

P. LABORDE

Q. S. NGUYEN

**Étude de l'équation d'évolution des systèmes
dissipatifs standards**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 24, n° 1 (1990), p. 67-84

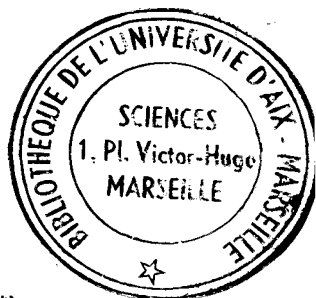
http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_1_67_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



ÉTUDE DE L'ÉQUATION D'ÉVOLUTION DES SYSTÈMES DISSIPATIFS STANDARDS (*)

P. LABORDE ⁽¹⁾ et Q. S. NGUYEN ⁽²⁾

Communiqué par R. TERNAM

Résumé. — *On étudie une équation différentielle multivoque qui décrit l'évolution quasi-statique des systèmes dissipatifs standards. Lorsque l'énergie du système est quadratique, cette équation différentielle est classique. On s'intéresse, dans ce travail, à un cas plus général d'énergie fortement convexe. L'approximation par régularisation de la solution et sa dépendance par rapport aux données sont discutées. La caractérisation de la réponse en vitesse à partir de l'état actuel est aussi donnée.*

Abstract. — *A multivalued differential equation describing the quasi-static evolution of standard dissipative systems is considered. This equation was discussed when the energy of the system is a quadratic function. We are interested here in the more general case of a strongly convex energy. The solution can be obtained by a regularization technique and its dependence on the data is discussed. The formulation of the rate response of the system from a given present state is also studied.*

1. INTRODUCTION

Un formalisme simple, unifiant la description de divers phénomènes irréversibles en mécanique des Solides, a été proposé dans [1], [2]. Cette approche, qui concerne la Plasticité, la Rupture, le Frottement, etc., est fondée sur un principe de dissipativité maximale généralisée. On définit ainsi la classe des systèmes dissipatifs standards.

(*) Reçu en décembre 1987, révisé en novembre 1988.

⁽¹⁾ Département de Mathématiques Appliquées, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

⁽²⁾ Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.

L'état d'un tel système est solution d'une certaine équation différentielle multivoque que l'on se propose d'étudier. Pour cela, on se placera dans le cas où l'énergie du système jouit d'une propriété de forte convexité.

On commence par construire une solution du problème d'évolution (lequel est défini par les relations (2.4), (2.5) ci-après). La méthode d'approximation utilisée s'apparente à la régularisation visco-plastique en théorie de la plasticité.

Ensuite, on examine la dépendance de la réponse du système par rapport à la sollicitation extérieure et à l'état initial. Il est ainsi mis en évidence une propriété de continuité de la solution par rapport aux données du problème.

On justifie, enfin, une caractérisation de la vitesse du système en fonction de l'état actuel. Une telle caractérisation est utile pour les études des phénomènes de bifurcation et de stabilité qui se produisent lorsque l'énergie perd ses bonnes propriétés de convexité ; cf. les références citées plus haut.

2. POSITION DU PROBLÈME

2a. Le modèle

Étant donné un système dissipatif, on décrit son état d'irréversibilité à l'aide de *variables d'état* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Le système est soumis à une sollicitation mécanique extérieure (force ou déplacement imposés) dont l'évolution est contrôlée par les *paramètres de charge* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Notons $w(\alpha, \lambda)$ l'énergie du système à l'équilibre.

On introduit alors les *variables de force* $a = (a_1, \dots, a_m)$ associées aux variables d'état α par les relations :

$$(2.1) \quad a_i = - \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} (\alpha, \lambda).$$

Elles doivent vérifier une *condition d'admissibilité* de la forme :

$$(2.2) \quad \dot{a} \in K,$$

où K est un sous-ensemble *convexe* de l'espace des variables de force.

Quand les paramètres de charge varient, le système évolue selon un *principe de dissipativité maximale* stipulant que la puissance dissipée $(a, \dot{\alpha})$ doit être supérieure à la puissance que dissiperait n'importe quelle force virtuelle b admissible :

$$(2.3) \quad (a, \dot{\alpha}) \geq (b, \dot{\alpha}) \quad \text{pour tout } b \in K.$$

Le point désigne la dérivation par rapport au temps.

Concernant l'utilisation du formalisme (2.1), (2.2), (2.3) pour décrire différents phénomènes irréversibles, on renvoie à [1], [2].

2b. Le problème d'évolution

Plaçons-nous dans le cas où l'espace des variables d'état peut être muni d'une structure hilbertienne. Soit H l'espace de Hilbert des variables d'état (de dimension finie ou non) ; la puissance dissipée, telle qu'elle apparaît dans l'expression (2.3), est associée à un produit scalaire $(.,.)$ défini sur H .

On suppose, pour simplifier un peu, le paramètre de charge λ scalaire ; ceci ne restreint pas la généralité de l'étude.

Étant donnée une fonction énergie $w : H \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le problème d'évolution consiste à chercher la réponse $\alpha(t)$ du système à un trajet de charge $\lambda(t)$, pour un état initial α^0 . Il s'agit, plus précisément, de trouver la solution $\alpha(t)$ du problème ci-dessous.

Problème (P)

$$(2.4) \quad - \frac{\partial w}{\partial \alpha} (\alpha(t), \lambda(t)) = a(t) \in K ,$$

$$(2.5) \quad \dot{\alpha}(t) \in N_K(a(t)) ,$$

pour $0 \leq t \leq T$, avec :

$$(2.6) \quad \alpha(0) = \alpha^0 .$$

Dans cette formulation, K est un sous-ensemble convexe de H et $w(\alpha, \lambda)$ une fonction convexe par rapport à α . On a utilisé la notation classique $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ pour le gradient de la fonction w par rapport à α , d'autre part $N_K(a)$ représente le cône normal à K en a (cf. (4.1)).

Le problème (P) est donc une équation différentielle multivoque, ou inclusion différentielle, qui s'écrit de manière condensée :

$$(2.7a) \quad \dot{\alpha} \in F(\alpha, t) ,$$

en posant :

$$(2.7b) \quad F(\alpha, t) = N_K \left(- \frac{\partial w}{\partial \alpha} (\alpha, \lambda(t)) \right) .$$

Pour situer la difficulté, on peut reformuler le problème (P) en fonction de la variable a . Soit $v(., t)$ la fonction convexe conjuguée de $w(., \lambda(t))$; en posant $x = -a$ et $C = -K$, la formulation (2.4), (2.5) devient :

$$(2.8) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial v}{\partial x} (x(t), t) \in -N_C(x(t)) , \quad x(t) \in C .$$

Examinons le cas particulier d'une énergie $w(\alpha, \lambda)$ *quadratique* ; plus précisément, supposons que

$$(2.9) \quad w(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2} (L\alpha, \alpha) + (m(\lambda), \alpha)$$

où $\{\alpha, \beta\} \rightarrow (L\alpha, \beta)$ définit une forme bilinéaire symétrique continue et coercive.

Munissons, un instant, l'espace H du produit scalaire $\{a, b\} \rightarrow (L^{-1}a, b)$; le problème (P) prend alors la forme suivante :

$$\dot{a} + N_K(a) \ni f, \quad a \in K$$

où $f = -\frac{d}{dt}m(\lambda)$ est une fonction donnée.

On reconnaît là une inclusion différentielle avec opérateur maximal monotone, *cf.* par exemple [3] ; celle-ci régit, plus précisément, un processus de rafle par un convexe variable (en translation) selon la terminologie de J. J. Moreau [4].

Nous nous intéresserons dorénavant au cas d'une énergie non nécessairement quadratique. La formulation (2.8) fait alors apparaître une non-linéarité sous le signe dérivation par rapport à t . En relation avec ce type de difficulté, citons le travail de O. Grange et F. Mignot [5] dans le cadre différent des problèmes d'évolution paraboliques. A l'inverse du cas quadratique on ne sait pas, en général, ramener le problème (P) à une inclusion différentielle monotone.

La théorie des inclusions différentielles, en dehors du cadre de la monotonie, offre essentiellement des résultats d'existence de solutions ; *cf.* J. P. Aubin et O. Cellina [6]. Toutefois, ces résultats font intervenir des hypothèses de compacité inadaptées au problème qui nous occupe.

2c. Cadre de travail

Notations : Rappelons que H est un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) . Soit $\|\cdot\|$ la norme associée.

On notera dorénavant $w_\alpha(\alpha, \lambda)$ et $w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda)$ le gradient et le Hessian par rapport à α de la fonction $w : H \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au point (α, λ) . La lettre λ en indice désignera, de même, la dérivation par rapport au paramètre scalaire λ .

D'autre part, $W^{1,q}(0, T; X)$ ($1 \leq q \leq +\infty$, $X = H$ ou \mathbb{R}) représente l'espace des fonctions $\varphi \in L^q(0, T; X)$ telles que la dérivée distribution $\dot{\varphi} \in L^q(0, T; X)$; cet espace est muni de sa norme usuelle. On écrira $W^{1,q}(0, T)$ pour $W^{1,q}(0, T; \mathbb{R})$.

Hypothèses : Effectuons les hypothèses (i), (ii), (iii) suivantes.

(i) Sur l'énergie : la fonction $(\alpha, \lambda) \rightarrow w(\alpha, \lambda)$ est continuellement dérivable dans $H \times \mathbb{R}$; elle vérifie les conditions de régularité, convexité et comportement à l'infini ci-dessous.

(Régularité) La fonction $(\alpha, \lambda) \rightarrow w_\alpha(\alpha, \lambda)$ admet une dérivée localement lipschitzienne dans $H \times \mathbb{R}$: pour tout $M > 0$, il existe une constante $L(M)$ telle que

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda) - w_{\alpha\alpha}(\beta, \mu)\|_{\mathcal{L}(H)} + \|w_{\alpha\lambda}(\alpha, \lambda) - w_{\alpha\lambda}(\beta, \mu)\| \\ \leq L(M)(\|\alpha - \beta\| + |\lambda - \mu|) \\ \text{quand} \quad \max(\|\alpha\|, \|\beta\|, |\lambda|, |\mu|) \leq M. \end{array} \right.$$

(Forte convexité) Il existe $c > 0$ tel que

$$(2.11) \quad (w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda) \beta, \beta) \geq c \|\beta\|^2 \quad \text{pour tous } \alpha, \beta, \lambda.$$

(Comportement à l'infini) Pour tout $M > 0$, il existe une constante $C(M)$ telle que

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} |w_\lambda(\alpha, \lambda)| \leq C(M) (\|\alpha\|^2 + 1) \\ \text{quels que soient } \alpha \in H \text{ et } \lambda \text{ vérifiant } |\lambda| \leq M. \end{array} \right.$$

(ii) Sur la condition d'admissibilité :

$$(2.13) \quad K \text{ est un convexe fermé dans } H \text{ contenant l'origine.}$$

(iii) Sur les données :

$$(2.14) \quad \lambda \in W^{1,2}(0, T),$$

$$(2.15) \quad a^0 = -w_\alpha(\alpha^0, \lambda(0)) \in K. \quad \square$$

Dans le cas particulier de l'énergie quadratique (2.9), outre les conditions déjà imposées à L , les hypothèses (i) expriment que la dérivée de la fonction m doit être bornée sur les bornés.

Le formalisme (2.4), (2.5) permet de décrire, comme on l'a déjà signalé, différents types de problèmes d'irréversibilité. Le choix des hypothèses ci-dessus devra naturellement être discuté pour chacun de ces types de problèmes.

3. RÉGULARISATION

A l'aide d'une méthode de régularisation classique on approche le problème d'évolution (P) par une certaine équation différentielle ordinaire.

L'obtention d'estimations a priori assure alors une propriété de Cauchy pour la famille des solutions régularisées. On en déduit la convergence de cette dernière vers une solution de (P).

Étant donné $\mu > 0$, soit $\alpha^\mu(t)$ la solution du *problème régularisé* (3.1), (3.2) suivant :

$$(3.1a) \quad \dot{\alpha}^\mu = \frac{1}{\mu} (a^\mu - \text{proj}_K a^\mu),$$

$$(3.1b) \quad a^\mu = -w_\alpha(\alpha^\mu, \lambda(t))$$

pour $0 \leq t \leq T$, et

$$(3.2) \quad \alpha^\mu(0) = \alpha^0.$$

On a noté $\text{proj}_K b$ la projection sur K de b dans H .

Le résultat ci-dessous affirme qu'il existe une unique solution régularisée ; de plus, le problème posé (P) admet aussi une solution α et la méthode d'approximation introduite est convergente.

THÉORÈME 3.1 : *Les hypothèses de Section 2c entraînent les propriétés (i) et (ii) :*

(i) *Quel que soit $\mu \gg 0$, il existe une unique fonction $\alpha^\mu \in W^{1,2}(0, T; H)$ vérifiant les conditions (3.1) pour presque tout $t \in]0, T[$ et $\alpha^\mu(0) = \alpha^0$.*

(ii) *Il existe une fonction $\alpha \in W^{1,2}(0, T; H)$ telle que*

$$\begin{aligned} \alpha^\mu(t) &\rightarrow \alpha(t) \text{ dans } H, \text{ uni formément en } t \in [0, T], \\ \dot{\alpha}^\mu &\rightarrow \dot{\alpha} \text{ dans } L^2(0, T; H) \text{ faible,} \end{aligned}$$

la limite α vérifiant la condition (2.4) pour tout $t \in [0, T]$, l'inéquation (2.5) pour presque tout $t \in]0, T[$ et $\alpha(0) = \alpha^0$. \square

L'unicité de la solution α sera établie en Section 4.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur les deux lemmes suivants :

LEMME 3.2 : *Le problème régularisé (3.1), (3.2) possède une unique solution α^μ (au sens du Théorème 3.1). De plus, la famille α^μ est bornée dans $W^{1,2}(0, T; H)$ et $a^\mu = -w_\alpha(\alpha^\mu, \lambda)$ vérifie*

$$\|a^\mu(t) - \text{proj}_K a^\mu(t)\| \leq C\mu^{1/2} \text{ pour tout } t \in [0, T],$$

C constante (indépendante de $\mu > 0$).

Preuve : (i) *Estimation (I).* Le problème régularisé est de la forme :

$$\dot{\alpha}^\mu = \frac{1}{\mu} G(\alpha^\mu, \lambda(t)),$$

l'application $(\alpha, \lambda) \rightarrow G(\alpha, \lambda)$ étant localement lipschitzienne.

Soit $R > \|\alpha^0\|$; puisque $\lambda \in W^{1,2}(0, T)$, il existe un instant $\tau \in]0, T]$ et il existe une fonction absolument continue $\alpha^\mu : [0, \tau] \rightarrow H$ telle que $\|\alpha^\mu(t)\| \leq R$ pour tout $t \in [0, \tau]$, α^μ vérifiant l'équation régularisée (3.1) p.p. $t \in]0, \tau[$ ainsi que la condition initiale $\alpha^\mu(0) = \alpha^0$. Cette affirmation résulte d'une variante d'un théorème classique pour les équations différentielles ordinaires localement lipschitziennes (formulé par des fonctions de classe C^1).

Montrons qu'il existe, en fait, une solution *globale* au problème régularisé dans l'intervalle de temps $[0, T]$. On aura besoin, pour cela, de l'estimation a priori ci-dessous.

Puisque $0 \in K$, on a :

$$(\dot{\alpha}^\mu, a^\mu) = \frac{1}{\mu} (a^\mu - \text{proj}_K a^\mu, a^\mu) \geq 0$$

p.p. dans $]0, \tau[$. Il suit, par définition de a^μ :

$$(w_\alpha(\alpha^\mu, \lambda), \dot{\alpha}^\mu) \leq 0,$$

autrement dit :

$$\frac{d}{dt} w(\alpha^\mu, \lambda) \leq \dot{\lambda} w_\lambda(\alpha^\mu, \lambda).$$

L'hypothèse (2.12) entraîne alors l'existence d'une constante

$$C_1 = C(\|\lambda\|_{L^\infty(0, T)})$$

telle que :

$$\frac{d}{dt} w(\alpha^\mu, \lambda) \leq C_1 |\dot{\lambda}| (\|\alpha^\mu\|^2 + 1).$$

On convient de noter dorénavant C_i ($i = 1, 2, \dots$) des constantes indépendantes de t et μ , ainsi que de R . Après une intégration de 0 à t de l'inégalité précédente, on déduit que

$$\|\alpha^\mu(t)\|^2 \leq C_2 \int_0^t |\dot{\lambda}(s)| \|\alpha^\mu(s)\|^2 ds + C_3.$$

Cette majoration résulte de la forte convexité de w (hypothèse (2.11)), de la condition initiale (3.2), ainsi que de l'appartenance de λ à $L^\infty(0, T)$ (d'après (2.14)) ; enfin, on a utilisé le fait que w et ses dérivées restent bornées sur les bornés (hypothèses (2.10), (2.12)).

On conclut alors, via le lemme de Gronwall, que

$$\|\alpha^\mu(t)\| \leq C_4 \quad \text{pour tout } t \in [0, \tau].$$

Grâce à cette majoration, la solution maximale de l'équation différentielle régularisée est définie dans $[0, T]$ entier. Il suffit, en effet, de choisir $R > C_4$ dans l'étape ci-dessus où l'on peut alors prendre $\tau = T$ (vérification en raisonnant par l'absurde ; on rappelle que C_4 est indépendant de R !).

En définitive, il existe une fonction α^μ absolument continue satisfaisant l'équation différentielle (3.1) p.p. dans $]0, T[$ et la condition initiale (3.2). Une telle fonction est, de plus, unique et vérifie :

$$\|\alpha^\mu(t)\| \leq C_4 \quad \text{pour tous } t \in [0, T] \text{ et } \mu > 0.$$

Notons que dans le cas quadratique (2.9) le problème régularisé est une équation différentielle Lipschitzienne ; le résultat d'existence globale ci-dessus est alors classique.

(ii) *Estimation a priori* (II) : Compte tenu de la majoration précédente, on introduit une constante M_0 :

$$(3.3a) \quad M_0 > \max \left\{ \sup_{\mu > 0} \|\alpha^\mu\|_{L^\infty(0, T)}, \|\lambda\|_{L^\infty(0, T)} \right\}.$$

L'application $(\alpha, \lambda) \rightarrow w_\alpha(\alpha, \lambda)$ admet une dérivée lipschitzienne dans le borné

$$(3.3b) \quad B_0 = \{(\alpha, \lambda) : \max(\|\alpha\|, |\lambda|) \leq M_0\},$$

en vertu de l'hypothèse (2.10) ; on notera, dans la suite, L_0 la constante de Lipschitz correspondante :

$$(3.3c) \quad L_0 = L(M_0) \quad (\text{cf. (2.10)}).$$

La fonction $a^\mu = -w_\alpha(\alpha^\mu, \lambda)$ appartient à l'espace $W^{1,2}(0, T; H)$ comme α^μ ; de plus

$$\dot{a}^\mu = -w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) \dot{\alpha}^\mu - \dot{\lambda} w_{\alpha\lambda}(\alpha^\mu, \lambda) \quad \text{p.p.t.}$$

D'autre part, en multipliant l'équation régularisée (3.1a) par \dot{a}^μ , il vient p.p.t. :

$$(\dot{\alpha}^\mu, \dot{a}^\mu) = \frac{1}{\mu} (a^\mu - \text{proj}_K a^\mu, \dot{a}^\mu) = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} \|a^\mu - \text{proj}_K a^\mu\|^2.$$

Si on tient compte de l'expression de \dot{a}^μ précédente, on obtient :

$$(w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) \dot{\alpha}^\mu, \dot{\alpha}^\mu) + \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} \|a^\mu - \text{proj}_K a^\mu\|^2 = -\dot{\lambda} (w_{\alpha\lambda}(\alpha^\mu, \lambda), \dot{\alpha}^\mu).$$

La coercivité de l'application $w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda)$ par rapport à α , imposée par l'hypothèse (2.11), implique alors que

$$c \|\dot{\alpha}^\mu\|^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} \|a^\mu - \text{proj}_K a^\mu\|^2 \leq L_0 |\dot{\lambda}| (\|\alpha^\mu\| + C_5) \|\dot{\alpha}^\mu\| ,$$

(L_0 étant la constante définie en (3.3)). Il suit :

$$\frac{c}{2} \|\dot{\alpha}^\mu\|^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dt} \|a^\mu - \text{proj}_K a^\mu\|^2 \leq C_6 |\dot{\lambda}|^2 ,$$

compte tenu de l'estimation a priori (I).

En intégrant cette inégalité on trouve

$$c \int_0^t \|\dot{\alpha}^\mu(s)\|^2 ds + \frac{1}{\mu} \|a^\mu(t) - \text{proj}_K a^\mu(t)\|^2 \leq C_7 ,$$

puisque $a^\mu(0) = a^0 \in K$; d'où le lemme.

LEMME 3.3 : La famille des solutions régularisées α^μ vérifie

$$\|\alpha^\mu(t) - \alpha^\nu(t)\|^2 \leq C (\mu^{1/2} + \nu^{1/2}) ,$$

où C est une constante indépendante de $\mu, \nu > 0$ et $t \in [0, T]$.

Preuve : Soit $\mu, \nu > 0$; on note :

$$\delta\alpha = \alpha^\mu - \alpha^\nu \quad \text{et} \quad \delta a = a^\mu - a^\nu .$$

Montrons d'abord que

$$(3.4) \quad (\delta\dot{\alpha}(t), \delta a(t)) \geq m_1(t) (\mu^{1/2} + \nu^{1/2}) \quad \text{p.p.t.} ,$$

les fonctions m_i étant dans $L^2(0, T)$ et indépendantes de μ et ν .

Puisque α^μ est solution du problème régularisé, on a :

$$(\dot{\alpha}^\mu, \text{proj}_K a^\nu - \text{proj}_K a^\mu) \leq 0 \quad \text{p.p.t.}$$

et par symétrie :

$$(\delta\dot{\alpha}, \text{proj}_K a^\mu - \text{proj}_K a^\nu) \geq 0 \quad \text{p.p.t.}$$

Il en découle :

$$\begin{aligned} (\delta\dot{\alpha}, \delta a) &\geq (\delta\dot{\alpha}, (a^\mu - \text{proj}_K a^\mu) - (a^\nu - \text{proj}_K a^\nu)) \\ &\geq - \|\delta\dot{\alpha}\| (\|a^\mu - \text{proj}_K a^\mu\| + \|a^\nu - \text{proj}_K a^\nu\|) . \end{aligned}$$

L'assertion (3.4) résulte alors des estimations a priori du lemme précédent.

Maintenant, posons :

$$h(t) = (w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu(t), \lambda(t)) \delta\alpha(t), \delta\alpha(t)) .$$

L'application $(\alpha, \lambda) \rightarrow w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda)$ étant lipschitzienne dans le borné B_0 (cf. (3.3)), la fonction $h(t)$ est absolument continue et vérifie p.p.

$$(3.5) \quad \dot{h} = 2(w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) \delta\alpha, \delta\dot{\alpha}) + \left(\frac{d}{dt} [w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda)] \delta\alpha, \delta\alpha \right) .$$

Ceci implique :

$$(3.6) \quad \dot{h} = -2(\delta a, \delta\dot{\alpha}) + r_1$$

où r_1 est une fonction dans $L^2(0, T)$ telle que

$$(3.7) \quad |r_1(t)| \leq m_2(t) \|\delta\alpha(t)\|^2 .$$

En effet, on peut écrire :

$$w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) \delta\alpha = w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) - w_{\alpha\alpha}(\alpha^\nu, \lambda) + r_2$$

avec $|r_2| \leq L_0 \|\delta\alpha\|^2$; de plus

$$\left\| \frac{d}{dt} w_{\alpha\alpha}(\alpha^\mu, \lambda) \right\| \leq L_0 (\|\dot{\alpha}^\mu\| + |\dot{\lambda}|) \quad \text{p.p.}$$

Par conséquent la dérivée \dot{h} , exprimée en (3.5), est bien de la forme (3.6) avec

$$|r_1| \leq L_0 (2\|\delta\dot{\alpha}\| + \|\dot{\alpha}^\mu\| + |\dot{\lambda}|) \|\delta\alpha\|^2 .$$

Les estimations a priori (Lemme 3.2) entraînent alors (3.7).

Par ailleurs, on sait que

$$(3.8) \quad h(t) \geq c \|\delta\alpha(t)\|^2 ,$$

par coercivité de $w_{\alpha\alpha}$. Cette remarque, en conjonction avec (3.6), (3.4), (3.7), montre que

$$\dot{h}(t) \leq m_3(t) (h(t) + \mu^{1/2} + \nu^{1/2}) \quad \text{p.p.t.}$$

D'où

$$h(t) \leq C (\mu^{1/2} + \nu^{1/2}) \quad \text{pour tout } t \in [0, T] ,$$

la constante C étant indépendante de μ et ν . Le lemme en résulte, d'après (3.8).

Preuve du Théorème 3.1 : En raison de la propriété de Cauchy dont jouit la famille α^μ (Lemme 3.3), il existe une fonction α uniformément continue dans $[0, T]$ telle que

$$\alpha^\mu(t) \rightarrow \alpha(t) \text{ dans } H, \text{ uniformément en } t \in [0, T]$$

quand $\mu \rightarrow 0$. On en déduit d'une part, grâce aux estimations a priori (Lemme 3.2), que $\dot{\alpha} \in L^2(0, T; H)$ et

$$\dot{\alpha}^\mu \rightarrow \dot{\alpha} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H);$$

d'autre part :

$$a^\mu \rightarrow -w_\alpha(\alpha, \lambda) = a \text{ dans } H, \text{ uniformément en } t \in [0, T].$$

Vérifions que la limite α est solution du problème (P). On voit d'abord que (Lemme 3.2) $a(t) = \text{proj}_K a(t)$, donc $a(t) \in K$. Par ailleurs, soit $b \in L^2(0, T; H)$ tel que $b(t) \in K$ p.p.t. On a :

$$\int_0^T (\dot{\alpha}^\mu, b - a^\mu) dt \leq 0$$

et, grâce aux propriétés de convergence établies, il suit :

$$\int_0^T (\dot{\alpha}, b - a) dt \leq 0.$$

A l'aide d'un raisonnement classique, on conclut que

$$(\dot{\alpha}(t), a^* - a(t)) \leq 0 \text{ pour tout } a^* \in K, \text{ p.p.t.}$$

D'où le théorème. □

L'application du Théorème 3.1 au cas d'une énergie quadratique de type (2.9) redonne un résultat classique de la théorie des opérateurs maximaux monotones, cf. [3]. Alors que dans cette dernière référence le résultat est aussi obtenu grâce à une méthode de régularisation, c'est à l'aide d'une méthode de discrétisation implicite qu'est établi un résultat d'existence pour les processus de rafle dans [4].

4. PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION

On établit maintenant une propriété de dépendance lipschitzienne de la réponse $\alpha(t)$ du système par rapport à l'état initial α^0 et au trajet de charge $\lambda(t)$. De ce résultat de continuité découle, en particulier, l'unicité de la solution de (P). Auparavant, quelques propriétés utiles pour la suite sont

indiquées. C'est ainsi que l'on précise la relation existant entre l'évolution de la variable d'état α et l'évolution de la variable de force a .

On note $N_K(a)$ le *cône normal* au convexe K en a :

$$(4.1) \quad N_K(a) = \{v : v \in H, (v, b - a) \leq 0 \text{ pour tout } b \in K\},$$

et $T_K(a)$ désigne le *cône tangent* :

$$T_K(a) = \{\theta : \text{il existe } a^n \in K \text{ et } h_n > 0$$

$$\text{tels que } h_n \rightarrow 0 \text{ et } \frac{a^n - a}{h_n} \rightarrow \theta \text{ dans } H\}.$$

Les ensembles $N_K(a)$ et $T_K(a)$ sont des cônes convexes fermés, polaires l'un de l'autre (cf. [6]) ; rappelons que le *polaire* d'un sous-ensemble A de H est le cône

$$A^- = \{\chi : \chi \in H, (\chi, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi \in A\}.$$

PROPOSITION 4.1 : *Soit α une solution du problème (P) (Théorème 3.1) et $a = -w_\alpha(\alpha, \lambda)$. Les fonctions a et α , qui appartiennent à $W^{1,2}(0, T; H)$, vérifient pour presque tout t :*

- (i) $\dot{\alpha}(t) \in N_K(a(t))$;
- (ii) $\dot{a}(t) \in T_K(a(t))$;
- (iii) $(\dot{\alpha}(t), \dot{a}(t)) = 0$.

Preuve : Soit X l'ensemble des $t \in]0, T[$ tels que les fonctions α et λ soient dérivables en t et, en même temps, tels que

$$\dot{\alpha}(t) \in N_K(a(t)).$$

L'ensemble X est de complémentaire dans $[0, T]$ de mesure nulle, d'après le Théorème 3.1.

Considérons un quelconque t appartenant à X . La fonction a admet en cet instant une dérivée $\dot{a}(t)$.

Remarquons alors que $a(t+h) \in K$ quel que soit h (suffisamment petit). Il en découle d'une part que $\dot{a}(t) \in T_K(a(t))$, et d'autre part :

$$(\dot{\alpha}(t), |h|^{-1} (a(t+h) - a(t))) \leq 0 \quad (h \neq 0),$$

d'où l'on tire que

$$(\dot{\alpha}(t), \dot{a}(t)) = 0. \quad \square$$

COROLLAIRE 4.2 : *Soit $M > 0$ et α une solution de (P) pour des données vérifiant*

$$\max (\|\alpha^0\|, \|\lambda\|_{W^{1,q}(0,T)}) \leq M,$$

avec $q = 2, +\infty$. Alors α appartient à un borné de $W^{1,q}(0, T; H)$ qui ne dépend que de la constante M .

Preuve : Si on reprend les estimations a priori obtenues pour le problème régularisé (Lemme 3.2), on en déduit aisément l'estimation suivante :

$$\|\alpha\|_{W^{1,2}(0, T; H)} \leq C_1,$$

où les C_i sont des constantes indépendantes des données (α^0, λ) décrivant un borné de $H \times W^{1,2}(0; T)$.

De plus, grâce à l'égalité $(\dot{\alpha}, \dot{a}) = 0$ p.p. (Proposition 4.1), l'expression de la dérivée de $a = -W_\alpha(\alpha, \lambda)$ permet d'écrire que

$$(w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda) \dot{\alpha}, \dot{\alpha}) = -\dot{\lambda}(w_{\alpha\lambda}(\alpha, \lambda), \dot{\alpha}) \text{ p.p.}$$

Il en résulte que

$$\|\dot{\alpha}(t)\| \leq C_2 |\dot{\lambda}(t)| \text{ p.p.},$$

grâce à la coercivité de $w_{\alpha\alpha}(\alpha, \lambda)$ et au fait que $w_{\alpha\lambda}$ reste borné sur un borné convenable déduit de l'estimation précédente. La propriété annoncée pour $q = +\infty$ en découle. \square

Venons-en au résultat essentiel de cette section.

THÉORÈME 4.3 : Soient $\alpha^{0i} \in K, \lambda_i \in W^{1,2}(0, T)$ pour $i = 1, 2$ vérifiant la majoration :

$$\max (\|\alpha^{0i}\|, \|\lambda_i\|_{W^{1,2}}) \leq M$$

où M est une constante donnée. Alors il existe une autre constante C telle que, si α^i est une solution de (P) pour les données $\alpha^0 = \alpha^{0i}$ et $\lambda = \lambda_i$, on ait :

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|^2 \leq C \left\{ \|\alpha^{01} - \alpha^{02}\|^2 + \max_{0 \leq s \leq t} |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)| \right\}$$

que soit $t \in [0, T]$. En particulier, la solution α de (P) (pour α^0 et λ donnés) est unique. \square

Dans le cas d'une énergie quadratique, la propriété de Lipschitz de la solution par rapport à la donnée initiale, dans le théorème ci-dessus, est en fait une propriété de contraction pour la norme associée à l'énergie. Précisément, si w est définie par (2.9) et si α^i est une solution de (P) pour les données $\alpha^{0i} \in K$ et $\lambda \in W^{1,2}(0, T)$ ($i = 1, 2$), la propriété de

contraction fondamentale de la théorie des opérateurs maximaux monotones (cf. [3]) permet en fait d'écrire que

$$\| \alpha^1(t) - \alpha^2(t) \| \leq \| \alpha^{01} - \alpha^{02} \| \quad \text{pour tout } t \in [0, T]$$

où $\| \beta \| = (L\beta, \beta)^{1/2}$.

Preuve : Notons :

$$\delta\alpha = \alpha^1 - \alpha^2, \quad \delta\alpha^0 = \alpha^{01} - \alpha^{02}, \quad \delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2,$$

et introduisons la fonction :

$$h(t) = (w_{\alpha}(\alpha^1(t), \lambda_1(t)) \delta\alpha(t), \delta\alpha(t)).$$

Cette fonction est absolument continue ; de plus, si on pose $\delta a = a^1 - a^2$ avec $a^i = -w_{\alpha}(\alpha^i, \lambda_i)$, on a p.p. :

$$(4.2) \quad \dot{h} = -2(\delta a, \delta \dot{\alpha}) + r$$

où $|r(t)| \leq m_1(t) (\|\delta\alpha(t)\|^2 + |\delta\lambda(t)|)$, les m_i étant des fonctions de $L^2(0, T)$ (qui dépendent de M). Ceci peut être vérifié de manière analogue à (3.6), (3.7) en utilisant le Corollaire 4.2.

D'autre part on sait que :

$$(\dot{\alpha}^1, a^2 - a^1) \leq 0,$$

et par symétrie :

$$(4.3) \quad (\delta \dot{\alpha}, \delta a) \geq 0.$$

Compte tenu de la minoration

$$h \geq c \|\delta\alpha\|^2,$$

les expressions (4.2) et (4.3) conduisent à :

$$\dot{h}(t) \leq m_2(t) (h(t) + |\delta\lambda(t)|).$$

Le théorème en résulte.

5. DÉTERMINATION DE LA VITESSE

Même pour un trajet de charge $\lambda(t)$ très régulier, l'état du système $\alpha(t)$ n'est pas nécessairement dérivable au sens classique. Ceci n'est d'ailleurs pas propre au cas d'une énergie w non quadratique. En fait, dans

une étude de processus irréversible on s'intéresse essentiellement à la dérivée à droite de l'état. Nous nous proposons donc ici de montrer l'existence d'une dérivée à droite de la solution α de (P) ; on exprimera cette dérivée à l'instant t en fonction de l'état actuel $\alpha(t)$ et de la vitesse de charge $\dot{\lambda}(t)$. \square

Considérons un trajet de charge λ dérivable à droite. Plus précisément, on suppose que

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } \lambda \in W^{1, \infty}(0, T) \text{ et sa dérivée } \dot{\lambda} \text{ est (égale à p.p. à} \\ \text{une fonction) continue à droite en tout point de } [0, T[. \end{array} \right.$$

On notera $\dot{\varphi}(t+0)$ la dérivée à droite en $t \in [0, T[$ d'une fonction $\varphi: [0, T] \rightarrow X$ ($X = H$ ou \mathbb{R}) :

$$\dot{\varphi}(t+0) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{h} (\varphi(t+h) - \varphi(t)).$$

THÉORÈME 5.1 : *Sous l'hypothèse supplémentaire (5.1) la solution $\alpha(t)$ de (P) possède une dérivée à droite $\dot{\alpha}(t+0)$ pour tout $t \in [0, T[$ caractérisée par les conditions (i) et (ii) ci-dessous :*

(i) $\dot{\alpha}(t+0) \in N_K(a(t)) ;$

(ii) $(w_{\alpha\alpha}(\alpha(t), \lambda(t)) \dot{\alpha}(t+0) + \dot{\lambda}(t+0) w_{\alpha\lambda}(\alpha(t), \lambda(t)),$

$$\xi - \dot{\alpha}(t+0)) \geq 0$$

pour tout $\xi \in N_K(a(t))$. \square

Ce théorème généralise un résultat connu de la théorie des opérateurs maximaux monotones (cf. [3], p. 69) applicable lorsque l'énergie w est quadratique.

Remarque : L'inéquation variationnelle stationnaire introduite dans l'énoncé précédent admet une unique solution $\dot{\alpha}(t+0)$, puisque la forme bilinéaire continue $\{\beta, \gamma\} \rightarrow (w_{\alpha\alpha}(\alpha(t), \lambda(t)) \beta, \gamma)$ est symétrique coercive. \square

Le théorème à établir résulte essentiellement de deux lemmes, pour lesquels on conviendra d'écrire, étant donné $t \in [0, T[$:

$$\delta_h \varphi = h^{-1}(\varphi(t+h) - \varphi(t)) \quad (h \text{ suffisamment petit}).$$

LEMME 5.2 : *Soit $t \in [0, T[$. Il existe une suite de réels strictement positifs $h(n)$ tendant vers zéro, telle que $(a = -w(\alpha, \lambda)) :$*

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{h(n)} \alpha \rightarrow \chi \\ \delta_{h(n)} a \rightarrow \theta \end{array} \right\} \text{ dans } H \text{ faible.}$$

De plus : $\chi \in N_K(a(t))$, $\theta \in T_K(a(t))$,

$$\theta = -w_{\alpha\alpha}(\alpha(t), \lambda(t)) \chi - \dot{\lambda}(t+0) w_{\alpha\lambda}(\alpha(t), \lambda(t)).$$

Preuve : Puisque $\dot{\lambda} \in L^\infty(0, T)$, il vient $\dot{\alpha} \in L^\infty(0, T; H)$ d'après le Corollaire 4.2. Par conséquent, la famille

$$\delta_h \alpha = h^{-1} \int_t^{t+h} \dot{\alpha}(s) ds$$

est bornée dans H ; il existe donc une suite $h(n) \rightarrow 0$ telle que

$$\delta_{h(n)} \alpha \rightarrow \chi \text{ faiblement dans } H.$$

D'autre part, en notant $f[s]$ pour $f(\alpha(s), \lambda(s))$, on peut écrire :

$$(5.2) \quad \delta_h a = -w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha - \delta_h \lambda w_{\alpha\lambda}[t] + r_h,$$

avec

$$\begin{aligned} \|r_h\| &\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \|(w_{\alpha\alpha}[t] - w_{\alpha\alpha}[s]) \dot{\alpha}(s)\| ds + \\ &+ h^{-1} \int_t^{t+h} |\dot{\lambda}(s)| \|w_{\alpha\lambda}[t] - w_{\alpha\lambda}[s]\| ds. \end{aligned}$$

La famille r_h tend vers zéro, puisque les fonctions $s \rightarrow w_{\alpha\alpha}[s]$ et $s \rightarrow w_{\alpha\lambda}[s]$ sont continues. La suite $\delta_{h(n)} a$ converge donc faiblement dans H vers l'élément θ dont l'expression est fournie par le lemme. De plus, θ appartient au cône convexe $T_K(a(t))$ comme chacun des éléments de la suite dont θ est la limite faible.

Par ailleurs on peut écrire, quel que soit $b \in H$:

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0, h > 0} h^{-1} \int_t^{t+h} (\dot{\alpha}(s), b - a(t)) ds &= \\ &= \limsup h^{-1} \int_t^{t+h} (\dot{\alpha}(s), b - a(s)) ds. \end{aligned}$$

D'où l'on conclut, si $b \in K$:

$$(\chi, b - a(t)) \leq 0,$$

c'est-à-dire $\chi \in N_K(a(t))$. □

Les propriétés $\chi \in N_K(a(t))$ et $\theta \in T_K(a(t))$ assurent, en particulier, l'inégalité :

$$(\chi, \theta) \leq 0,$$

par polarité mutuelle du cône normal et du cône tangent. Montrons maintenant qu'il y a, en fait, égalité.

LEMME 5.3 : Les éléments χ et θ introduits au Lemme 5.2 vérifient :

$$(\chi, \theta) \geq 0 .$$

Preuve : Étant donné $t \in [0, T[$, vérifions d'abord que

$$(5.3) \quad l = \limsup_n (w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha, \delta_{h(n)} \alpha) \leq (w_{\alpha\alpha}[t] \chi, \chi) + (\chi, \theta) .$$

L'application $\beta \rightarrow (w_{\alpha\alpha}[t] \beta, \beta)^{1/2}$ définit une norme sur H ; en particulier on a :

$$(w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha, \delta_h \alpha)^{1/2} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (w_{\alpha\alpha}[t] \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s))^{1/2} ds ,$$

et par conséquent :

$$(w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha, \delta_h \alpha) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (w_{\alpha\alpha}[t] \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)) ds .$$

Il suit :

$$\ell \leq \limsup_n \frac{1}{h(n)} \int_t^{t+h(n)} (w_{\alpha\alpha}[s] \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)) ds .$$

Rappelant que la dérivée de $a = -w_\alpha(\alpha, \lambda)$ vérifie l'égalité $(\dot{\alpha}, \dot{a}) = 0$ p.p. (Proposition 4.1), on obtient :

$$\ell \leq \limsup \frac{1}{h(n)} \int_t^{t+h(n)} -\dot{\lambda}(s) (w_{\alpha\lambda}[s], \dot{\alpha}(s)) ds .$$

La condition de continuité imposée à $\dot{\lambda}$ en (5.1) prouve alors que

$$\ell \leq \limsup \frac{1}{h(n)} \int_t^{t+h(n)} -\dot{\lambda}(t+0) (w_{\alpha\lambda}[t], \dot{\alpha}(s)) ds ,$$

ce qui entraîne :

$$\ell \leq -\dot{\lambda}(t+0) (w_{\alpha\lambda}[t], \chi) .$$

L'assertion (5.3) résulte alors de l'expression de θ en fonction de χ donnée par le Lemme 5.2.

Par semi-continuité inférieure faible du carré d'une norme on a, d'autre part :

$$(w_{\alpha\alpha}[t] \chi, \chi) \leq \ell .$$

En comparant ceci avec (5.3) on conclut que $(\chi, \theta) \geq 0$.

Démonstration du théorème : Reprenons les notations des lemmes précédents. Les conditions $\theta \in T_K(a(t))$ (Lemme 5.2) et $(\theta, \chi) \geq 0$ (Lemme 5.3) entraînent que

$$(\theta, \xi - \chi) \leq 0 \quad \text{pour tout } \xi \in N_K(a(t)).$$

En exprimant θ en fonction de χ (Lemme 5.2), il vient :

$$(w_{\alpha\alpha}[t] \chi + \dot{\lambda}(t+0) w_{\alpha\lambda}[t], \xi - \chi) \geq 0$$

quel que soit $\xi \in N_K(a(t))$, avec $\chi \in N_K(a(t))$ (Lemme 5.2).

Une telle inéquation variationnelle possède une unique solution χ . On en déduit, en particulier, que la famille entière $\delta_h \alpha$ converge faiblement vers χ (cf. Lemme 5.2). Dès lors l'inégalité (5.3), établie pour une suite extraite convergente $\delta_{h(n)} \alpha$, est vérifiée pour la famille entière ; compte tenu du fait que $(\chi, \theta) \leq 0$, on obtient :

$$\limsup_{h \rightarrow 0, h > 0} (w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha, \delta_h \alpha) \leq (w_{\alpha\alpha}[t] \chi, \chi).$$

La famille des normes $(w_{\alpha\alpha}[t] \delta_h \alpha, \delta_h \alpha)^{1/2}$ tend, par conséquent, vers $(w_{\alpha\alpha}[t] \chi, \chi)^{1/2}$. La limite faible χ de $\delta_h \alpha$ est donc aussi limite forte. Il suit que la fonction α est dérivable à droite en t et

$$\dot{\alpha}(t+0) = \chi.$$

On en conclut que la fonction $a = -w_{\alpha}(\alpha, \lambda)$ est elle-même dérivable à droite en t et que $\dot{a}(t+0)$ s'identifie à θ .

REFERENCES

- [1] Q. S. NGUYEN, *Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale*, J. Meca. Théorique Appli., Vol. 3, n° 1, 1984, pp. 41-61.
- [2] Q. S. NGUYEN, *Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, n° 3, 1987, pp. 303-324.
- [3] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.
- [4] J. J. MOREAU, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*, J. Diff. Equ., Vol. 26, 1977, pp. 347-374.
- [5] O. GRANGE, F. MIGNOT, *Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation parabolique non linéaires*, J. Funct. Analysis, Vol. 11, 1972, pp. 77-92.
- [6] J. P. AUBIN, A. CELLINA, *Differential inclusions*, Springer-Verlag, 1983.