérifie :

$$u(y) \geq \inf \text{ ess } u_0 \text{ p.p. dans } Q.$$

*Démonstration* : Montrons que la suite  $(u_h^n)$  définie par (2.17), (2.18) vérifie :

$$u_h^n(x) \geq \inf \text{ ess } u_0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On pose  $u_{oi} = \inf \text{ ess } u_0$ .

Pour  $n = 1$ , on prend  $v_\varepsilon = \text{sign}_\varepsilon^- (u_h^1 - u_{oi})$  dans (2.18) avec  $\varepsilon > 0$  et  $\text{sign}_\varepsilon^-$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\text{sign}_\varepsilon^- (\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 0, \\ \lambda/\varepsilon & \text{si } -\varepsilon \leq \lambda \leq 0, \\ -1 & \text{si } \lambda \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) v_\varepsilon dx + \int_{\Omega} F(\nabla u_h^1) \cdot \nabla v_\varepsilon dx &= \\ &= (J_h^\circ, v_\varepsilon) + \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_0 - Bu_{oi}) v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$\int_{\Omega} F(\nabla u_h^1) \cdot \nabla v_\varepsilon dx \geq 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ d'où, avec (2.37),}$$

$$(2.38) \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) v_\varepsilon dx \leq 0.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de passer à la limite dans (2.38) quand  $\varepsilon$  tend vers 0 ; ce qui donne :

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) \text{sign}^-(u_h^1 - u_{oi}) dx \leq 0, \quad \text{avec}$$

$$\text{sign}^-(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 0, \\ -1 & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Comme :

$$(Bu_h^1 - Bu_{oi}) \operatorname{sign}^- (u_h^1 - u_{oi}) = (Bu_h^1 - Bu_{oi})^- ,$$

on déduit :

$$(u_h^1 - u_{oi})^- = 0 ,$$

c'est-à-dire,

$$u_h^1(x) \geq u_{oi} \text{ p.p. dans } \Omega .$$

Par récurrence on montre que :

$$u_h^n(x) \geq u_{oi} \text{ p.p. dans } \Omega .$$

*Remarque 2.5 :* Si  $\sup \operatorname{ess} u_0 < +\infty$  et  $g$  négative, alors  $u(y) \leq \sup \operatorname{ess} u_0$  p.p. dans  $Q$ .

Des théorèmes 2.1, 2.2, et lemmes 2.1, 2.3 on déduit la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.3 :** *On suppose que  $\inf \operatorname{ess} u_0 > 0$  et  $g$  positive. Alors, il existe une fonction  $u$  et une seule telle que :*

$$(2.39) \quad u \in L^\infty(0, T; V) ,$$

$$(2.40) \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^\infty(0, T; V') \cap L^2(Q) ,$$

$$(2.41) \quad u(y) \geq \inf \operatorname{ess} u_0 \text{ p.p. dans } Q ,$$

et  $u$  vérifiant :

$$(2.42) \quad \frac{d}{dt} (Bu) - \operatorname{div} (F(\nabla u)) = 0 \text{ dans } L^2(Q) ,$$

$$(2.43) \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ dans } \Omega ,$$

$$(2.44) \quad F(\nabla u) \cdot \nu = g \text{ dans } C^0([0, T]; W^{-1/3, 3}(\Gamma)) .$$

*Remarque 2.6 :* Dans le cas général nous ne savons pas montrer l'existence d'une solution faible de (2.7), (2.8) possédant la régularité (2.33). Il serait intéressant d'étudier le cas  $u_0$  positive et  $g$  négative et de voir à quelles conditions supplémentaires sur les données a-t-on existence et unicité d'une solution positive du problème (P). Dans le cas 1-D, on peut donner une réponse partielle à la question. La solution  $u$  de (2.7), (2.8), obtenue par la méthode constructive du théorème 2.1, satisfait à la propriété de continuité :  $u \in C(\bar{Q})$ . En effet, cette propriété se déduit de la condition  $u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, 3/2}(Q)$ , selon le raisonnement suivant.  $u \in L^\infty(0, T; V)$  entraîne que, pour presque tout  $t \in ]0, T[$ ,  $u(t)$  est

höldérienne d'ordre  $\frac{1}{3}$  en  $x$ , puisque, comme  $\Omega \subset \mathbb{R}$ ,  $V \subset C^{0,1/3}(\bar{\Omega})$ , où  $C^{0,1/3}(\bar{\Omega})$  est l'espace des fonctions continues sur  $\bar{\Omega}$ , holdériennes d'ordre  $\frac{1}{3}$ , muni de la norme :

$$\|v\| = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |v(x)| + \sup_{(x,y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^{1/3}}.$$

Il résulte alors du théorème d'Ascoli et de la continuité de  $u$  de  $[0, T]$  dans  $L^{3/2}(\Omega)$  que  $u \in C(\bar{Q})$ . Si  $\inf_{\text{ess}} u_0 > 0$ , alors on a existence locale (en temps) et unicité d'une solution positive, sans condition de positivité de  $g$ .

### III. EXTENSION DES RÉSULTATS. APPLICATIONS

#### III.1. Données initiale et aux limites moins régulières

On suppose que les données initiale et aux limites du problème  $(P)$  vérifient seulement :

$$(3.1) \quad u_0 \in L^{3/2}(\Omega), \quad g \in L^3(0, T; W^{-1/3,3}(\Gamma)).$$

Dans ces conditions,  $f \in L^3(0, T; V')$  étant définie par (2.6), on a le :

**THÉORÈME 3.1 :** *Sous l'hypothèse (3.1), il existe une fonction  $u$  telle que :*

$$(3.2) \quad u \in L^{3/2}(0, T; V), \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^3(0, T; V'),$$

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} (Bu) + Au = f \quad \text{dans } L^3(0, T; V').$$

$$(3.4) \quad u(0) = u_0.$$

*Démonstration :* On régularise les données, c'est-à-dire que l'on construit deux suites  $u_{0\varepsilon}$ ,  $f_\varepsilon$ , tel que :

$$(3.5) \quad u_{0\varepsilon} \in V, \quad u_{0\varepsilon} \rightarrow u_0 \quad \text{dans } L^{3/2}(\Omega),$$

$$(3.6) \quad f_\varepsilon \in W^{1,3}(0, T; V'), \quad f_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{dans } L^3(0, T; V').$$

Par application du théorème 2.1, on a existence de  $u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$ , vérifiant :

$$(3.7) \quad \left( \frac{d}{dt} Bu_\varepsilon, v \right) + (Au_\varepsilon, v) = (f, v) \quad \text{pour tout } v \in V,$$

$$(3.8) \quad u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon}.$$

Faisant  $v = u_\varepsilon(t)$  dans (3.7), on obtient, compte tenu de (3.5), (3.6) :  $u_\varepsilon$  bornée dans  $L^{3/2}(0, T; V)$ , d'où l'on tire :

$$Bu_\varepsilon \text{ borné dans } L^3(Q), \frac{d}{dt} Bu_\varepsilon \text{ borné dans } L^3(0, T; V').$$

Utilisant l'injection compacte de  $L^3(\Omega)$  dans  $V'$ , on a, pour des suites extraites indexées par  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &\rightarrow u && \text{dans } L^{3/2}(0, T; V) \text{ faible,} \\ Bu_\varepsilon &\rightarrow v && \text{dans } C^0([0, T]; V') \text{ et dans } L^3(Q) \text{ faible,} \\ \frac{d}{dt} Bu_\varepsilon &\rightarrow \frac{dv}{dt} && \text{dans } L^3(0, T; V') \text{ faible,} \\ Au_\varepsilon &\rightarrow \chi && \text{dans } L^3(0, T; V') \text{ faible.} \end{aligned}$$

Par un raisonnement classique utilisant la monotonie et l'hémicontinuité des opérateurs  $B$  et  $A$  on montre  $v = Bu$ , puis,  $\chi = Au$ . D'où le théorème.

*Remarque 2.7 :* Il n'existe, au plus, qu'une solution de (3.3), (3.4), possédant la régularité :  $\frac{d}{dt}(Bu) \in L^1(Q)$ . La démonstration est celle du théorème 2.2. La technique de cette démonstration permet d'établir, pour des données, initiale et aux limites, positives (resp. négatives), l'existence d'une solution positive (resp. négative) de (3.3), (3.4).

## III.2. Applications

### III.2.1. Conditions aux limites du type « puits »

Dans ce paragraphe,  $\Omega$  désigne un ouvert connexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq d \leq 3$ , ayant une frontière extérieure  $\Gamma_{\text{ext}}$  et une frontière intérieure  $\Gamma_{\text{int}}$  régulières. Il s'agit de trouver  $u$  solution du problème ( $P_0$ ) :

$$(3.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times ]0, T[ ,$$

$$(3.10) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$(3.11) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{\text{ext}} = \Gamma_{\text{ext}} \times ]0, T[ ,$$

$$(3.12) \quad \int_{\Gamma_{\text{int}}} F(\nabla u) \cdot \nu \, d\sigma = Q_0 \quad \text{dans } ]0, T[ ,$$

$$(3.13) \quad u|_{\Gamma_{\text{int}}} = \text{constante inconnue,}$$

$\phi, K, \sigma$  vérifiant (2.1).

Pour définir une solution faible de (3.9), ..., (3.13) on introduit le sous-espace fermé de  $V$ ,

$$V_0 = \{v \in V ; v|_{\Gamma_{\text{int}}} \text{ est constante} \},$$

et on note  $A_0$  l'opérateur de  $V_0$  dans  $V'_0$  défini par :

$$(A_0 u, v) = \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in V_0.$$

Supposons :

$$u_0 \in L^{3/2}(\Omega), Q_0 \in L^3(0, T).$$

On définit  $f_0 \in L^3(0, T; V'_0)$ , en posant :

$$(f_0(t), v) = Q_0(t) v|_{\Gamma_{\text{int}}}, \quad \forall v \in V_0, \text{ p.p. dans } ]0, T[.$$

Alors, comme au paragraphe précédent, on a :

**PROPOSITION 3.1 :** *Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction  $u$  telle que :*

$$(3.14) \quad u \in L^{3/2}(0, T; V_0), \quad \frac{d}{dt}(Bu) \in L^3(0, T; V'_0),$$

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt}(Bu) + A_0 u = f_0 \quad \text{dans } L^3(0, T; V'_0),$$

$$(3.16) \quad u(0) = u_0.$$

et il n'existe, au plus, qu'une solution de (3.15), (3.16) possédant la régularité :  $\frac{d}{dt}(Bu) \in L^1(Q)$ .

**PROPOSITION 3.2 :** *Si :  $\inf \text{ess } u_0 > 0$  et  $Q_0$  positive, alors, le problème (3.9), ..., (3.13) admet une solution unique  $u$  vérifiant :*

$$(3.17) \quad \frac{d}{dt}(Bu) \in L^2(Q),$$

$$(3.18) \quad u(y) \geq \inf \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

*Remarque 3.1 :*  $q_0$  positive signifie que l'on injecte du gaz dans le gisement. En soutirage,  $Q_0$  est négative; se pose alors, comme au paragraphe II, la question de positivité de la solution  $u$  de (3.9), ..., (3.13) (cf. Remarque 2.6).

III.2.2. *Écoulements compressibles adiabatiques*

On peut généraliser les résultats précédents à l'équation :

$$(3.19) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\phi |u|^{r-2} u) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0,$$

pour  $1 < r < r_*$ ,  $r_* = \frac{3d}{2d-3}$  ( $d$  étant la dimension de l'espace, l'injection de  $W^{1,3/2}(\Omega)$  dans  $L^r(\Omega)$  est ainsi compacte).

Considérons un écoulement compressible adiabatique. La densité  $\rho$  et la pression  $p$  vérifient :  $\rho = bp^\gamma$ , avec  $b, \gamma$  constantes,  $0 < \gamma < 1$ . En posant  $u = p^{\gamma+1}$ , on est ramené à chercher une solution positive de l'équation (3.19), avec  $r = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}$ , auquel on adjoint des conditions initiale et aux limites. Comme  $r = \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}$ ,  $0 < \gamma < 1$ , on a  $1 < r < \frac{3}{2}$  et par conséquent  $V$  s'injecte compactement dans  $L^r(\Omega)$ . Par ailleurs, bien que les formules définissant  $K$  changent, celle de  $F$  ne change pas. Les conditions assurant l'existence d'une solution faible au sens du théorème 3.1 sont alors :

$$(3.20) \quad u_0 \in L^r(\Omega), g \in L^3(0, T; W^{-1/3,3}(\Gamma)).$$

IV. LIMITE QUAND  $\sigma$  TEND VERS 0

Soit  $O$  l'ouvert de  $L^\infty(\Omega)$  défini par :

$$O = \{ \sigma \in L^\infty(\Omega) ; \exists \sigma_- > 0, \sigma(x) \geq \sigma_- \text{ p.p. dans } \Omega \},$$

et  $(\sigma_n)$  une suite d'éléments de  $O$  uniformément bornée dans  $L^\infty(\Omega)$ . On note  $F_n$  la fonction  $F$  associée à  $\sigma_n$ ,  $A_n$  l'opérateur associé à  $F_n$  et  $u_n$  la solution de (2.7), (2.8), associée à  $\sigma_n$  par la méthode constructive du théorème 2.1 ; elle vérifie donc, (2.9), (2.10), (2.30), (2.31). Posons  $W = H^1(\Omega)$  et notons  $A^*$  l'opérateur linéaire de  $W$  dans  $W'$ , défini par :

$$(4.1) \quad (A^* u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} K \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in W.$$

Nous allons établir le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.1 :** *Si  $\sigma_n \rightarrow 0$  p.p. dans  $\Omega$  (quand  $n \rightarrow \infty$ ), alors,  $u_n \rightarrow u^*$  dans  $L^\infty(0, T; V)$  faible\* et  $L^{3/2}(0, T; V)$  fort, où  $u^* \in L^2(0, T; W)$ ,  $u^*$  est la solution (unique) de :*

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} (Bu^*) + A^* u^* = f \quad \text{dans } L^2(0, T; W'),$$

$$(4.3) \quad u^*(0) = u_0,$$

avec :

$$(4.4) \quad \frac{d}{dt} (Bu^*) \in L^2(0, T; W'),$$

$$\sqrt{t} \frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(Q) \quad (\text{et donc } u^* \in C^0([0, T]; L^{3/2}(\Omega))).$$

On utilisera pour démontrer ce théorème, l'ellipticité des opérateurs  $A$  et  $B$ , au sens des lemmes suivants :

LEMME 4.1 : Pour tout  $v, w \in V$ ,

$$(4.5) \quad (Av - Aw, v - w) \geq C \frac{\left[ \int_{\Omega} |\nabla v - \nabla w|^{3/2} dx \right]^{4/3}}{\left[ \int_{\Omega} \{ (1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla w|)^{1/2} + 2 \}^3 dx \right]^{1/3}},$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $v$  et  $w$ .

LEMME 4.2 : Pour tout  $v, w \in L^{3/2}(\Omega)$ ,

$$(4.6) \quad \left( \int_{\Omega} (|v| + |w|)^{3/2} dx \right)^{1/3} \int_{\Omega} (Bv - Bw)(v - w) dx \geq C \|v - w\|_{L^{3/2}(\Omega)}^2$$

avec  $C > 0$  indépendant de  $v$  et  $w$ .

Démonstration du lemme 4.1 : Elle découle du lemme suivant (cf. [1]).

LEMME 4.3 : Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(F(x) - F(y)) \cdot (x - y) \geq \frac{1}{2} \frac{|x - y|^2}{(1 + |x|)^{1/2} + (1 + |y|)^{1/2} + 2},$$

$F$  étant l'application définie dans le lemme 2.1.

Soient  $v, w \in V$ ; on a alors :

$$(4.7) \quad [(1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla w|)^{1/2} + 2] \frac{k}{\sigma} (F(\sigma \nabla v) - F(\sigma \nabla w)) \times$$

$$\times (\nabla v - \nabla w) \geq \frac{K}{2} |\nabla v - \nabla w|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On élève les deux membres de (4.7) à la puissance  $\frac{3}{4}$ , et après intégration,

on obtient

$$\int_{\Omega} \left\{ (1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla w|)^{1/2} + 2 \right\}^{3/4} \times \\ \times \left\{ \frac{K}{\sigma} (F(\sigma \nabla v) - F(\sigma \nabla w)) \cdot (\nabla v - \nabla w) \right\}^{3/4} dx \geq \\ \int_{\Omega} \left( \frac{K}{2} \right)^{3/4} |\nabla v - \nabla w|^{3/2} dx,$$

on a

$$\left( (1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla w|)^{1/2} + 2 \right)^{3/4} \in L^4(\Omega), \\ \left( \frac{K}{\sigma} (F(\sigma \nabla v) - F(\sigma \nabla w)) \cdot (\nabla v - \nabla w) \right)^{3/4} \in L^{4/3}(\Omega),$$

d'où, à l'aide de l'inégalité de Holder (puis en revenant à la définition de  $A$ ):

$$\left( \int_{\Omega} \left( (1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla w|)^{1/2} + 2 \right)^3 dx \right)^{1/4} (Av - Aw, v - w)^{3/4} \geq \\ \int_{\Omega} \left( \frac{K}{2} \right)^{3/4} |\nabla v - \nabla w|^{3/2} dx,$$

d'où (4.5)

*Démonstration du lemme 4.2* Utilisant l'inégalité dans  $\mathbb{R}$ :

$$\sqrt{2}(|x| + |y|)^{1/2} \left( \frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{y}{\sqrt{|y|}} \right) (x - y) \geq |x - y|^2,$$

il vient

$$(4.8) \quad \sqrt{2}(|v| + |w|)^{1/2} (Bv - Bw)(v - w) \geq \phi |v - w|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

Alors, comme dans la démonstration du lemme 4.1, on élève les deux membres de (4.8) à la puissance  $\frac{3}{4}$  et après intégration on obtient

$$(4.9) \quad \int_{\Omega} \phi^{3/4} |v - w|^{3/2} dx \leq 2^{3/8} \int_{\Omega} (|v| + |w|)^{3/8} \times \\ \times ((Bv - Bw)(v - w))^{3/4} dx$$

On a

$$(|v| + |w|)^{3/8} \in L^4(\Omega), \quad [(Bv - Bw)(v - w)]^{3/4} \in L^{3/4}(\Omega),$$



on déduit donc de (4.9) et de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\Omega} \phi^{3/4} |v - w|^{3/2} dx \leq 2^{3/8} \left[ \int_{\Omega} (|v| + |w|)^{3/2} dx \right]^{1/4} \times \\ \times \left[ \int_{\Omega} (Bv - Bw)(v - w) dx \right]^{3/4},$$

d'où (4.6).

*Démonstration du théorème 4.1* : Elle comprend quatre étapes.

i) *Convergence faible d'une suite extraite de  $(u_n)$*

i.1) *Estimations a priori*

On a pour tout  $n$  :

(4.10)

$$\left( \frac{d}{dt} B u_n(s), v \right) + (A_n u_n(s), v) = (f(s), v'), \quad \forall v \in V, \text{ p.p. dans } ]0, T[,$$

(4.11)

$$u_n(0) = u_0.$$

Prenons  $v = u_n(s)$  dans (4.10) ; il vient :

$$(4.12) \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi |u_n(s)|^{3/2} dx + (A_n u_n(s), u_n(s)) = (f(s), u_n(s)),$$

d'où, en intégrant de 0 à  $t$ ,

$$(4.13) \quad \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u_n(t)|^{3/2} dx + \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s)) ds = \\ \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u_0|^{3/2} dx + \int_0^t (f(s), u_n(s)) ds ;$$

mais, pour  $\sigma_n \leq \sigma_*$  ( $\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*$ ),

$$\frac{(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(x, s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \geq \frac{(1 + \sigma_* |\nabla u_n(x, s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_*},$$

pour presque tout  $(x, s) \in Q$ , de sorte qu'avec (2.1),

$$(4.14) \quad \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s)) ds \geq \\ \geq K_- \int_0^t \int_{\Omega} \frac{(1 + \sigma_* |\nabla u_n(x, s)|)^{1/2} - 1}{\sigma_*} |\nabla u_n(x, s)| dx ds \\ \geq \frac{C'_1}{\sqrt{\sigma_*}} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n(x, s)|^{3/2} dx ds - \frac{C'_2}{\sigma_*},$$

où  $C'_1$  et  $C'_2$  sont des constantes strictement positives indépendantes de  $n$ .

Dans le second membre de (4.13), on a :

$$\forall \eta > 0, \exists C_\eta > 0, \text{ tel que,}$$

$$(4.15) \quad \int_0^t (f(s), u_n(s)) ds \leq \frac{2\eta}{3} \int_0^t \|u_n(s)\|_{V'}^{3/2} ds + \frac{C_\eta}{3} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^3 ds;$$

choisissant convenablement  $\eta$  (en tenant compte de (2.1) et (4.14)), (4.13) donne alors :

$$(4.16) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2} + C'_3 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x, s)|^{3/2} dx ds \leq C'_4 \int_0^t \|u_n(s)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2} ds + C'_5,$$

$C'_3, C'_4, C'_5$ , constantes strictement positives indépendantes de  $n$ . On en déduit en utilisant le lemme de Gronwall :

$$(4.17) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \text{constante}, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(4.18) \quad \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x, s)|^{3/2} dx ds \leq \text{constante}, \quad \forall t \in ]0, T].$$

De (4.12), (4.13) et (2.1) il résulte alors :

$$(4.19) \quad \|\psi_n\|_{W^{1,1}(]0, T])} \leq \text{constante},$$

où  $\psi_n$  est la fonction numérique continue, définie sur  $[0, T]$  par :

$$\psi_n(t) = \frac{1}{3} \int_\Omega \phi |u_n(t)|^{3/2} dx,$$

et,

$$(4.20) \quad \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s)) ds \leq \text{constante}, \quad \forall t \in ]0, T].$$

Les estimations a priori ci-dessus ne suffisent pas pour passer à la limite, à cause du changement de comportement de la fonction  $F$  au voisinage de 0.. Pour tenir compte de cela, on introduit les sous-ensembles de  $Q$ , mesurables :

$$Q_{1,n} = \{y = (x, t) \in Q; \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)| < 3\}$$

$$Q_{2,n} = \{y = (x, t) \in Q; \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)| \geq 3\}$$

et on note  $\chi_{1,n}$  (resp.  $\chi_{2,n}$ ) la fonction caractéristique dans  $Q$  de  $Q_{1,n}$  (resp.  $Q_{2,n}$ ).

Ayant,

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq \sigma_n(x) \frac{|\nabla u_n(y)|}{4} \quad \text{dans } Q_{1,n},$$

on déduit de (4.20) que :

$$(4.21) \quad \int_{Q_{1,n}} |\nabla u_n(y)|^2 dy \leq \text{constante}.$$

De même, la relation :

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq 1 \quad \text{dans } Q_{2,n},$$

et (4.20) entraînent :

$$(4.22) \quad \int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n(x)} |\nabla u_n(y)| dy \leq \text{constante}.$$

Montrons maintenant que  $A_n u_n$  est borné dans  $L^2(0, T; W')$ . Soit  $v \in W$ ,  $\|v\|_W \leq 1$ . Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_0^t |(A_n u_n, v)|^2 dt \leq K_+ \int_Q \left| \frac{(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy,$$

et comme :

$$\int_Q \left| \frac{(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy \leq \int_{Q_{1,n}} \left| \frac{\nabla u_n(y)}{2} \right|^2 dy + \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n(y)|}{\sigma_n(x)} dy,$$

il vient, en utilisant (4.16) et (4.17) :

$$(4.23) \quad \|A_n u_n\|_{L^2(0, T; W')} \leq \text{constante}.$$

### i.2) Passage à la limite

Les suites extraites étant indexées par  $n$ , il résulte des estimations (4.17), (4.18), (4.19), (4.23) et ( $B$  borné sur les bornés de  $L^{3/2}(\Omega)$ ) que :

$$(4.24) \quad u_n \rightarrow u^* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \quad \text{faible}^*,$$

$$(4.25) \quad Bu_n \rightarrow v^* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^3(\Omega)) \quad \text{faible}^*,$$

$$(4.26) \quad \nabla u_n \rightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^{3/2}(0, T; (L^{3/2}(\Omega))^d) \quad \text{faible},$$

$$(4.27) \quad \psi_n \rightarrow \psi^* \quad \text{dans } L^\infty(0, T) \quad \text{faible}^*,$$

$$(4.28) \quad A_n u_n \rightarrow A^* \quad \text{dans } L^2(0, T; W') \quad \text{faible}.$$

L'injection de  $V$  dans  $L^{3/2}(\Omega)$  étant compacte, celle de  $W$  dans  $L^{3/2}(\Omega)$  l'est donc, ainsi que sa transposée (de  $L^3(\Omega)$  dans  $W'$ ). Appliquant le théorème 5.1 de [12] à la suite  $Bu_n$  qui vérifie (4.25) et :

$$\left\| \frac{d}{dt} Bu_n \right\|_{L^2(0, T; W')} \leq \text{constante},$$

on peut supposer que :

$$(4.29) \quad Bu_n \rightarrow v^* \quad \text{dans } C^0([0, T]; V').$$

De (4.24) et (4.29) on déduit (en utilisant la monotonie et la continuité de  $B$ ) que :

$$(4.30) \quad v^* = Bu^*.$$

Appliquant l'inégalité de Young on peut écrire :

$$\int_{\Omega} (Bu_n(t) - Bu^*(t)) u^*(t) dx \leq \frac{1}{3} \times \\ \times \left\{ \int_{\Omega} \phi |u_n(t)|^{3/2} dx - \int_{\Omega} \phi |u^*(t)|^{3/2} dx \right\} \leq$$

(4.31)

$$\int_{\Omega} (Bu_n(t) - Bu^*(t)) u_n^*(t) dx, \quad \text{p.p. dans } ]0, T[ ,$$

d'où il résulte, en utilisant (4.29) et (4.30) :

$$(4.32) \quad \psi^*(t) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u^*(t)|^{3/2} dx \quad \text{p.p. dans } ]0, T[ .$$

*Montrons que  $u^* \in L^2(0, T; W)$ . D'après (4.21) :*

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \text{ est borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d);$$

donc, pour une suite extraite (indexée par  $n$ ),

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \rightarrow s \quad \text{dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible.}$$

Mais

$$\chi_{1,n} \rightarrow 1 \quad \text{dans } L^2(Q), \text{ puisque :}$$

$$\int_Q |\chi_{1,n} - 1|^2 dy = \int_{Q_{2,n}} dy \leq \frac{1}{3} \int_{Q_{2,n}} \sigma_n |\nabla u_n| dy \leq C'_6 \|\sigma_n\|_{L^3(\Omega)},$$

( $C'_6$  constante indépendante de  $n$ ) qui tend vers 0 grâce au théorème de Lebesgue ; d'où on déduit avec (4.26) :

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \rightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible,}$$

et par conséquent  $\nabla u^* \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$ , ce qui, joint à  $u^* \in L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega))$ , entraîne :  $u^* \in L^2(0, T; W)$ .

Montrons que  $A_* = A^* u^*$ . Posons :

$$\varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n - A_n v, u_n - v) dt, \quad v \in L^2(0, T; W), \quad \text{et}$$

$$\gamma \in C^1([0, T]; \mathbb{R}), \quad \gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \gamma(0) = \gamma(T) = 0.$$

Grâce à la monotonie de  $A_n$ ,  $\varepsilon_n \geq 0$ . Grâce à (4.28) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, v) dt = \int_0^T \gamma(t) (A^*, v) dt.$$

Appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n v, v) dt = \int_0^T \gamma(t) (A^* v, v) dt.$$

D'autre part :

$$(4.33) \quad \int_0^T \gamma(t) (A_n v, u_n) dt = \int_Q \gamma(t) F_n(\nabla v) \cdot (\chi_{1,n} \nabla u_n) dy \\ + \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) F_n(\nabla v) \cdot \nabla u_n dy.$$

La première intégrale du second membre de (4.33) a pour limite :

$$\int_Q \gamma(t) \frac{K}{2} \nabla u^* \cdot \nabla v dy = \int_0^T \gamma(t) (A^* v, u^*) dt, \quad \text{puisque :}$$

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \rightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible,}$$

et

$$\gamma F_n(\nabla v) \rightarrow \gamma \frac{K}{2} \nabla v \quad \text{dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$$

(grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue).

La deuxième intégrale du second membre de (4.33) tend vers 0 ; en effet :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) |F_n(\nabla v)| |\nabla u_n| dy &\leq \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) K \frac{|\nabla v|^{1/2}}{\sqrt{\sigma_n}} |\nabla u_n| dy \leq \\ K_+ \left[ \int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^3 \frac{|\nabla v|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} dy \right]^{1/3} \left[ \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} dy \right]^{2/3} &\leq \\ K_+ \left[ \int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4 |\nabla v|^2 dy \right]^{1/4} \left[ \int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2} dy \right]^{1/12} \left[ \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} dy \right]^{2/3}, \end{aligned}$$

et on a :

$$\int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2} dy \leq \frac{1}{3} \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_n} dy \leq \text{constante, (grâce à 4.17),}$$

$$\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} dy \leq \text{constante, qui résulte de (4.20) et de la relation :}$$

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq \frac{(\sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2}}{2} \quad \text{dans } Q_{2,n};$$

donc la deuxième intégrale du second membre de (4.33) est majorée par :

$$C'_7 \left[ \int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4 |\nabla v|^2 dy \right]^{1/2},$$

$C'_7$  indépendante de  $n$ , qui tend vers 0 car  $\text{mes}(Q_{2,n})$  tend vers 0.

On va maintenant passer à la limite dans l'équation :

$$\int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, u_n) dt = \int_0^T \gamma(t) (f, u_n) dt - \int_0^T \gamma(t) \left( \frac{d}{dt} B u_n, u_n \right) dt.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^T \gamma(t) \left( \frac{d}{dt} B u_n, u_n \right) dt = - \int_0^T \gamma'(t) \psi_n(t) dt;$$

il vient alors (grâce à (4.24) et (4.27)) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, u_n) dt &= \int_0^T \gamma(t) (f, u^*) dt \\ &+ \int_0^T \gamma'(t) \psi^*(t) dt. \end{aligned}$$

Comme :  $u^* \in L^2(0, T; W)$ ,  $\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^2(0, T; W')$  et  $\psi^* \in L^1(0, T)$ , on peut intégrer par parties de nouveau (cf. lemme 2 de [3]), d'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t)(A_n u_n, u_n) dt = \int_0^T \gamma(t)(f, u^*) dt - \int_0^T \gamma(t) \left( \frac{d}{dt} Bu^*, u^* \right) dt = \int_0^T \gamma(t)(A_*, u^*) dt.$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t)(A_* - A^* v, u^* - v) dt \geq 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; W),$$

d'où il résulte,  $A^*$  étant continu,  $A_* = A^* u^*$ .

On a ainsi la convergence d'une suite extraite de  $u_n$  vers  $u^* \in L^2(0, T; W)$ , vérifiant (4.2), (4.3) et telle que

$$\frac{d}{dt}(Bu^*) \in L^2(0, T; W').$$

### ii) Régularité de $u^*$

Par souci de simplification de la démonstration nous raisonnons formellement. Les estimations a priori qui suivent peuvent être établies rigoureusement à partir du schéma de semi-discrétisation (2.17), (2.18) (de façon analogue au point b.2 de la démonstration du théorème 2.1 ; cf. aussi la démonstration de la proposition 2.2). On a :

$$\int_{\Omega} \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{ds} \right|^2 dx + s \int_{\Omega} F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla \left( \frac{du_n}{ds} \right) = \left( f, s \frac{du_n}{ds} \right).$$

Mais,

$$\int_{\Omega} F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla \left( \frac{du_n}{ds} \right) dx = \frac{d}{ds} J_{A_n}(u_n),$$

où  $J_{A_n}$  est la fonctionnelle associée à  $A_n$  par (2.13), et,

$$\left[ f, s \frac{du_n}{ds} \right] = \frac{d}{ds} [f, su_n] - \left[ \frac{df}{ds}, su_n \right] - [f, u_n],$$

d'où, en intégrant de 0 à  $t$ ,

$$(4.29) \quad \int_0^t \int_{\Omega} \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{ds} \right|^2 dx ds + t J_{A_n}(u_n(t)) = \int_0^t J_{A_n}(u_n) ds + \\ + t(f(t), u_n(t)) - \int_0^t s \left( \frac{df}{ds}, u_n \right) ds - \int_0^t (f, u_n) ds.$$

Le premier membre de (4.34) est alors majoré par :

$$\int_0^t J_{A_n}(u_n) ds + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V + \\ + \left[ \int_0^t \|u_n\|_V^{3/2} ds \right]^{2/3} \left\{ \left[ \int_0^t \|f\|_{V'}^3 ds \right]^{1/3} + t \left[ \int_0^t \left\| \frac{df}{ds} \right\|_{V'}^3 ds \right]^{1/3} \right\}.$$

Par ailleurs,

$$J_{A_n}(u_n) \leq (A_n u_n, u_n),$$

et donc, grâce à (4.20),

$$\int_0^t J_{A_n}(u_n) ds \leq \text{constante},$$

ce qui, joint à (4.17), (4.18), implique que le premier membre de (4.34) est majoré par :

$$\text{constante} + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V.$$

On a donc :

$$(4.35) \quad t J_{A_n}(u_n(t)) \leq \text{constante} + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V.$$

De plus, la fonction  $\phi_y(y \in \mathbb{R}_+)$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\phi_y(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{1 + xy}{x^2} \right)^{3/2} - \frac{y}{x}$$

étant décroissante, on a pour  $\sigma_n \leq \sigma_*$  ( $\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*$ ),

$$J_{A_n}(u_n(t)) \geq \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma_* |\nabla u_n|)^{3/2}}{\sigma_*^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_*} dx,$$

et par suite, en utilisant (2.15),

$$(4.36) \quad J_{A_n}(u_n(t)) \geq C_1^* \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{3/2} dx - C_2^*,$$



$C_1^*$  et  $C_2^*$  étant strictement positives et indépendantes de  $n$ . Appliquant maintenant l'inégalité de Young au deuxième terme du second membre de (4.35), on tire alors de (4.35), (4.36) et (4.17) que :

$$(4.37) \quad u_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; V) .$$

Le second membre de (4.34) est finalement borné, d'où il résulte :

$$(4.38) \quad \int_0^T \int_\Omega \phi \frac{t}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 dx dt \leq \text{constante} ,$$

et a fortiori :

$$(4.39) \quad \sqrt{t} \frac{du_n}{dt} \text{ est borné dans } L^{3/2}(Q) .$$

De (4.37) on déduit qu'une suite extraite de  $u_n$  converge vers  $u^*$  dans  $L^\infty(0, T; V)$  faible \*. Procédant ensuite comme en i) on démontre que :

$$(4.40) \quad u^* \in L^\infty(0, T; W) ,$$

$$(4.41) \quad \frac{d}{dt} (Bu^*) \in L^\infty(0, T; W') .$$

Par ailleurs, on déduit de (4.39) que :

$$(4.42) \quad \sqrt{t} \frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(Q) ,$$

puis de (4.38),

$$(4.43) \quad \sqrt{t} |u^*|^{-1/4} \frac{du^*}{dt} \in L^2(Q) .$$

$$(4.42) \text{ implique que } \frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(\delta, T; L^{3/2}(\Omega)) \quad \forall \delta > 0 ,$$

et par suite, compte tenu de (4.17),

$$(4.44) \quad u^* \in C^0([\delta, T]; L^{3/2}(\Omega)) , \quad \forall \delta > 0 .$$

iii) *Unicité de la solution du problème* (4.2), (4.3)

Soient  $u_1^*$  et  $u_2^*$  deux solutions de (4.2), (4.3), vérifiant (4.40), (4.41) et (4.42). On a

$$(4.45) \quad \frac{d}{dt} (Bu_1^*) - \frac{d}{dt} (Bu_2^*) + A^*(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; W') .$$

Considérons pour  $s \in ]0, T[$  la fonction :

$$v_s(t) = \begin{cases} - \int_t^s (u_1^*(\tau) - u_2^*(\tau)) d\tau, & \text{si } t < s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En multipliant (4.45) par  $v_s(t)$  ( $s$  fixé), il vient :

$$\int_0^s \left( \frac{d}{dt} (Bu_1^* - Bu_2^*), v_s(t) \right) dt + \int_0^s (A^* v_s'(t), v_s(t)) dt = 0,$$

soit, par intégration par parties :

$$- \int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*) dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} K |\nabla v_s(0)|^2 dx = 0,$$

puisque :  $Bu_1^*(0) = Bu_2^*(0)$  et  $v_s(s) = 0$ .

On a donc :

$$\int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*) dt = 0.$$

Or (cf. Lemme 4.2),

$$\int_0^s (Bu_1^* - Bu_2^*, u_1^* - u_2^*) dt \geq C \int_0^s \|u_1^* - u_2^*\|_{L^{3/2}(\Omega)}^2 dt,$$

où  $C$  est une constante strictement positive, donc :

$$u_1^* = u_2^* \quad \text{p.p. dans } [0, s],$$

$s$  étant quelconque, d'où le résultat.

Le problème (4.2), (4.3) admettant une *solution unique* alors la *suite initiale*  $u_n$  converge vers  $u^*$  dans  $L^\infty(0, T; V)$  faible\*.

iii) *Convergence dans  $L^{3/2}(0, T; V)$  fort*

Des considérations de i) et ii) il résulte que :

$$\begin{aligned} (A_n u_n - A_n u^*, u_n - u^*) &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1(0, T), \\ (Bu_n - Bu^*, u_n - u^*) &\rightarrow 0 \quad \text{dans } L^1(0, T), \end{aligned}$$

or (cf. Lemmes 4.1 et 4.2)

$$\begin{aligned} (Bu_n - Bu^*, u_n - u^*) &\geq C' \int_{\Omega} |u_n - u^*|^{3/2} dx, \\ (A_n u_n - A_n u^*, u_n - u^*) &\geq C' \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u^*|^{3/2} dx, \end{aligned}$$

où  $C'$  est une constante strictement positive indépendante de  $n$ , donc :

$$u_n \rightarrow u^* \text{ dans } L^{3/2}(0, T; V) \text{ fort ;}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 4.1.

#### REFERENCES

- [1] Y. AMIRAT, *Analyse et Approximation d'Écoulements en Milieu Poreux n'Obéissant pas à la loi de Darcy*, Rapport INRIA n° 435, juillet 1985.
- [2] D. G. ARONSON, *Regularity Properties of Flows Through Porous Media*, SIAM J. Appl. Math., 1969, 461-467.
- [3] A. BAMBERGER, *Étude d'une Équation Doublement Non Linéaire*, J. Func. Anal., 24, 2, 1977, 148-155.
- [4] H. BREZIS, G. CRANDALL, *Uniqueness of Solution of the Initial-Value Problem for  $u_t - \Delta \phi(u) = 0$* , J. Math. Pures et Appl., 58, 1979, 153-163.
- [5] L. A. CAFARELLI, A. FRIEDMAN, *Continuity of the Density of a Gas in a Porous Medium*, Trans. Amer. Math. Soc., 252, 1979, 99-113.
- [6] ENERGY RESSOURCES CONSERVATION BOARD, *Theory and Practice of the Testing of Gas Wells*, Third Edition, Alberta, 1975.
- [7] O. GRANGE, F. MIGNOT, *Sur la Résolution d'une Équation et d'une Inéquation Parabolique Non Linéaires*, J. Func. Anal., Vol. 11, 1, 1972, 77-92.
- [8] K. H. GUPPY, H. CINCO-LEY, H. J. RAMEY Jr, F. SAMANIEGO-V, *Non Darcy-Flow in Wells with Finite-Conductivity Vertical Fractures*, Soc. Pet. Eng. J., October 1982, 681-698.
- [9] S. A. HOLDITCH, P. A. MORSE, *The Effects of Non-Darcy Flow on the Behaviour of Hydraulically Fractured Gas Well*, J. Pet. Tech., October 1976, 1169-1178.
- [10] D. D. JOSEPH, D. A. NIELD, G. PAPANICOLAOU, *Nonlinear Equation Governing Flow in a Saturated Porous Medium*, Water Resources Research, 1982, Vol. 18, 14, 1049-1052.
- [11] K. S. KADI, *Non-Darcy Flow in Dissolved Gas-Drive Reservoirs*, SPE 9301, 1980.
- [12] J. L. LIONS, *Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [13] C. S. MATTHEWS, D. G. RUSSELL, *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells*, Monograph Series, Soc. Pet. Eng. of AIME, Dallas, 1967.
- [14] A. E. SCHEIDEGGER, *The Physics of Flow Through Porous Media*, Third Edition, University of Toronto Press, 1974.
- [15] G. W. SWIFT, O. K. KIEL, *The Prediction of Gas-Well Performance Including the Effect of Non-Darcy Flow*, J. Pet. Tech., July 1962, 791-798.
- [16] R. TEMAM, *Problèmes Mathématiques en Plasticité*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [17] R. A. WATTENBARGER, H. J. RAMEY Jr, *Gas Well Testing with Turbulence, Damage and Wellbore Storage*, Soc. Pet. Eng., 1968, 99-109.