

G. ALLAIN

**Rôle de la tension superficielle dans la
convection de Bénard**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-
sation mathématique et analyse numérique*, tome 24, n° 2 (1990),
p. 153-175

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_2_153_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÔLE DE LA TENSION SUPERFICIELLE DANS LA CONVECTION DE BÉNARD (*)

G. ALLAIN (1)

Communiqué par C. BARDOS

Résumé. — Le phénomène de Bénard est la mise en mouvement d'un fluide lorsqu'on chauffe la plaque sur laquelle il repose. Nous étudions ici l'influence de la tension superficielle pour ce phénomène. Cette influence est très importante pour les fluides peu profonds.

On prouve ici que la tension superficielle diminue le nombre de Rayleigh (i.e. la température) à partir duquel se produit la mise en mouvement du fluide. Il s'agit d'un problème de bifurcation pour lequel l'opérateur tangent au voisinage de la solution triviale n'est pas symétrique, et ses valeurs propres ne sont pas nécessairement réelles. Cependant nous prouvons qu'il y a une bifurcation de solutions stationnaires. Nous retrouvons en particulier les résultats classiques (sans tension).

Abstract. — We study the role of the surface tension in the Bénard convection for a fluid with a free surface. We prove that taking into account the surface tension makes lower the Rayleigh number (i.e. the temperature) at which the fluid begins moving. We prove the bifurcation of steady solutions even if the tangent operator near the trivial solution is not symmetric. The classical results (without tension) are obtained as a limit case.

1. INTRODUCTION

Depuis le début du siècle le phénomène de la convection de Bénard a été observé et étudié. L'explication naturelle de la mise en mouvement d'un fluide s'étendant sur une plaque suffisamment chaude a été d'abord l'effet des « buoyancy forces », c'est-à-dire la variation de la densité du fluide en fonction de la température, qui amènerait les particules de fluide au voisinage du fond à s'alléger et à monter à la surface tandis que celles de la

(*) Reçu en septembre 1988, révisé en décembre 1988.

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France.

surface, plus froides et plus lourdes descendraient, en induisant un mouvement de convection. Rabinowitz dans [5] et Fife-Joseph dans [2] ont étudié le modèle mathématique correspondant. Mais les seules « buoyancy forces » n'ont pu expliquer tout le phénomène, par exemple, la différence de comportement entre un gaz et un liquide, ou comme nous allons étudier ici, une convection apparente avec un nombre de Rayleigh très petit. Il apparaît en fait que d'autres paramètres physiques que la densité peuvent varier considérablement avec la température et induire à eux seuls un mouvement de convection. En 1958, dans [4], J. R. A. Pearson a montré que l'un de ces paramètres est le nombre de Marangoni, c'est-à-dire le taux de variation de la tension superficielle par rapport à la température.

Nous faisons ici l'étude mathématique de ce phénomène et montrons que le nombre de Marangoni fait en général baisser la température critique à laquelle le fluide se met en mouvement.

On considère un fluide visqueux, incompressible, tridimensionnel, s'étendant sur une surface plane horizontale soumise à une température T_0 . La surface supérieure est libre. Nous utiliserons le modèle de Boussinesq et considérerons que la densité ρ du fluide dépend de la température

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))$$

mais que cette dépendance n'influe que sur le terme de gravitation, la vitesse restant petite. Notons ν la viscosité cinématique, K la conductivité thermique, et $g = (0, 0, -g_0)$ ($g_0 > 0$) la gravitation. Les équations sont, dans le domaine $\Omega : 0 < z < d$:

$$(1.1) \quad v \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \nabla p = (1 - \alpha(T - T_0))g \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.2) \quad v \cdot \nabla T - K \Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.3) \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Sur $\Gamma_0 : z = 0$, le fluide adhère et la température est donnée. Les conditions aux limites sont donc :

$$(1.4) \quad v = 0, \quad T = T_0 \quad \text{sur } \Gamma_0.$$

Sur $\Gamma_1 : z = d$, nous prendrons des conditions dites abusivement de surface libre, c'est-à-dire que la vitesse normale est nulle et les contraintes tangentielles sont liées à la tension superficielle.

Désignons par $\sigma(v, p)$ le vecteur des contraintes sur Γ_1

$$\sigma_i(v, p) = -pn_i + \nu(v_{i,j} + v_{j,i})n_j.$$

Nous avons

$$(1.5) \quad v \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$(1.6) \quad \sigma_{\tan}(v, p) = \nabla_{\tan} \beta(T) \quad \text{sur } \Gamma_1$$

où u_{tan} est la partie tangentielle du vecteur u ($u_{\text{tan}} = u - (u \cdot n)n$), $\beta(T)$ est le coefficient de tension superficielle que nous approcherons par :

$$(1.7) \quad \beta(T) = \beta_0 - \beta_1(T - T_0)$$

avec

$$\beta_0 = \beta(T_0) \quad \text{et} \quad \beta_1 = -\frac{\partial \beta}{\partial T}(T_0) > 0.$$

Pour la température nous considérerons la condition la plus générale

$$(1.8) \quad A \partial_n T + B(T - T_e) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

où A et B sont des constantes positives et où T_e est une température moyenne de l'extérieur du fluide.

Les équations précédentes admettent toujours la solution dite conductive

$$(1.9) \quad v^0 = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.10) \quad T^0 = T_0 - \tau z \quad \tau = \frac{Bd}{A + Bd} \frac{T_0 - T_e}{d}$$

$$(1.11) \quad p^0 = -g_0 z + \frac{1}{2} \alpha \tau z^2 + \text{Cte}.$$

Il en résulte que v , $\theta = T - T^0$, $\psi = p - p^0$ vérifient, après normalisation :

$$(1.12) \quad -\Delta v + \nabla \psi - R\theta \vec{k} + v \cdot \nabla v = 0 \quad \text{dans } \Sigma : 0 < z < 1$$

$$(1.13) \quad -\Delta \theta - v_3 + Pv \cdot \nabla \theta = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(1.14) \quad \text{div } v = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(1.15) \quad v = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur } S_0 : z = 0$$

$$(1.16) \quad v_3 = 0 \quad \text{sur } S_1 : z = 1$$

$$(1.17) \quad \sigma_{\text{tan}}(v) + mR \nabla_{\text{tan}} \theta = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(1.18) \quad \partial_n \theta + \gamma \theta = 0 \quad \text{sur } S_1$$

où R est le nombre de Rayleigh $R = \frac{\alpha \tau g_0 d^4}{K\nu}$

P est le nombre de Prandtl $P = \nu/K$

$$m = \frac{\beta_1}{d^2 \alpha g_0}, \quad \gamma = \frac{Bd}{A}.$$

Le rapport m entre le nombre de Marangoni $M = mR$ et le nombre de Rayleigh est indépendant du gradient de température et est en $1/d^2$. L'effet de la tension superficielle n'est donc pas négligeable pour des fluides de faible profondeur.

Nous nous intéressons à prouver l'existence pour certaines valeurs de R de solutions non triviales de (1.12)-(1.18), rectangulaires, c'est-à-dire périodiques en x et y et pour lesquelles le mouvement du fluide est confiné dans chaque cellule et la cellule est thermiquement isolée. Ces solutions auront nécessairement la forme :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk}(z) \sin jax \cos kby \\
 v_2 &= \sum_{j,k=0}^{\infty} B_{jk}(z) \cos jax \sin kby \\
 (1.19) \quad v_3 &= \sum_{j,k=0}^{\infty} C_{jk}(z) \cos jax \cos kby \\
 \theta &= \sum_{j,k=0}^{\infty} D_{jk}(z) \cos jax \cos kby \\
 \psi &= \sum_{j,k=0}^{\infty} E_{jk}(z) \cos jax \cos kby .
 \end{aligned}$$

Les paramètres a et b sont positifs (non nuls) mais a priori non fixés.

Dans la partie 2, nous prouvons pour tout $m \geq 0$ l'existence de valeurs propres réelles positives du problème linéarisé, à l'aide d'un théorème de Krein-Rutman. La partie 3 consiste à définir et étudier ce que nous appelons le nombre de Rayleigh critique $R_c(m)$, qui est la plus petite valeur caractéristique du problème linéarisé pour m fixé. Nous prouvons que la courbe $m \rightarrow R_c(m)$ est décroissante, c'est-à-dire que $R_c(m)$ est toujours plus petit que le nombre de Rayleigh habituellement considéré $R_c(0)$. Dans la partie 4 nous prouvons que si R_0 est valeur caractéristique simple (comme par exemple $R_c(m)$), il y a une courbe de solutions non triviales de (1.12)-(1.18) pour R voisin de R_0 . Dans la partie suivante, nous retrouvons les principaux résultats de P. H. Rabinowitz [6] comme un cas particulier de la situation étudiée ici ($m = 0$) et ceux de J. R. A. Pearson [4] comme un cas limite ($m = +\infty$). La partie 6 est un appendice où sont réunis quelques lemmes qui alourdiraient les démonstrations.

2. EXISTENCE DE VALEURS CARACTÉRISTIQUES RÉELLES

Pour qu'il existe une branche de solutions non triviales stationnaires de (1.12)-(1.18) bifurquant de la solution $u = 0$, il faut que le système des équations linéarisées admette une solution non nulle, c'est-à-dire que R apparaisse comme valeur caractéristique de l'opérateur tangent. Nous cherchons donc dans cette partie s'il existe des valeurs caractéristiques réelles positives de l'opérateur tangent.

Les équations linéarisées sont :

$$(2.1) \quad -\Delta v + \nabla \psi - R\theta \vec{k} = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(2.2) \quad -\Delta \theta - v_3 = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(2.3) \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(2.4) \quad v_{\cdot} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{sur } S_0$$

$$(2.5) \quad v_3 = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(2.6) \quad \sigma_{\tan}(v) + mR \nabla_{\tan} \theta = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(2.7) \quad \partial_n \theta + \gamma \theta = 0 \quad \text{sur } S_1.$$

Un calcul similaire à [5], p. 37, montre que si (v, θ, ψ) est une solution assez régulière de (2.1)-(2.7) de la forme (1.19) alors pour tout couple (j, k) , en notant $\omega_{jk}^2 = (ja)^2 + (kb)^2$, C_{jk} et D_{jk} vérifient (en oubliant les indices) :

$$(2.8) \quad L^2 C = R\omega^2 D \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$(2.9) \quad LD = -C \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$(2.10) \quad D(0) = 0, \quad D'(1) + \gamma D(1) = 0$$

$$(2.11) \quad C(0) = C'(0) = 0$$

$$(2.12) \quad C(1) = 0, \quad C''(1) = -mR\omega^2 D(1)$$

avec

$$L = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega^2 \quad \text{et} \quad F' = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Par conséquent, si R est valeur caractéristique de (2.1)-(2.7) alors R doit être valeur caractéristique de (2.8)-(2.12) pour certains couples (j, k) .

Nous noterons $|\cdot|_2$ la norme dans $L^2(0, 1)$. Définissons pour (j, k) fixé, l'espace

$$W = \{D \in H^1(0, 1); D(0) = 0\}$$

muni de la norme

$$\|D\|^2 = |D'|_2^2 + \omega^2 |D|_2^2 + \gamma [D(1)]^2$$

et identifié à son dual, ainsi qu'un opérateur $K_m : W \rightarrow W$ par (cf. lemmes 6.1 et 6.2) $K_m D_1 = D_2$ si et seulement si

$$(2.13) \quad LD_2 = -C \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$(2.14) \quad D'_2(1) + \gamma D_2(1) = 0, \quad D_2(0) = 0$$

où C est la solution de

$$(2.15) \quad L^2 C = \omega^2 D_1$$

$$(2.16) \quad C(0) = C'(0) = 0$$

$$(2.17) \quad C(1) = 0 \quad C''(1) = -m\omega^2 D(1).$$

Il existe une solution (C, D) non triviale de (2.8)-(2.12) si et seulement si R est valeur caractéristique de K_m (c'est-à-dire s'il existe $D \neq 0$ telle que $D = RK_m D$). Nous allons d'abord prouver :

THÉORÈME 2.1 : *Pour tout $m \geq 0$ fixé, l'opérateur K_m admet une valeur caractéristique R réelle, strictement positive, de multiplicité 1 et strictement plus petite en module que toutes les autres valeurs caractéristiques de K_m .*

Il existe une fonction propre D strictement positive dans $]0, 1[$ telle que $D = RK_m D$.

Nous avons reporté à la partie 6 l'étude des systèmes (2.13)-(2.14) et (2.15)-(2.17). L'opérateur $D_1 \rightarrow D_2$ étant continu de W dans $H^7(0, 1)$, K_m est compact. Par conséquent K_m et son adjoint K_m^* ont mêmes valeurs caractéristiques (à la conjugaison dans \mathbb{C} près) avec la même multiplicité. Nous allons prouver que K_m^* est un opérateur intégral (ce qui n'est pas le cas pour K_m), et qu'il conserve le cône des fonctions positives ou nulles sur $[0, 1]$, de manière à pouvoir utiliser un théorème de Krein-Rutman. Cette méthode a déjà été utilisée par R. Temam [8], p. 237, pour la bifurcation de Couette-Taylor.

LEMME 2.1 : *Il existe une fonction k_m continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ strictement positive sur $]0, 1[\times]0, 1[$ telle que $D_1, D_2 \in W$ vérifient $D_2 = K_m^* D_1$ si et seulement si pour tout $z \in]0, 1[$*

$$(2.18) \quad D_2(z) = \int_0^1 k_m(z, z') D_1(z') dz'.$$

Preuve : Cherchons l'adjoint de K_m . Pour $m = 0$, on vérifie que K_0 est autoadjoint. D'autre part, $K_m = K_0 + m\omega^2 A$ où A est défini par

$$(2.19) \quad AD = D(1) D_0$$

D_0 étant la solution de

$$\begin{aligned} LD_0 &= -C_0 \quad \text{dans } (0, 1) \\ D_0(0) &= D_0'(1) + \gamma D_0(1) = 0 \end{aligned}$$

avec

$$L^2 C_0 = 0 \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$C_0(0) = C_0'(0) = C_0(1) = 0; \quad C_0''(1) = -1.$$

Il en résulte que $K_m^* = K_0 + m\omega^2 A^*$ avec

$$(2.20) \quad A^* D = (C_0, D)_2 \hat{D}$$

\hat{D} étant la solution de

$$L\hat{D} = 0 \quad \text{dans } (0, 1), \quad \hat{D}(0) = 0, \quad \hat{D}'(1) + \gamma\hat{D}(1) = 1.$$

En fin de compte si le lemme 2.1 est vrai pour $m = 0$, on a nécessairement pour tout $m \geq 0$:

$$(2.21) \quad k_m(z, z') = k_0(z, z') + m\omega^2 C_0(z') \hat{D}(z).$$

Les fonctions C_0 et \hat{D} étant de classe C^∞ et strictement positives dans $]0, 1[$ (cf. lemme 6.4) il suffit de prouver le lemme pour $m = 0$. D'après les lemmes 6.1 et 6.3, les équations (2.13)-(2.17) équivalent à :

$$D_2(z) = \int_0^1 g(z, z') C(z') dz' \quad \text{et} \quad C(z) = \int_0^1 h(z, z') D_1(z') dz'$$

où h et g sont continues, $h \geq 0$ et $g > 0$ dans $]0, 1[\times]0, 1[$.

Il en résulte que

$$k_0(z, z') = \int_0^1 g(z, z'') h(z'', z') dz''$$

et que $k_0 \geq 0$ dans $]0, 1[\times]0, 1[$.

Prouvons que $k_0 > 0$ dans $]0, 1[\times]0, 1[$. S'il existe (z_0, z'_0) dans $]0, 1[\times]0, 1[$ tel que $k_0(z_0, z'_0) = 0$ alors $h(z, z'_0) = 0$ pour tout $z \in]0, 1[$. Comme la fonction g , la fonction h est symétrique et par conséquent pour tout $z \in]0, 1[$ $h(z'_0, z) = 0$. Cela signifie que la solution C de (2.15)-(2.17) (avec $m = 0$) vérifie $C(z'_0) = 0$ quel que soit le second membre D_1 . Or nous pouvons voir dans la démonstration du lemme 6.4 que ceci entraîne $C \equiv 0$ dans $[0, 1]$ et donc $D_1 = 0$ ce qui est absurde. Nous avons donc prouvé le lemme 2.1.

Preuve du théorème 2.1 : Les hypothèses du théorème de Krein-Rutman [3], p. 274, sur les opérateurs intégraux à noyau positif ou nul, sont vérifiées. Par conséquent, K_m^* (et donc K_m) admet une valeur caractéristique R réelle, strictement positive, strictement plus petite en module que toutes les autres valeurs caractéristiques, et de multiplicité 1. De plus, il existe

$D^* > 0$ p.p. dans $]0, 1[$ telle que $D^* = RK_m^* D^*$. En fait l'opérateur K_m^* étant régularisant, $D^* \in C^\infty(0, 1)$. D'autre part, R est aussi valeur caractéristique simple de K_m et d'après [3], p. 262, théorème 6.1, il existe une fonction propre $D \neq 0$ telle que $D = RK_m D$ et D est dans le cône dual dans W des fonctions positives, i.e.

$$(2.22) \quad \forall E \in W, \quad E \geq 0 \quad (D, E)_W \geq 0.$$

L'opérateur K_m envoyant, pour tout $s \geq 0$, $H^s(0, 1)$ dans $H^{s+4}(0, 1)$, la fonction propre D est C^∞ sur $(0, 1)$. De (2.22) nous déduisons $-LD \geq 0$ dans $(0, 1)$ et $D(1) \geq 0$, et d'après le principe du maximum $D > 0$ dans $]0, 1[$. Remarquons que K_m conservant aussi le cône des fonctions positives, D^* est aussi dans le cône dual

$$(2.23) \quad \forall E \in W, \quad E \geq 0 \quad (D^*, E)_W \geq 0$$

et par suite $D^* > 0$ dans $]0, 1[$.

Le théorème 2.1 est donc prouvé. Remarquons qu'alors R est valeur caractéristique de (2.1)-(2.7), mais que sa multiplicité pour ce problème peut être supérieure à 1 même dans un espace de fonctions de la forme (1.19), puisqu'on peut obtenir la même valeur propre pour des ω_{jk} différents.

3. NOMBRE DE RAYLEIGH CRITIQUE

Nous nous intéressons à déterminer pour m fixé la température la plus basse à partir de laquelle il peut y avoir bifurcation. La valeur caractéristique R du théorème 2.1 dépend en fait de m et ω et nous la noterons ici $R(m, \omega)$. Nous appellerons nombre de Rayleigh critique, noté $R_c(m)$ le nombre :

$$(3.1) \quad R_c(m) = \inf_{\omega > 0} R(m, \omega).$$

Nous voulons prouver dans cette partie que $R_c(m)$ est une valeur caractéristique du problème linéaire (2.1)-(2.7) et que pour une infinité de couples (a, b) , cette valeur caractéristique est simple dans l'espace de fonctions de la forme (1.19).

Nous allons d'abord prouver quelques propriétés de $R(m, \omega)$.

LEMME 3.1 : *La courbe $m \rightarrow R(m, \omega)$ pour $\omega > 0$ fixé est analytique sur $]0, +\infty[$ sauf en un ensemble dénombrable de points isolés. Elle est décroissante. De plus pour tout $m > 0$ et $\omega > 0$,*

$$(3.2) \quad R(m, \omega) \geq \frac{(1 + m^2 \omega^6 \gamma^{-1})^{1/2} - 1}{m^2 \omega^2 \gamma^{-1}} + \frac{\alpha^3}{2 \omega^2 [1 + m(\alpha^3/\gamma)^{1/2}]}$$

avec $\alpha = \Pi^2/4$.

Remarquons que lorsque n tend vers 0 nous retrouvons l'estimation de [5], p. 48 :

$$R(0, \omega) \geq \frac{1}{2} \left[\omega^4 + \frac{\alpha^3}{\omega^2} \right].$$

Preuve : Pour $\omega > 0$ fixé, $m \rightarrow K_m$ étant affine, elle est analytique et on déduit de [1], p. 587, théorème 9, que $m \rightarrow R(m, \omega)$ est analytique sauf en un nombre fini de points sur tout compact de $]0, +\infty[$, où il y a des singularités algébriques. Prouvons maintenant la décroissance :

Soient $m_1, m_2, 0 \leq m_1 < m_2$. Il existe D_1 et D_2 des fonctions positives sur $]0, 1[$ telles que pour $i = 1, 2, R_i K_i D_i = D_i$ où $K_i = K_{m_i}$ et $R_i = R(m_i, \omega)$.

Alors

$$(3.3) \quad (R_2 K_2 - I)(D_2 - D_1) = - (R_2 - R_1) K_2 D_1 + R_1(K_1 - K_2) D_1.$$

Soit D_2^* une fonction telle que $R_2 K_2^* D_2^* = D_2^*$, positive dans $]0, 1[$. On a nécessairement d'après (3.3),

$$(3.4) \quad (R_2 - R_1)(K_2 D_1, D_2^*)_W = R_1[(K_1 - K_2) D_1, D_2^*]_W \\ = R_1(m_1 - m_2) \omega^2 (AD_1, D_2^*)_W.$$

D'après (2.19), $(AD_1, D_2^*)_W = D_1(1)(C_0, D_2^*)_2$.

Les fonctions C_0 et D_2^* étant strictement positives dans $]0, 1[$, $(AD_1, D_2^*)_W \geq 0$, avec égalité si et seulement si $D_1(1) = 0$. Mais d'après le principe du maximum appliqué à (2.9)-(2.10), $D_1(1) = 0$ entraîne ou $D_1 \equiv 0$ dans $(0, 1)$, ou $D_1'(1) < 0$, ce qui est absurde vu (2.10). En fin de compte $(AD_1, D_2^*)_W > 0$.

Prouvons maintenant que $(K_2 D_1, D_2^*)_W > 0$. Nous avons :

$$(K_2 D_1, D_2^*)_W = (D_1, K_2^* D_2^*)_W \\ = R_2^{-1}(D_1, D_2^*)_W \\ = - R_2^{-1}(LD_1, D_2^*)_2.$$

Comme $D_2^* > 0$ et $-LD_1 \geq 0$ dans $]0, 1[$, nous avons $(K_2 D_1, D_2^*)_W \geq 0$ avec égalité si et seulement si $-LD_1 \equiv 0$ dans $(0, 1)$, c'est-à-dire, d'après le principe du maximum $D_1 \equiv 0$ ce qui est absurde. Par suite, (3.4) entraîne que $R_2 - R_1$ est du signe de $m_1 - m_2$, c'est-à-dire que $m \rightarrow R(m, \omega)$ est décroissante strictement.

Montrons maintenant l'estimation (3.2). On considère le système (2.8)-(2.12) où D est une fonction propre de K_m . En multipliant (2.8) par C nous obtenons :

$$R(m, \omega) = \frac{|C''|_2^2 + 2 \omega^2 |C'|_2^2 + \omega^4 |C|_2^2}{\omega^2 [(D, C)_2 - m C'(1) D(1)]}.$$

Et en multipliant (2.9) par D , nous avons pour tout $\varepsilon > 0$

$$(3.5) \quad |D'|_2^2 + \omega^2 |D|_2^2 + \gamma |D(1)|^2 \leq (D, C)_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} |C|_2^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |D|_2^2.$$

En prenant $\varepsilon = \omega^{-2}$ nous en déduisons :

$$\omega^4 |D|_2^2 \leq |C|_2^2$$

et en réutilisant (3.5)

$$(3.6) \quad \omega^2 (D, C)_2 \leq |C|_2^2 \quad \text{et} \quad |D(1)| \leq \gamma^{-1/2} \omega^{-1} |C|_2.$$

D'autre part, $C(1) = 0$ est un minimum de C et $C'(1) = \int_0^1 C''(z) dz$, donc

$$(3.7) \quad 0 \leq -C'(1) \leq |C''|_2$$

ainsi

$$R \geq \frac{|C''|_2^2 + \omega^4 |C|_2^2}{|C|_2^2 + m\omega\gamma^{-1/2} |C|_2 |C''|_2}$$

c'est-à-dire

$$R \geq g(t)$$

où

$$t = |C''|_2 / |C|_2 \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{t^2 + \omega^4}{1 + m\omega\gamma^{-1/2} t}.$$

On peut alors vérifier que

$$(3.8) \quad R \geq \inf_{t > 0} g(t) = 2 \frac{(1 + m^2 \omega^6 \gamma^{-1})^{1/2} - 1}{m^2 \omega^2 \gamma^{-1}}.$$

D'autre part, pour toute fonction $E \in H^1(0, 1)$ telle que $E(0) = 0$ nous avons

$$|E'|_2^2 \geq \alpha |E|_2^2.$$

Par suite, en prenant $\varepsilon = \alpha^{-1}$ dans (3.4) nous obtenons

$$\alpha |D|_2^2 \leq |D'|_2^2 \leq \frac{1}{2\alpha} |C|_2^2 + \frac{\alpha}{2} |D|_2^2$$

et

$$\alpha^2 |D|_2^2 \leq |C|_2^2.$$

(3.5) donne alors

$$(3.9) \quad (C, D)_2 \leq \alpha^{-1} |C|_2^2 \quad \text{et} \quad |D(1)| \leq (\alpha\gamma)^{-1/2} |C|_2.$$

Ainsi

$$R \geq \frac{|C''|_2^2}{\omega^2 [\alpha^{-1} |C|_2^2 + (\alpha\gamma)^{-1/2} m |C|_2 |C''|_2]}$$

$$R \geq h(t)$$

$$\text{où } h(t) = \frac{t^2}{\omega^2 [\alpha^{-1} + (\alpha\gamma)^{-1/2} mt]} \quad \text{et } t = |C''|_2 / |C|_2 \text{ varie de } \alpha \text{ à } +\infty.$$

La fonction h étant croissante, nous obtenons

$$(3.10) \quad R \geq h(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\omega^2 [1 + m(\alpha^3/\gamma)^{1/2}]}$$

ce qui avec (3.8) donne bien l'estimation (3.2).

Nous utilisons le lemme 3.1 pour en déduire le comportement du nombre de Rayleigh critique $R_c(m)$ lorsque m varie.

THÉORÈME 3.1 :

- i) Pour tout $m \geq 0$ fixé, $R_c(m)$ est atteint en un nombre fini de valeurs de ω .
- ii) $m \rightarrow R_c(m)$ est continue et décroissante sur \mathbb{R}^+ .

Preuve :

i) La fonction k_m de (2.18) dépend de ω et $\omega \rightarrow k_m(\omega)$ est analytique de $]0, +\infty[$ dans $L^2(]0, 1[\times]0, 1[)$.

Par suite l'opérateur $S(\omega)$ défini de $L^2(0, 1)$ dans $L^2(0, 1)$ par $S(\omega) D_1 = D_2$ avec (2.18) est analytique en ω . L'opérateur $S(\omega)$ étant compact, $R(m, \omega)$ est une valeur caractéristique isolée simple de $S(\omega)$ et d'après Dunford-Schwartz, p. 587, $\omega \rightarrow R(m, \omega)$ est une fonction analytique sur $]0, +\infty[$ sauf en un nombre fini de points sur tout compact où elle présente des singularités algébriques. D'autre part, d'après l'estimation (3.2), $R(m, \omega)$ ne peut atteindre son minimum que sur un compact $[r, s]$ de $]0, +\infty[$ et du fait de l'analyticité en ω , ce minimum n'est atteint qu'un nombre fini de fois sur ce compact.

ii) La décroissance de $R_c(m)$ résulte de la décroissance de $R(m, \omega)$ en m . En effet, pour tout $\omega > 0$, si $m_1 \geq m_2$

$$R(m_2, \omega) \geq R(m_1, \omega) \geq R_c(m_1)$$

et par suite $R_c(m_2) \geq R_c(m_1)$.

Prouvons maintenant la continuité de $R_c(m)$. L'application $m \rightarrow K_m$ étant affine, elle est analytique, par conséquent, comme pour ω , $m \rightarrow R(m, \omega)$ est au moins continue.

Soit $m_0 \geq 0$ et une suite de réels positifs m_n convergeant vers m_0 . Cette suite est bornée et nous noterons M un majorant et \bar{m} un minorant. Étant donné la décroissance de R_c , la suite $R_c(m_n)$ est majorée par $R_c(\bar{m})$ et donc bornée ; D'autre part il existe une suite de réels $\omega_n \geq 0$ tels que pour tout n , $R(m_n, \omega_n) = R_c(m_n)$. Dans l'estimation (3.2), le second membre, que nous noterons $G(m, \omega)$ est pour ω fixé une fonction décroissante de m . Par conséquent nous obtenons pour tout n l'encadrement

$$(3.11) \quad R_c(\bar{m}) \geq R(m_n, \omega_n) \geq G(M, \omega_n).$$

Ceci entraîne que la suite ω_n reste dans un compact de $]0, +\infty[$. Notons ω_0 la limite d'une sous-suite ω'_n de la suite ω_n . La fonction $R(m, \omega)$ étant continue par rapport à chaque variable, elle est continue par rapport au couple (m, ω) et la suite $R(m_n, \omega_n)$ converge vers $R(m_0, \omega_0)$. Par passage à la limite pour tout $\omega > 0$ fixé sur l'inégalité

$$(3.12) \quad R(m_n, \omega_n) \leq R(m_n, \omega)$$

nous déduisons que $R(m_0, \omega_0) = R_c(m_0)$.

Ainsi, $R_c(m_0)$ est un point d'accumulation de la suite $R_c(m_n)$ et c'est nécessairement le seul. La suite $R_c(m_n)$ converge donc vers $R_c(m_0)$, d'où la continuité de $m \rightarrow R_c(m)$.

Pour $m \geq 0$ nous voulons maintenant prouver que le nombre de Rayleigh $R_c(m)$ est valeur propre simple du problème linéaire (2.1)-(2.7) dans un espace de fonctions de la forme (1.19) pour une infinité de couples (a, b) .

Nous avons vu que $R_c(m)$ est atteint par un nombre fini de valeurs de ω : $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. Alors nous prouvons

THÉORÈME 3.2 : *Mis à part un ensemble dénombrable de couples (a, b) isolés, tous les couples (a, b) de l'arc $a^2 + b^2 = \omega_n^2$, $a > 0$, $b > 0$ admettent $R_c(m)$ comme plus petite valeur caractéristique, simple, de (2.1)-(2.7) pour des fonctions de la forme (1.19).*

La démonstration reprend celle de P. H. Rabinowitz [5].

Soient $a > 0$ et $b > 0$ tels que $a^2 + b^2 = \omega_n^2$. Dans un espace de fonctions de la forme (1.19), si $R_c(m) = R_c$ est valeur caractéristique de (2.1)-(2.7), alors R_c est valeur caractéristique de (2.8)-(2.12) pour un certain nombre de $\omega_{jk}^2 = (ja)^2 + (kb)^2$. Ce nombre de ω_{jk} est fini à cause de l'estimation (3.2). Réciproquement, tout $R(m, \omega_{jk})$ est valeur caractéristique simple de (2.1)-(2.7). Pour que $R_c(m)$ soit valeur caractéristique simple de (2.1)-(2.7) il faut

et il suffit qu'il n'y ait qu'un seul couple (j, k) tel que $R(m, \omega_{jk}) = R_c(m)$ (ce couple étant nécessairement $(1, 1)$ du fait du choix de (a, b)).

Or $R(m, \omega_{jk}) = R_c(m)$ si et seulement si il existe $i, 1 \leq i \leq n$ tel que

$$(3.13) \quad (ja)^2 + (kb)^2 = \omega_i^2$$

et on peut vérifier que le nombre de couples (j, k) tels que (3.13) est fini.

4. EXISTENCE DE BRANCHES DE BIFURCATION

Nous voulons prouver dans cette partie qu'il existe des branches de solutions non nulles de (1.12)-(1.18) bifurquant de la solution triviale $v = 0$. En d'autres termes, nous voulons prouver que le fluide n'est pas nécessairement au repos et qu'il peut y avoir un mouvement convectif.

Nous supposons que a et b sont fixés (non nuls) et que R_0 est valeur caractéristique simple de (2.1)-(2.7). Nous noterons donc $\bar{v}^0 = (v^0, \theta^0, \psi^0)$ la fonction propre associée (unique à un facteur près). De plus, il existe un couple (j, k) unique tel que R_0 est valeur caractéristique simple de (2.8)-(2.12) pour $\omega = [(ja)^2 + (kb)^2]^{1/2}$ et nous supposons que $R_0 = R(m, \omega)$ pour ce nombre.

Définissons quelques espaces. Notons C le pavé périodique

$$C =]0, 2\pi/a[\times]0, 2\pi/b[\times]0, 1[.$$

Pour $s \geq 0$ soit U l'espace des $\bar{v} = (v, \theta, \psi)$ de la forme (1.19), vérifiant (1.14)-(1.16), (1.18) tels que

$$v \in (H^{s+2}(C))^3, \quad \theta \in H^{s+2}(C), \quad \nabla\psi \in H^s(C).$$

D'autre part, soit V l'espace des fonctions $\bar{f} = (f, g, h)$ où $f \in (H^s(C))^3$, $g \in H^s(C)$, $h \in (H^{s+1/2}(\partial C \cap S_1))^2$ et f, g, h sont respectivement de la même forme que v, θ et $\nabla_{\tan} \theta$ sur S_1 .

On note F l'application de $\mathbb{R} \times U \rightarrow V$ définie par

$$(4.1) \quad F(R, \bar{v}) = \bar{f} = (f, g, h)$$

si les premiers membres de (1.12), (1.13), (1.17) sont respectivement égaux à f, g, h . Nous cherchons donc les solutions non triviales ($\bar{v} \neq 0$) de l'équation

$$(4.2) \quad F(R, \bar{v}) = 0.$$

Pour R voisin de R_0 et \bar{v} petit, nous pouvons vérifier que F se décompose en

$$(4.3) \quad F(R, \bar{v}) = \Lambda \bar{v} + (R - R_0) l\bar{v} + Q(\bar{v})$$

où $\Lambda = F_{\bar{v}}(R_0, 0)$ ($\Lambda\bar{v}$ est égal aux premiers membres de (2.1), (2.2), (2.6) avec $R = R_0$).

l est un opérateur linéaire continu de U sur V

$$(4.4) \quad l\bar{v} = (-\theta\vec{k}, 0, m \nabla_{\tan} \theta)$$

et Q est quadratique continu de U sur V (cf. lemme 6.5)

$$(4.5) \quad Q(\bar{v}) = (v \cdot \nabla v, Pv \cdot \nabla \theta, 0).$$

Quelle que soit la méthode utilisée pour construire la branche de bifurcation (séries analytiques, point fixe, ...), nous sommes amenés à prouver qu'il existe sur V la décomposition énoncée par le lemme suivant :

LEMME 4.1 : *Pour tout $\bar{f} \in V$ il existe un couple unique $(R, \bar{v}) \in \mathbb{R} \times U$ tel que*

$$(4.6) \quad \bar{f} = \Lambda\bar{v} + Rl\bar{v}_0$$

$$(4.7) \quad \int_c \theta v_3^0 dx = 0.$$

Si ce lemme est vérifié, d'après M. G. Crandall [6], p. 23, il y a bifurcation au voisinage de la valeur caractéristique $R = R_0$, c'est-à-dire :

THÉORÈME 4.1 : *Il existe $\varepsilon > 0$ et des fonctions de classe C^1 , $R :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{v} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ telles que $R(0) = R_0$ et $\bar{v}(0) = 0$, et pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $(R(t), t(\bar{v}^0 + \bar{v}(t)))$ est solution du problème non linéaire (1.12)-(1.18). De plus toute solution (R, \bar{u}) non triviale de (1.12)-(1.18), proche de $(R_0, 0)$ est égale à $(R(t), t(\bar{v}^0 + \bar{v}(t)))$ pour un certain $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.*

En fait, le théorème utilisé pour ce résultat permet d'imposer en plus sur $\bar{v}(t)$ la condition (4.7).

Preuve du lemme 4.1 : Dans un premier temps nous chercherons une condition nécessaire sur \bar{f} pour qu'il existe une solution de l'équation $\Lambda\bar{v} = \bar{f}$. Pour cela nous prouverons que le problème adjoint homogène admet une solution non triviale, la condition cherchée étant bien sûr l'orthogonalité par rapport à cette solution. Nous prouverons ensuite que cette condition est aussi suffisante, et que la condition (4.7) entraîne l'unicité de la solution de $\Lambda\bar{v} = \bar{f}$. Nous en déduirons la décomposition de V décrite par le lemme.

Soit W l'espace des fonctions $\theta \in H^1(C)$ de la forme (1.19), muni du produit scalaire

$$(\theta_1, \theta_2)_W = \int_C \nabla \theta_1 \cdot \nabla \theta_2 \, dx + \gamma \int_{S_1 \cap \partial C} \theta_1 \theta_2 \, ds .$$

Le nombre R_0 est valeur caractéristique simple de l'opérateur $T : W \rightarrow W$ défini par $T\theta_1 = \theta_2$ si

$$(4.8) \quad -\Delta v + \nabla \psi - \theta_1 \vec{k} = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(4.9) \quad -\Delta \theta_2 - v_3 = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(4.10) \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(4.11) \quad v = 0, \quad \theta_2 = 0 \quad \text{sur } S_0$$

$$(4.12) \quad v_3 = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(4.13) \quad \sigma_{\tan}(v) + m \nabla_{\tan} \theta_1 = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(4.14) \quad \partial_n \theta_2 + \gamma \theta_2 = 0 \quad \text{sur } S_1 .$$

Cet opérateur T étant continu de W dans $H^3(C)$ (cf. lemme 6.6) il est compact. Son adjoint T^* a donc les mêmes valeurs propres, avec la même multiplicité. Par conséquent il existe $\theta^* \in W$ telle que $\theta^* \neq 0$ et $R_0 T^* \theta^* = \theta^*$. La fonction θ^* est unique à un facteur près. Nous pouvons prouver qu'il existe alors des fonctions v^* et ψ^* , de la forme (1.19) telles que (v^*, θ^*, ψ^*) vérifie (2.1)-(2.5) avec $R = R_0$, et les conditions aux limites :

$$(4.15) \quad \sigma_{\tan}(v^*) = 0 \quad \text{sur } S_1$$

$$(4.16) \quad \partial_n \theta^* + \gamma \theta^* = -mR_0 v_{3,3}^* \quad \text{sur } S_1 .$$

Pour ce qui est de la régularité, le lemme 6.6 entraîne que les fonctions $v^0, \psi^0, \theta^0, v^*, \psi^*, \theta^*$ sont de classe C^∞ sur Σ .

On remarque alors qu'étant donnée $\vec{f} = (f, g, h)$ dans V , une condition nécessaire pour qu'il existe $\bar{v} \in U$ solution de $\Lambda \bar{v} = \vec{f}$ est, puisque (v^*, θ^*, ψ^*) est solution du problème adjoint homogène :

$$(4.17) \quad \int_C f v^* \, dx + R_0 \int_C g \theta^* \, dx + \int_{\partial C \cap S_1} h v^* \, ds = 0 .$$

Nous prouverons plus loin (lemme 4.2) que cette condition est suffisante et que (4.7) assure l'unicité de la solution \bar{v} . Il suffit alors pour achever la

démonstration du lemme 4.1 de vérifier que le coefficient de R lorsqu'on applique (4.17) à $\bar{f} - B(R, \bar{v}_0)$ n'est pas nul. Ce coefficient est :

$$-\int_C \theta^0 v_3^* dx + m \int_{\partial C \cap S_1} \theta^0 v_{3,3}^* ds = -(\theta^0, \theta^*)_W.$$

Mais nous avons supposé que $R_0 = R(m, \omega)$ pour ω défini au début de cette partie. La multiplicité de R_0 , égale à 1 entraîne que

$$\theta^0(x, y, z) = D(z) \cos jax \cos kby$$

et

$$\theta^*(x, y, z) = D^*(z) \cos jax \cos kby$$

et par conséquent

$$(\theta^0, \theta^*)_W = \frac{\Pi^2}{ab} (D, D^*)_W$$

où W est défini dans la partie 2. Or D et D^* sont des fonctions propres des opérateurs K_m et K_m^* et nous avons vu dans la démonstration du lemme 3.1 que $(D, D^*)_W \neq 0$.

LEMME 4.2 : *Étant donné $\bar{f} \in V$, la condition (4.17) est nécessaire et suffisante pour qu'il existe $\bar{v} \in U$ tel que $\Lambda \bar{v} = f$. La solution \bar{v} est rendue unique par la condition (4.7).*

Preuve : D'après le lemme 6.6, il existe des fonctions v^1, θ^1, ψ^1 uniques de la forme (1.19), telles que $\bar{v}^1 = (v^1, \theta^1, \psi^1)$ est dans U , vérifie (2.3)-(2.5), (2.7) et

$$(4.18) \quad -\Delta v^1 + \nabla \psi^1 = f \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(4.19) \quad -\Delta \theta^1 - v_3^1 = g \quad \text{dans } \Sigma$$

$$(4.20) \quad \sigma_{\tan}(v^1) = h \quad \text{sur } S_1.$$

Alors $\Lambda \bar{v} = \bar{f}$ signifie exactement

$$(4.21) \quad R_0 T\theta - \theta = -\theta^1.$$

Ce problème admet une solution si et seulement si $(\theta^1, \theta^*)_W = 0$, ce qui équivaut à (4.17) et il y a unicité si $(\theta, \theta^*)_W = 0$, ce qui équivaut à (4.7).

5. COMPORTEMENT DE $R(m, \omega)$ QUAND m TEND VERS $+\infty$: LIEN AVEC LES RÉSULTATS DE PEARSON

Remarquons d'abord que lorsque $m = 0$ nous avons retrouvé les principaux résultats de [5], c'est-à-dire qu'il existe pour tout $\omega > 0$ fixé une valeur caractéristique réelle positive simple $R(0, \omega)$ du problème (2.8)-(2.12) et que le minimum R_c en ω des $R(0, \omega)$ est pour une infinité de couples (a, b) une valeur caractéristique simple de (2.1)-(2.7). De plus, il existe une branche de solutions non triviales du problème non linéaire partant de $R = R_c, v = 0$. Cependant Rabinowitz n'utilise pas le théorème de Krein-Rutman car l'opérateur linéarisé est symétrique.

Nous nous intéressons maintenant au cas où m est très grand de manière à retrouver les résultats de Pearson [4], qui, lui, étudie le cas $R = 0$.

LEMME 5.1 :

a) Pour $\omega > 0$ fixé, $R(m, \omega)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.

b) La fonction $m \rightarrow mR(m, \omega)$ est continue, strictement croissante et a une limite finie $M_0(\omega)$ quand m tend vers $+\infty$.

Preuve : a) étant une conséquence de b) nous ne prouvons que la deuxième assertion. Notons $M(m, \omega) = mR(m, \omega)$. Prouvons sommairement la croissance de $m \rightarrow M(m, \omega)$. Pour tout $\omega > 0$ fixé et $m > 0$, il existe $D_m \in W, D_m \geq 0$ telle que

$$(5.1) \quad R(m, \omega) K_0 D_m + M(m, \omega) \omega^2 AD_m = D_m$$

ce qui traduit $R(m, \omega) K_m D_m = D_m$.

Nous supposons que D_m et $R(m, \omega)$ dépendent régulièrement de m pour simplifier la démonstration. En dérivant (5.1) par rapport à m nous obtenons (en abrégeant les notations) :

$$(5.2) \quad (RK_m - I) \partial_m D_m = -\partial_m R K_0 D_m - \partial_m M \omega^2 AD_m.$$

Nécessairement, le second membre de (5.2) est orthogonal dans W à D_m^* solution, que nous choisirons positive dans $(0, 1)$ de

$$(5.3) \quad R(m, \omega) K_m^* D_m^* = D_m^*.$$

Par suite

$$(5.4) \quad \partial_m M \omega^2 (AD_m, D_m^*)_W = -\partial_m R (K_0 D_m, D_m^*)_W.$$

Or, par un raisonnement analogue à celui utilisé pour la décroissance de $R(m, \omega)$ nous prouvons que

$$(AD_m, D_m^*)_W > 0$$

et d'autre part, on vérifiera qu'on a aussi

$$(K_0 D_m, D_m^*)_W > 0.$$

Il en résulte que $\partial_m M$ est du signe opposé de $\partial_m R$ c'est-à-dire que $m \rightarrow M(m, \omega)$ est strictement croissante. La régularité de cette fonction est la même que pour $m \rightarrow R(m, \omega)$, c'est-à-dire analytique par morceaux et continue. Étudions sa limite pour m tendant vers $+\infty$. Pour tout $m \geq 0$ il existe $D_m^* \in W$, positive dans $]0, 1[$, de norme 1 dans W telle que

$$(5.5) \quad R(m, \omega) K_0 D_m^* + M(m, \omega) \omega^2 A^* D_m^* = D_m^*$$

et par suite

$$(5.6) \quad R(m, \omega)(K_0 D_m^*, D_m^*)_W + M(m, \omega) \omega^2 (A^* D_m^*, D_m^*)_W = 1.$$

Mais il existe $r \geq 0$ limite de $R(m, \omega)$ et D^* limite faible dans W d'une sous-suite de D_m^* , quand m tend vers $+\infty$. L'opérateur étant compact nous obtenons

$$(5.7) \quad \omega^2 M(m, \omega) A^* D_m^* \rightarrow D^* - r K_0 D^* \quad \text{dans } W \text{ faible}$$

$$(5.8) \quad \omega^2 M(m, \omega) (A^* D_m^*, D_m^*)_W \rightarrow 1 - r (K_0 D^*, D^*)_W.$$

Cependant A^* est à valeurs dans une droite de W (d'après (2.20)) aussi la convergence faible (5.7) est en fait une convergence forte dans W . Par suite

$$(5.9) \quad \omega^2 M(m, \omega) (A^* D_m^*, D_m^*)_W \rightarrow |D^*|_W^2 - r (K_0 D^*, D^*)_W.$$

Il en résulte que $|D^*|_W = 1$ et $D^* \neq 0$.

L'opérateur A^* étant compact, $A^* D_m^*$ converge vers $A^* D^*$ dans W fort. Cette limite est non nulle, car $D^* \neq 0$ et D^* étant limite forte dans L^2 de fonctions positives ou nulles, elle est positive ou nulle dans $(0, 1)$. La convergence (forte) de (5.7) entraîne que $M(m, \omega)$ a une limite $M_0(\omega)$ quand m tend vers $+\infty$.

Par suite $r = 0$ et d'après (5.7) :

$$(5.10) \quad \omega^2 M_0(\omega) A^* D^* = D^*.$$

De même le problème adjoint admet une solution non nulle (toute valeur propre non nulle de A^* est valeur propre de A car A est compact)

$$(5.11) \quad \exists D \neq 0 \quad \omega^2 M_0(\omega) A D = D.$$

Cette équation prouve que $M_0(\omega)$ est bien valeur caractéristique de l'opérateur étudié par Pearson, valeur que l'on peut calculer explicitement

en fonction de ω . Remarquons cependant que par son passage à la limite sur (3.2) nous obtenons sans calculer $M_0(\omega)$ l'estimation :

$$(5.12) \quad M_0(\omega) \geq \omega \gamma^{1/2} + \frac{\alpha^{3/2} \gamma^{1/2}}{2 \omega^2}$$

qui donne le comportement de $M_0(\omega)$ quand ω tend vers 0 ou $+\infty$.

En résumé, la fonction pour $\omega > 0$ fixé, $m \rightarrow M(m, \omega)$ étant inversible, nous pouvons énoncer les résultats précédents en fonction du nombre de Marangoni M :

— Pour tout $\omega > 0$ fixé, il existe $M_0(\omega) > 0$ et une fonction $M \rightarrow R(M, \omega)$ continue, positive, définie sur $]0, M_0(\omega)[$, décroissant de $R(0, \omega)$ (valeur étudiée par Rabinowitz) à 0 (Pearson), décrivant la plus petite valeur caractéristique de (2.8)-(2.12).

6. APPENDICE

LEMME 6.1 : $s \geq 0$. Pour toute fonction $C \in H^s(0, 1)$ il existe une unique solution $D_2 \in H^{s+2}(0, 1)$ du problème (2.13)-(2.14) dépendant continûment de C . De plus il existe une fonction g définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$, continue et à dérivées premières bornées, strictement positive dans $]0, 1[\times]0, 1[$ telle que (2.13)-(2.14) soit équivalent à

$$(6.1) \quad D_2(z) = \int_0^1 g(z, z') C(z') dz' .$$

Preuve : L'existence et l'unicité de D_2 dans $H^1(0, 1)$ sont classiques puisque (2.13)-(2.14) peut s'écrire sous forme faible comme un problème variationnel dans l'espace W défini dans la partie 2. Trouver $D_2 \in W$ telle que :

$$(6.2) \quad \forall E \in W \quad (D_2, E)_W + \omega^2 (D_2, E)_2 = (C, E)_2 .$$

La régularité de la solution est la même que pour le Laplacien dans $(0, 1)$.

Soit la fonction g_1 définie par

$$g_1(z, z') = \frac{\sinh \omega z' [\gamma \sinh \omega (1 - z) + \omega \cosh \omega (1 - z)]}{\omega [\gamma \sinh \omega + \cosh \omega]} .$$

La régularité de g entraîne que D_2 définie par (6.1) est dans W . Il faut alors vérifier (6.2) pour des fonctions $E \in W \cap C^\infty(0, 1)$ pour prouver qu'on obtient par (6.1) la solution de (2.13)-(2.14) mais nous n'écrivons pas ces calculs ici.

LEMME 6.2 : Pour toute fonction $D_1 \in H^s(0, 1)$ et tout réel α il existe une unique solution $C \in H^{s+4}(0, 1)$ de

$$(6.3) \quad L^2 C = \omega^2 D_1 \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$(6.4) \quad C(0) = C'(0) = C(1) = 0; \quad C''(1) = \alpha$$

dépendant continûment des données.

Preuve : Soit V l'espace des fonctions $C \in H^2(0, 1)$ telles que $C(0) = C'(0) = C(1) = 0$, muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (C_1, C_2)_V &= \int_0^1 (C_1'' C_2'' + 2 \omega^2 C_1' C_2' + \omega^4 C_1 C_2) dz \\ &= (LC_1, LC_2)_2. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz il existe une unique fonction $C \in V$ telle que pour tout $E \in V$

$$(C, E)_V = \omega^2 (D_1, E)_2 + \alpha E'(1).$$

Lorsque E décrit l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans $(0, 1)$ nous obtenons (6.3) au sens des distributions, et par conséquent $C^{(4)} \in L^2(0, 1)$. Ceci entraîne que $C \in H^4(0, 1)$. On vérifie ensuite les conditions aux limites à partir de la formulation variationnelle. Maintenant, si $D_1 \in H^{s+4}(0, 1)$ avec $s \leq 2$, $C^{(4)} \in H^s(0, 1)$ et par suite $C \in H^{s+4}(0, 1)$. Si $2 < s \leq 4$, comme $C \in H^6(0, 1)$, $C^{(4)} \in H^s(0, 1)$ et par suite C est encore dans $H^{s+4}(0, 1)$. Un raisonnement par récurrence permet de généraliser ce résultat à tout $s \geq 0$.

LEMME 6.3 : Il existe une fonction h , C^2 par rapport à chaque variable, positive ou nulle sur $[0, 1] \times [0, 1]$ telle que lorsque $\alpha = 0$ la solution C de (6.3)-(6.4) est égale à

$$C(z) = \int_0^1 h(z, z') D_1(z') dz'.$$

D'après le lemme 6.1 la fonction $C_1(z) = \int_0^1 h_1(z, z') D_1(z') dz'$ avec $h_1(z, z') = \int_0^1 g(z, z'') g(z'', z') dz''$ vérifie (6.3) avec les conditions aux bords $C_1(0) = C_1(1) = C_1''(0) = C_1''(1) = 0$.

Par conséquent, $C(z) = C_1(z) + C_1'(0) h_2(z)$ où h_2 est la solution du problème

$$L^2 h_2 = 0 \quad \text{dans } (0, 1)$$

$$h_2(0) = h_2(1) = h_2''(1) = 0; \quad h_2'(0) = -1$$

on a

$$h_2(z) = [\sinh \omega \cosh \omega - \omega]^{-1} \times \\ \times [(1-z) \sinh \omega z - z \cosh \omega \sinh \omega (1-z)].$$

En fin de compte on obtient

$$h(z, z') = h_1(z, z') + h_2(z) \frac{\partial h_1}{\partial z}(0, z').$$

D'autre part, comme on a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega^2 \right) h_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \omega^2 \right) h_1 = \omega^4 g$$

et $h_1 = 0$ si z ou z' sont égaux à 0 ou 1, il en résulte que h_1 est au moins C^2 par rapport à chaque variable, de même pour h . De plus h est continue sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

Prouvons que $h \geq 0$ sur $]0, 1[\times]0, 1[$. Il suffit de montrer que si D_1 est positive ou nulle sur $]0, 1[$ alors il en est de même pour C la solution de (6.3)-(6.4) ($\alpha = 0$). Si D_1 est dans $H^1(0, 1)$ alors C est au moins de classe C^2 . Deux cas se présentent :

i) $C''(0) \leq 0$. Alors d'après le principe du maximum $E = LC$ qui vérifie $-LE = -\omega^2 D_1$ dans $(0, 1)$, $E(0) \leq 0$ et $E(1) = 0$ est soit nulle sur tout $[0, 1]$, soit strictement négative dans $]0, 1[$. Le même raisonnement appliqué à C entraîne que C est soit nulle sur $[0, 1]$ soit strictement positive dans $]0, 1[$.

ii) $C''(0) > 0$. Alors il existe $z_0 > 0$ tel que $C > 0$ dans $]0, z_0[$ et $C''(z_0) = 0$. (En effet, pour que $C(1) = 0$ il faut nécessairement que C'' s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$ et on prend z_0 le plus petit des z tels que $C''(z) = 0$). D'après i), $C \geq 0$ dans $[z_0, 1]$ et par suite sur $[0, 1]$. La fonction C étant croissante sur $[0, z_0]$ on a $C(z_0) > 0$. Par suite, sur $[z_0, 1]$ C ne peut s'annuler qu'en 1, et $C > 0$ sur $]0, 1[$.

LEMME 6.4 : La solution \hat{D} de

$$L\hat{D} = 0 \quad \text{dans } (0, 1), \quad \hat{D}(0) = 0, \quad \hat{D}'(1) + \gamma\hat{D}(1) = 1$$

est

$$\hat{D}(z) = (\omega \cosh \omega + \gamma \sinh \omega)^{-1} \sinh \omega z.$$

La solution C_0 de

$$L^2 C_0 = 0 \quad \text{dans } (0, 1), \quad C_0(0) = C_0(1) = C_0'(0) = 0,$$

$$C_0''(1) = -1$$

est

$$C_0(z) = - [\omega(\sinh 2\omega - 2\omega)]^{-1} [\omega z \sinh \omega(1-z) - (1-z) \sinh \omega \sinh \omega z].$$

LEMME 6.5 : Soient $r > 3/2$ et s , $0 \leq s \leq r$. Si $f \in H^r(C)$ et $g \in H^s(C)$ alors $fg \in H^s(C)$ et il existe $k > 0$ tel que

$$|fg|_s \leq k |f|_s |g|_r.$$

Preuve : Si $r = s$ alors le lemme est vrai car $H^r(C)$ est une algèbre de Banach. Si $s = 0$, comme $f \in L^\infty(C)$ le résultat est encore vrai. Pour $0 < s < r$ on utilise le fait que $H^s(C)$ est un espace interpolé de $H^r(C)$ et $L^2(C)$.

LEMME 6.6 : Soit $s \geq 0$. Si $f \in H^s(C)$ et $h \in H^{s+1/2}(\partial C \cap S_1)$ avec $h \cdot n = 0$ admettent $2\pi/a$ et $2\pi/b$ comme périodes en x et y , il existe des fonctions de même période $v \in H^{s+2}(C)$ et $\nabla\psi \in H^s(C)$ uniques telles que :

$$(6.5) \quad -\Delta v + \nabla\psi = f \quad \text{dans } C$$

$$(6.6) \quad \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } C$$

$$(6.7) \quad v = 0 \quad \text{sur } S_0 \cap \partial C$$

$$(6.8) \quad v_3 = 0, \quad \sigma_{\tan}(v) = h \quad \text{sur } S_1 \cap \partial C.$$

De plus, (v, ψ) dépendent continûment des données.

En effet, sur l'espace Z des fonctions $v \in H^1(C)$ de périodes $2\pi/a$, $2\pi/b$, à divergence nulle, à trace sur S_0 nulle, à trace normale sur S_1 nulle, on définit une forme bilinéaire coercive sur Z par

$$a(v, w) = \sum_{i,j} \int_C \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})(w_{i,j} + w_{j,i}) dx.$$

Il existe $v \in Z$ unique telle que pour tout $w \in Z$

$$a(v, w) = \int_C fw dx + \int_{\partial C \cap S_1} hw ds.$$

Pour w à support compact dans C on en déduit l'existence d'une fonction ψ telle que (6.5) est vérifié au sens des distributions. On définit alors des contraintes tangentielles par la formule de Green pour tout $w \in Z$

$$-\int_C (-\Delta v + \nabla\psi) w dx + a(v, w) = \langle \sigma_{\tan}(v), w \rangle_{-1/2, 1/2}.$$

Ceci est loisible car l'ensemble des traces tangentielles des éléments de Z est $\{\varphi \in H^{1/2}(\partial C \cap S_1) ; \varphi \cdot n = 0\}$.

On a donc $\sigma_{\tan}(v) = h$ dans $H^{-1/2}(\partial C \cap S_1)$ et par suite dans $H^{s+1/2}(\partial C \cap S_1)$.

La régularité provient des résultats de Solonnikov et Skadilov [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, T. 1, New-York, Interscience 1958.
- [2] P. C. FIFE, D. D. JOSEPH, *Existence of convective solutions of the generalized Bénard problem which are analytic in their norms*, Arch. Rat. Mech. Anal., 33, 1969, 116-138.
- [3] M. G. KREIN, M. A. RUTMAN, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Translations AMS, Series 1, 10, 1962, 199-325.
- [4] J. R. A. PEARSON, *On convection cells induced by surface tension*. J. Fluid. Mech., 4, 489-500, 1958.
- [5] P. H. RABINOWITZ, *Existence and non uniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem*, Arch. Rat. Mech. Anal., 29, 32-57, 1968.
- [6] P. H. RABINOWITZ, *Applications of Bifurcation theory*, Academic Press, New-York, 1977.
- [7] V. A. SOLONNIKOV, V. E. SKADILOV, *On a boundary value problem for the Navier-Stokes equations*, Proc. Steklov Inst. Math., 125, 1973, 186-199.
- [8] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, 1977.