

ALAIN BRILLARD

MIGUEL LOBO

EUGENIA PEREZ

**Homogénéisation de frontières par épi-
convergence en élasticité linéaire**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 24, n° 1 (1990), p. 5-26

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_1_5_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



HOMOGÉNÉISATION DE FRONTIÈRES PAR ÉPI-CONVERGENCE EN ÉLASTICITÉ LINÉAIRE (*)

par Alain BRILLARD ⁽¹⁾, Miguel LOBO ⁽²⁾, Eugenia PEREZ ⁽²⁾

Communiqué par E. SANCHEZ-PALENCIA

Résumé. — Un corps élastique homogène est fixé sur des zones de taille r_ε , réparties ε -périodiquement sur une partie Σ de sa frontière. On étudie, à l'aide des techniques d'épi-convergence, le comportement limite, lorsque ε tend vers 0, de ce corps élastique. Sur Σ ce comportement limite peut être la liberté totale, la fixité parfaite ou un comportement intermédiaire entre ces deux situations précédentes, selon la taille des inclusions. Une taille critique $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$ des inclusions est exhibée. On examine, enfin, le comportement asymptotique de la solution du problème de Signorini associé.

Abstract. — An homogeneous elastic body is stuck on identical zones of size r_ε , ε -periodically distributed on a part Σ of its boundary. The asymptotic behaviour, when ε converges to 0, of the body, is described, through epi-convergence methods. Along Σ , this limit behaviour may be either the total freedom either the complete stickness or an intermediate situation, depending on the size r_ε of these inclusions. A critical size $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$ is exhibited. The last part of this study deals with the limit of the solution of Signorini's problem in this present context.

1. INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLÈME

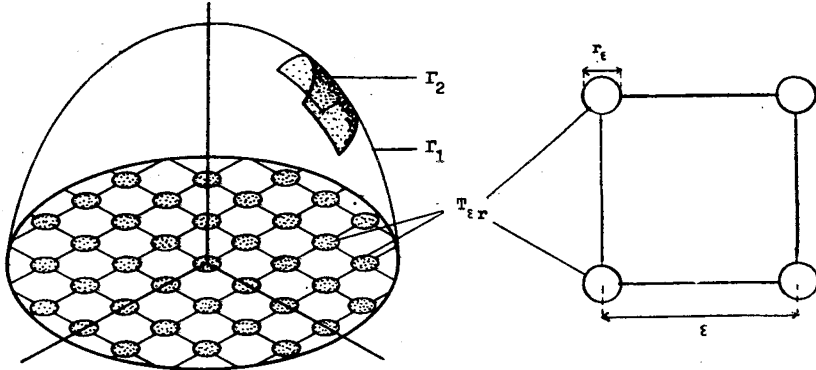
Soit Ω un ouvert borné de frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^3 , dont une partie Σ de la frontière $\partial\Omega$ est contenue dans le plan $x_3 = 0$. Soit $\Gamma = \partial\Omega - \Sigma$ et Γ_1, Γ_2 deux ouverts de Γ tels que $\bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$, avec $\text{mes}(\Gamma_2) > 0$. Soit T un ouvert de frontière régulière de \mathbb{R}^2 , contenu dans le disque unité $B_2(1)$ de \mathbb{R}^2 .

(*) Reçu en mars 1988.

⁽¹⁾ Faculté des Sciences et Techniques, 4 rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France.

⁽²⁾ Facultad de Ciencias, Avenida de los Castros s/n., 39005 Santander, Espagne.
Ce travail a été partiellement supporté par la CAYCIT.

Au centre x_{er} de chaque maille d'un réseau rectangulaire de taille ε et recouvrant Σ , on place un r_ε -homothétique T_{er} de T ($0 < r_\varepsilon < \varepsilon/2$), selon le schéma suivant :



L'ouvert Ω est occupé par un corps élastique homogène, fixé sur Γ_2 et sur chaque zone T_{er} (r est compris entre 1 et $R(\varepsilon)$, $R(\varepsilon)$ étant le nombre de zones de fixation contenues dans Σ ; $R(\varepsilon)$ est équivalent à aire $(\Sigma)/\varepsilon^2$). Le corps élastique est libre sur $\Sigma - \bigcup_r T_{er}$ et sur Γ_1 , et soumis à des forces extérieures \bar{f} , $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$ appartenant à $(L^2(\Omega))^3$. Nous noterons c la quantité $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (r_\varepsilon/\varepsilon^2)$.

Soient

$$e_{kh}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \quad (\text{tenseur des déformations}),$$

$$\sigma_{ij}(\bar{u}) = a_{ijkh} e_{kh}(\bar{u}) \quad (\text{tenseur des contraintes}),$$

où les coefficients a_{ijkh} satisfont les conditions habituelles de symétrie et d'ellipticité en élasticité linéaire (cf. [2], [11]). Nous avons adopté la convention de sommation des indices répétés.

Nous étudions le comportement asymptotique, lorsque ε tend vers zéro, de la solution du problème suivant :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{er}, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^\varepsilon) = 0 \text{ sur } \Sigma - \bigcup_r T_{er}, \end{cases}$$

où \bar{n} est la normale extérieure à Γ_1 .

La formulation variationnelle du problème (1.1) est :

$$(1.2) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_\varepsilon(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

$\delta_{V_\varepsilon(\Omega)}$ étant la fonction indicatrice de l'espace $V_\varepsilon(\Omega)$ obtenu par fermeture dans $(H^1(\Omega))^3$ de $\left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{\varepsilon r} \right\}$.

Soit \bar{u}^ε l'unique solution dans $V_\varepsilon(\Omega)$ du problème (1.2). Grâce aux propriétés d'ellipticité des coefficients a_{ijkh} et à l'inégalité de Korn dans Ω (cf. [5]) on obtient que la suite $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $(H^1(\Omega))^3$.

Dans [8, 9] on démontre par les techniques d'analyse asymptotique formelle que le problème limite est :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^0) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^0) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \sigma_{i3}(\bar{u}^0) + c C_{ij} u_j^0 = 0 \text{ sur } \Sigma \quad \text{si } c \geq 0,$$

$$(1.5) \quad u_j^0 = 0 \text{ sur } \Sigma \quad \text{si } c = +\infty,$$

où $C = (C_{ij})_{i,j=1,2,3}$ est la matrice symétrique et définie positive dont les coefficients sont donnés par l'expression :

$$(1.6) \quad C_{kl} = \int_{\mathbb{R}^{3+}} \sigma_{ij,y}(\bar{W}^k) e_{ij,y}(\bar{W}^l) dy \quad k, l = 1, 2, 3,$$

\bar{W}^k étant la solution du problème local (cf. [9]),

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij,y}(\bar{W}^k) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{3+}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \bar{W}^k = \bar{e}^k \text{ sur } T, \\ \sigma_{i3,y}(\bar{W}^k) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2 - \bar{T}, \\ \bar{W}^k(y) \longrightarrow 0, \\ \quad \quad \quad |y| \rightarrow +\infty \\ \quad \quad \quad y_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

(\bar{e}^k est le vecteur tel que : $e_i^k = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3$, et δ_{ik} est le symbole de Kronecker).

La formulation variationnelle du problème (1.3), (1.4) est :

$$(1.8) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \frac{1}{2} c \int_{\Sigma} C_{ij} u_i u_j d\Sigma + \delta_{V(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right).$$

La formulation variationnelle du problème (1.3), (1.5) ($c = +\infty$) est :

$$(1.9) \quad \text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_0(\Omega)}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

où l'espace $V(\Omega)$ est obtenu par fermeture dans $(H^1(\Omega))^3$ de l'espace $D = \{\bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$ et

$V_0(\Omega) = \{\bar{u} \in V(\Omega) / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Sigma\}$.

Dans la deuxième partie de cet article nous démontrons, en utilisant les techniques d'épi-convergence, le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1 : *La suite $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$, \bar{u}^ε solution du problème (1.2), converge dans la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$ vers \bar{u}^0 solution de (1.8) si $c \geq 0$, et vers \bar{u}^{0*} solution de (1.9) si $c = +\infty$.*

Il apparaît donc une taille critique des zones de fixation $r_\varepsilon^c = \varepsilon^2$. Si les zones de fixation ont une taille « petite » ($c = 0$), le corps élastique se comporte asymptotiquement comme un corps libre sur Σ ; si les zones de fixation ont une taille « grande » ($c = +\infty$), le corps se comporte asymptotiquement comme un corps fixé sur Σ ; entre ces deux situations apparaît un comportement asymptotique intermédiaire entre la liberté et la fixation totales.

Le terme étrange qui apparaît dans le problème limite (1.3), (1.4), pour $c > 0$, dépend de la taille des zones et de leur forme (cf. le problème « capacitaire » (1.7)). Nous indiquons dans ce cas ($c > 0$) le correcteur du premier ordre. Le résultat que nous obtenons est comparable aux résultats établis antérieurement, dans des situations voisines ([3] et [13]).

Dans la troisième partie nous considérons le cas particulier $r_\varepsilon = \alpha\varepsilon$, $\alpha > 0$. Dans cette situation, la convergence de \bar{u}^ε vers \bar{u}^{0*} a lieu dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$. Nous précisons la vitesse de convergence des suites $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_\varepsilon$ et $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$.

Dans la quatrième partie nous décrivons le comportement asymptotique de la solution du problème de Signorini associé. Cette description est également faite à l'aide des techniques d'épi-convergence, dont nous rappelons maintenant la définition et les propriétés essentielles.

DÉFINITION 1.2 : Soit (X, τ) un espace métrique. Soient F^ε et F des fonctionnelles définies sur (X, τ) à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La suite $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ τ -épi-converge vers F si et seulement si les assertions suivantes sont satisfaites :

1) Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_0^\varepsilon)_\varepsilon$ qui τ -converge vers x et telle que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(x_0^\varepsilon) \leq F(x)$.

2) Pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x^\varepsilon)_\varepsilon$ qui τ -converge vers x , $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(x^\varepsilon) \geq F(x)$.

L'adéquation de l'épi-convergence à l'analyse limite de problèmes de minimisation est explicitée dans la proposition suivante (cf. [1], [4]).

PROPOSITION 1.3 : 1) Supposons que le problème $\text{Min}_{x \in X} F^\varepsilon(x)$ ait une

solution x^ε . Si la suite $(x^\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans la topologie τ et si la suite $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ τ -épi-converge vers F , alors toute valeur d'adhérence \bar{x} de $(x^\varepsilon)_\varepsilon$ dans la topologie τ vérifie $F(\bar{x}) = \text{Min}_{x \in X} F(x)$. De plus

$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} F^{\varepsilon'}(x^{\varepsilon'}) = F(\bar{x})$ où $(x^{\varepsilon'})_{\varepsilon'}$ est la sous-suite de $(x^\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers

\bar{x} dans la topologie τ .

2) Supposons que $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ τ -épi-converge vers F et que G soit une fonction τ continue dans X . Alors $(F^\varepsilon + G)_\varepsilon$ τ -épi-converge vers $F + G$.

L'intérêt d'utiliser ce cadre variationnel est de fournir simultanément le problème limite (qui est un problème de minimisation) et la convergence de « l'énergie totale ».

2. CONVERGENCE DES SOLUTIONS ET CORRECTEUR

Soient F^ε, F les fonctionnelles définies dans $(H^1(\Omega))^3$ par :

$$(2.1) \quad F^\varepsilon(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_\varepsilon(\Omega)}(\bar{u}),$$

$$(2.2) \quad F(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + c \int_{\Sigma} C_{ij} u_i u_j d\Sigma + \delta_{V(\Omega)}(\bar{u})$$

si $c \geq 0$,

$$(2.3) \quad F(\bar{u}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_0(\Omega)}(\bar{u}) \quad \text{si } c = +\infty.$$

Comme la suite $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $(H^1(\Omega))^3$, où \bar{u}^ε est la solution du problème (1.2), nous sommes amenés à étudier la τ -épi-convergence de $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ quand τ désigne la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$ (cf. Proposition 1.3). La construction des fonctions tests introduites dans la Définition 1.2 utilise la solution \bar{W}^k du problème local (1.7) à partir de laquelle nous définissons la fonction $\bar{W}^{k,\varepsilon}$:

$$(2.4) \quad \bar{W}^{k,\varepsilon}(x) = \bar{e}^k - \bar{W}^k(x/r_\varepsilon) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{3+}.$$

Nous avons les estimations suivantes :

LEMME 2.1 : *Il existe une constante K telle que $\forall y \in \mathbb{R}^{3+}$:*

$$\begin{aligned} |W_j^k(y)| &\leq K \left(\frac{1}{d(y, T)} + \frac{1}{d(y, T)^2} \right), \\ |D_i W_j^k(y)| &\leq K \left(\frac{1}{d(y, T)^2} + \frac{1}{d(y, T)^3} \right), \end{aligned}$$

et $\forall x \in \mathbb{R}^{3+}$, $i, j, k = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} |e_j^k - W_j^{k,\varepsilon}(x)| &\leq K \left(\frac{r_\varepsilon}{d(x, T_\varepsilon)} + \frac{r_\varepsilon^2}{d(x, T_\varepsilon)^2} \right), \\ |D_i W_j^{k,\varepsilon}(x)| &\leq K \left(\frac{r_\varepsilon}{d(x, T_\varepsilon)^2} + \frac{r_\varepsilon^2}{d(x, T_\varepsilon)^3} \right). \end{aligned}$$

Démonstration : Remarquons que si \bar{W}^k est la solution de (1.7), alors (cf. [9]) :

$$(2.5) \quad W_j^k = -\sigma_{i3}(\bar{W}^k)|_T * G_{ij},$$

où G_{ij} est le tenseur symétrique de Green pour le milieu homogène considéré, $*$ désigne la convolution entre un élément de $H^{-1/2}(T)$ et un élément de $H^{1/2}(T)$.

Dans [7], le tenseur de Green est donné explicitement pour un milieu homogène et isotrope (cas des coefficients de Lamé) :

$$\begin{aligned} G_{11} &= \alpha \left(\frac{2(1-\sigma)\rho+z}{\rho(\rho+z)} + x^2 \frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right) \quad (\rho = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}), \\ G_{12} &= \alpha \left(\frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right) xy, \quad G_{13} = \alpha \left(\frac{xz}{\rho^3} - \frac{x(1-2\sigma)}{\rho(\rho+z)} \right), \\ G_{22} &= \alpha \left(\frac{2(1-\sigma)\rho+z}{\rho(\rho+z)} + y^2 \frac{2\rho(\sigma\rho+z)+z^2}{\rho^3(\rho+z)^2} \right), \\ G_{23} &= \alpha \left(\frac{yz}{\rho^3} - \frac{y(1-2\sigma)}{\rho(\rho+z)} \right), \quad G_{33} = \alpha \left(\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\sigma)}{\rho} \right), \end{aligned}$$

avec $\alpha = (1 + \sigma)/2 \pi E$, σ (resp. E) désignant le coefficient de Poisson (resp. le module d'Young) du milieu considéré. On remarque immédiatement que $\forall i, j, l = 1, 2, 3$:

$$(2.6) \quad |G_{ij}(x, y, z)| \leq \frac{\text{Cte}}{\rho} \quad \text{et} \quad |D_l G_{ij}(x, y, z)| \leq \frac{\text{Cte}}{\rho^2},$$

où Cte est une constante ne dépendant que de σ et E .

Dans le cas plus général d'un milieu homogène mais anisotrope, ces estimations ponctuelles sur la fonction de Green et ses dérivées premières résultent d'une « analyse dimensionnelle » (cf. [7] ; page 42).

Les estimations indiquées sur la solution \bar{W}^k de (1.7) sont alors déduites des estimations sur la fonction de Green (2.6) via la formule (2.5) (cf. [9]).

Les estimations sur la fonction $\bar{W}^{k, \varepsilon}$ sont déduites des estimations sur \bar{W}^k à l'aide du changement de variables : $x = r_\varepsilon y$. ■

Nous utilisons également un résultat dû à Marchenko et Hrouslav [10] page 134 :

LEMME 2.2 : Soit $(z^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite d'éléments de $H^1(\Omega)$ convergeant vers z dans la topologie faible de cet espace. Alors :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} |z^\varepsilon|^2 dx \right) = \frac{1}{2} \int_\Sigma |z|^2 d\Sigma,$$

où $\Sigma_\varepsilon = \{x \in \Omega / d(x, \Sigma) < \varepsilon\}$.

PROPOSITION 2.3 : Supposons $c \geq 0$. Pour tout \bar{v} de $D = \left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u}|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite de fonctions $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$, \bar{v}_0^ε appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$, vérifiant les propriétés suivantes :

1) $\bar{v}_0^\varepsilon \rightarrow \bar{v}$ dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible.

$$2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + c \int_\Sigma C_{ij} v_i v_j d\Sigma,$$

où C est la matrice définie par la relation (1.6).

3) Il existe une constante K indépendante de ε , telle que pour tout \bar{U} appartenant à $V(\Omega)$ et tout \bar{U}^ε appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$ avec $\bar{U}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{U}$ dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible, on ait :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx \geq \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}) dx - K \|\bar{U}\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v}\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

Démonstration : Soit φ appartenant à $C^\infty([0, 1])$, $0 \leq \varphi \leq 1$, φ à support dans $[0, 1/2]$, φ identiquement égale à 1 dans $[0, 1/4]$.

Notons $\varphi_{\varepsilon r}(x) = \varphi\left(\frac{|x - x_{\varepsilon r}| + r_\varepsilon}{\varepsilon/2}\right)$, où $x_{\varepsilon r}$ est le centre de la r -ième maille $Y_{\varepsilon r}$ du réseau recouvrant Σ , $Y_{\varepsilon r} = x_{\varepsilon r} + \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]^2$. $\varphi_{\varepsilon r}$ est une fonction régulière à support dans $B_3\left(x_{\varepsilon r}, \frac{\varepsilon}{4} - r_\varepsilon\right)$ et identiquement égale à 1 dans $B_3\left(x_{\varepsilon r}, \frac{\varepsilon}{8} - r_\varepsilon\right)$. Enfin, soit φ_ε la fonction définie sur Σ par juxtaposition des $\varphi_{\varepsilon r}$.

Notons $B_3(R)^+ = B_3(R) \cap \mathbb{R}^{3+}$, $\forall R > 0$,

$$B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ = B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^{3+}$$

et posons pour toute fonction régulière \bar{v} dans D :

$$(2.7) \quad \bar{v}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \bar{v}(x) - (\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}(x - x_{\varepsilon r})) \varphi_{\varepsilon r}(x) v_k(x) & \text{dans } B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+, \\ \bar{v}(x) & \text{dans } \Omega - \bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+. \end{cases}$$

Trivialement, \bar{v}_0^ε appartient à $V_\varepsilon(\Omega)$. De plus, en effectuant le changement de variable $y = x/r_\varepsilon$, on obtient :

$$\int_{\bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) dx \leq K \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon/r_\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^k) e_{ij}(\bar{W}^k) dy$$

et en utilisant les estimations du Lemme 2.1, on obtient la convergence faible de la suite $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$ vers \bar{v} .

On établit alors :

$$\begin{aligned} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) dx = \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_k) e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_l) dx + o_\varepsilon \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) v_k v_l dx + o_\varepsilon \end{aligned}$$

avec $o_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Utilisant la régularité de \bar{v} , on obtient :

$$\begin{aligned}
 F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \sum_r [v_k(x_{\varepsilon r}) v_l(x_{\varepsilon r}) \times \\
 &\quad \times \int_{B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) dx] + o_\varepsilon \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \sum_r \int_{Y_{\varepsilon r}} v_k v_l dx \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) \times \right. \\
 &\quad \left. \times e_{ij}((\bar{e}^l - \bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon) dx \right] + o_\varepsilon .
 \end{aligned}$$

A l'aide des estimations du Lemme 2.2 et de la définition de la fonction φ_ε , il vient :

$$\begin{aligned}
 F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + \\
 &\quad + \sum_r \int_{Y_{\varepsilon r}} v_k v_l dx \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{W}^{l, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon^2 dx \right) + o_\varepsilon ,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + c \int_{\Sigma} C_{kl} v_k v_l d\Sigma ,$$

où C est la matrice définie en (1.6). La deuxième assertion de la proposition est donc démontrée.

La démonstration de la troisième assertion de cette proposition utilise à nouveau les estimations du Lemme 2.1. Soit $(\bar{U}^\varepsilon)_\varepsilon$ une suite convergeant vers \bar{U} dans la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$, avec \bar{U}^ε appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx + \\
 &\quad + \sum_r \int_{B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r} v_k) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx + o_\varepsilon \\
 &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{U}) dx + A_\varepsilon + o_\varepsilon
 \end{aligned}$$

avec

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r} v_k) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) dx .$$

Compte tenu de la convergence :

$$(\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_\varepsilon v_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } (H^1(\Omega))^3\text{-faible} ,$$

établie précédemment, ce terme A_ε peut s'écrire :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}((\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon}) \varphi_{\varepsilon r}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) v_k dx + o_\varepsilon ,$$

et en développant :

$$\begin{aligned} A_\varepsilon &= \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} a_{ijkl} (D_l \varphi_{\varepsilon r} (\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon})_h + D_h \varphi_{\varepsilon r} (\bar{e}^k - \bar{W}^{k, \varepsilon})_l) \\ &\times e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) v_k dx + o_\varepsilon . \end{aligned}$$

Grâce aux estimations du Lemme 2.1, on obtient :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) e_{ij}(\bar{U}^\varepsilon) \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + o_\varepsilon ,$$

puis en intégrant par parties, en utilisant la définition de $\bar{W}^{k, \varepsilon}$ et le fait que $\varphi_{\varepsilon r}$ soit identiquement nulle sur $\partial B_3(x_{er}, \varepsilon)$, on obtient :

$$A_\varepsilon = \sum_r \int_{B_3(x_{er}, \varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k, \varepsilon}) U_j^\varepsilon D_i \varphi_{\varepsilon r} v_k dx + o_\varepsilon .$$

Les estimations du Lemme 2.1 donnent :

$$|A_\varepsilon| \leq K \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma_\varepsilon} |\bar{U}^\varepsilon| |\bar{v}| dx + o_\varepsilon .$$

On utilise alors le résultat du Lemme 2.2 :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |A_\varepsilon| \leq K \|\bar{U}\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v}\|_{(L^2(\Sigma))^3}$$

et la proposition est démontrée. ■

Remarque 2.4

Une première idée, pour construire la suite $(\bar{v}_\varepsilon)_\varepsilon$ apparaissant dans la Proposition 2.3, consisterait à utiliser la solution \bar{w}_ε^k du problème :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \\ & \varpi \in (H^1(B_3(\varepsilon)^+))^3 \\ & \varpi = z^k \text{ sur } \partial B_3(\varepsilon)^+ \\ & \varpi = 0 \text{ sur } T_\varepsilon \end{aligned} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}) e_{ij}(\bar{w}) dx ,$$

où $\partial B_3(\varepsilon)^+ = \partial B_3(\varepsilon) \cap \{x_3 > 0\}$.

Il semble toutefois très difficile de calculer \bar{w}_ε^k , même dans le cas particulier important des coefficients de Lamé avec $T = B_2(1)$. Il semble également difficile d'obtenir des estimations sur cette solution \bar{w}_ε^k , analogues à celles établies par Marchenko et Hrouslov, pour les solutions des systèmes elliptiques (cf. [10], Lemme 2.2). Notons toutefois la proposition suivante. ■

PROPOSITION 2.5 : Soit \bar{w}_ε^k la solution du problème (2.8) et $c > 0$. Le coefficient C_{kl} donné par la relation (1.6) est égal à :

$$C_{kl} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^k) e_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^l) dx \right) / c .$$

Démonstration : Pour tout $R > 2$, $k = 1, 2, 3$, soit $\bar{W}^{k,R}$ la solution du problème :

$$\begin{aligned} & \text{Min} \\ & \varpi \in (H^1(B_3(R)^+))^3 \\ & \varpi = z^k \text{ sur } \partial B_3(R)^+ \\ & \varpi = 0 \text{ sur } T \end{aligned} \int_{B_3(R)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}) e_{ij}(\bar{w}) dy ,$$

où $\partial B_3(R)^+ = \partial B_3(R) \cap \mathbb{R}^{3+}$. Notons :

$$C_{kl}^R = \int_{B_3(R)^+} \sigma_{ij}(\bar{W}^{k,R}) e_{ij}(\bar{W}^{l,R}) dy , \quad k, l = 1, 2, 3 .$$

Compte tenu du fait que \bar{W}^k est la solution d'un problème de minimisation (cf. [9]) on obtient les inégalités :

$$C_{kk} \leq C_{kk}^{R'} \leq C_{kk}^R \leq C_{kk}^2 \quad \forall R, R' : 2 < R < R' , \quad k = 1, 2, 3 ,$$

ce qui démontre la convergence de $(\bar{W}^{k,R})_R$ vers \bar{W}^k , $R \rightarrow +\infty$, dans la norme $\sum_{i,j=1}^3 \|e_{ij}(\bar{u})\|_{L^2(\mathbb{R}^{3+})}$.

Effectuant le changement de variables $x = r_\varepsilon y$ dans l'intégrale de l'énoncé de la proposition, il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{B_3(\varepsilon)^+} \sigma_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^k) e_{ij}(\bar{w}_\varepsilon^l) dx = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^2} C_{kl}^{r_\varepsilon/\varepsilon},$$

d'où le résultat de la proposition. ■

Notre résultat principal est énoncé dans le théorème suivant :

THÉORÈME 2.6 : *La suite des fonctionnelles $(F^\varepsilon)_\varepsilon$ définies en (2.1) τ -épi-converge vers la fonctionnelle F , où F est définie par la relation (2.2) si $c \geq 0$, et par (2.3) si $c = +\infty$; τ est la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$.*

Démonstration : La démonstration du théorème repose sur la vérification des deux assertions de la Définition 1.2. On considère les deux cas $c \geq 0$ et $c = +\infty$:

Premier cas : $c \geq 0$. Supposons que \bar{v} appartient à D , $D = \{\bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u}|_{\Gamma_2} = 0\}$. L'assertion 2) de la Proposition 2.3 affirme l'existence d'une suite $(\bar{v}_0^\varepsilon)_\varepsilon$ ($\bar{v}_0^\varepsilon \in V_\varepsilon(\Omega)$) convergeant vers \bar{v} dans la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$, telle que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}_0^\varepsilon) = F(\bar{v}).$$

Supposons que \bar{v} appartient à $V(\Omega)$. Il existe alors une suite $(\bar{v}^n)_n$ d'éléments de D convergeant vers \bar{v} dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$. Pour chaque n , l'assertion 2) de la Proposition 2.3 affirme l'existence d'une suite $((\bar{v}^n)_0^\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers \bar{v}^n , dans la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$ et telle que :

$$(2.9) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) = F(\bar{v}^n).$$

Par suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) = F(\bar{v}),$$

puisque F est continue dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$.

L'argument de diagonalisation du Corollaire 1.16 de [1] prouve l'existence d'une sous-suite $((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon)_\varepsilon$, avec $(\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon$ appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$, $((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers \bar{v} dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible, et telle que :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon((\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon) \leq F(\bar{v}).$$

La première assertion de la Définition 1.2 est donc démontrée avec $\bar{v}_0^\varepsilon = (\bar{v}^{n(\varepsilon)})_0^\varepsilon$. Vérifions la seconde assertion :

Soit \bar{v} un élément de l'espace $V(\Omega)$ et soit \bar{v}^ε appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$ telle que $(\bar{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers \bar{v} , dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible. Soit $(\bar{v}^n)_n$ une suite d'éléments de D convergeant vers \bar{v} dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$. Écrivons :

$$(2.10) \quad F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) + \langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle,$$

où $(\bar{v}^n)_0^\varepsilon$ est la fonction de $V_\varepsilon(\Omega)$, associée à \bar{v}^n par la Proposition 2.3 et

$$\langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle = \int_\Omega \sigma_{ij}((\bar{v}^n)_0^\varepsilon) e_{ij}(\bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon) dx.$$

L'assertion 3) de la Proposition 2.3 implique :

$$(2.11) \quad \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \partial F^\varepsilon((\bar{v}^n)_0^\varepsilon), \bar{v}^\varepsilon - (\bar{v}^n)_0^\varepsilon \rangle \geq \\ \geq \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}^n) e_{ij}(\bar{v} - \bar{v}^n) dx - K \|\bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v} - \bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

On obtient donc, grâce à (2.9), (2.10) et (2.11) :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F(\bar{v}^n) + \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{v}^n) e_{ij}(\bar{v} - \bar{v}^n) dx - \\ - K \|\bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3} \|\bar{v} - \bar{v}^n\|_{(L^2(\Sigma))^3}.$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$. Les propriétés de $(\bar{v}^n)_n$ entraînent :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq F(\bar{v})$$

et la seconde assertion de la définition de l'épi-convergence est vérifiée.

Deuxième cas : $c = +\infty$. Pour toute fonction \bar{v} de $V(\Omega)$ et pour tout $K > 0$ on a :

$$(2.12) \quad F^\varepsilon(\bar{v}) \geq F_K^\varepsilon(\bar{v}),$$

où F_K^ε est la fonctionnelle définie par (2.1), pour $r_\varepsilon = K\varepsilon^2$.

Soit \bar{v}^ε appartenant à $V_\varepsilon(\Omega)$, avec $(\bar{v}^\varepsilon)_\varepsilon$ convergeant vers \bar{v} dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible. De l'inégalité (2.12) on déduit :

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_K^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq \\ &\geq \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx + K \int_{\Sigma} C_{ij} v_i v_j d\Sigma. \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que la matrice C est définie positive on obtient que pour toute fonction \bar{v} de $V(\Omega)$ non nulle (presque partout) sur Σ :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) = +\infty.$$

En revanche si $\bar{v}|_\Sigma$ est nulle, on établit immédiatement :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F^\varepsilon(\bar{v}^\varepsilon) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{v}) dx,$$

donc l'assertion 2) de la Définition 1.2 est démontrée ; l'assertion 1) se vérifie en prenant pour toute \bar{v} de $V(\Omega)$, \bar{v}_0^ε identiquement égale à \bar{v} . ■

Remarque 2.7

Comme conséquence du Théorème 2.6 et des résultats d'épi-convergence énoncés dans la Proposition 1.3, on obtient le résultat du Théorème 1.1.

De plus on a : si $c = 0$ (resp. $c = +\infty$) la suite $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers \bar{u}^0 (resp. \bar{u}^{0*}) dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$, où \bar{u}^ε , \bar{u}^0 , \bar{u}^{0*} sont les solutions des problèmes (1.2), (1.8) et (1.9) respectivement. Dans le cas $c > 0$ nous donnons maintenant un correcteur du premier ordre. ■

THÉORÈME 2.8 : *Soit $c > 0$ et φ_ε la fonction obtenue par juxtaposition des fonctions $\varphi_{\varepsilon r}$ définies en (2.7) :*

1) Si \bar{u}^0 appartient à $(C^1(\bar{\Omega}))^3$, la suite $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0)_\varepsilon$ converge vers 0 dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$.

2) Dans le cas général, la suite $(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0)_\varepsilon$ converge vers 0 dans la topologie forte de $(W^{1,1}(\Omega))^3$.

Démonstration :

1) Avec la notation (2.7) la fonction $\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^0 + (\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon u_k^0$ s'écrit $\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon$. Sous les hypothèses faites ici, la suite $(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers 0 dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible. De plus, la Proposition 2.3 implique :

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{ij}((\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_\varepsilon^\varepsilon) dx \geq 0.$$

Comme par ailleurs, en utilisant la formulation variationnelle du problème (1.1) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon) dx = 0,$$

on conclut à l'aide de l'inégalité de Korn dans Ω .

2) On utilise un argument déjà employé dans [3] et [13] : soit $(\bar{u}^n)_n$ une suite de fonctions de $(C^1(\bar{\Omega}))^3$ convergeant vers \bar{u}^0 , dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$. Écrivons :

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} &\leq \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^n)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} + \\ &+ \|\bar{u}^n - \bar{u}^0\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} + \|(\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon(\bar{u} - \bar{u}^n)_k\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3}. \end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 2.3, on établit immédiatement :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{u}^\varepsilon - (\bar{u}^0)_0^\varepsilon\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} \leq o(n),$$

avec $o(n) \longrightarrow 0$. Grâce aux estimations ponctuelles du Lemme 2.1, on

prouve la convergence suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(\bar{\varepsilon}^k - \bar{W}^{k,\varepsilon}) \varphi_\varepsilon(\bar{u}^0 - \bar{u}^n)_k\|_{(W^{1,1}(\Omega))^3} = o(n). \quad \blacksquare$$

3. LE CAS PARTICULIER $r_\varepsilon = \alpha\varepsilon$ ($0 < \alpha < 1/2$)

Dans cette situation particulière, la suite $(\bar{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers \bar{u}^{0*} , dans la topologie forte de $(H^1(\Omega))^3$ (cf. Remarque 2.7). La suite $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$ converge donc vers 0, dans la topologie forte de $(L^2(\Sigma))^3$. L'objet de ce paragraphe est de préciser la vitesse de convergence de cette suite vers 0. Les résultats de ce paragraphe sont analogues à ceux de [13] concernant le problème scalaire, c'est-à-dire le problème de minimisation :

$$\text{Min}_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \bigcup_r T_{er}}} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} fu dx \right).$$

Nous supposons que Γ_1 est vide, ce qui signifie que le corps élastique est entièrement fixé sur la partie Γ de la frontière de Ω non contenue dans le plan $\{x_3 = 0\}$. Nous supposons aussi que Ω est très régulier de sorte que \bar{u}^{0*} appartient à $(H^2(\Omega))^3$ et $\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*})$ appartient à $L^2(\Sigma)$, pour $i = 1, 2, 3$ (cf. [2], [11]).

Les estimations suivantes précisent la « vitesse de convergence » de $(\bar{u}^\varepsilon|_\Sigma)_\varepsilon$ vers 0.

PROPOSITION 3.1 : 1) La suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon|_\Sigma\right)_\varepsilon$ est bornée dans $(L^2(\Sigma))^3$.

2) La suite $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$ converge vers 0, dans la topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$.

Démonstration : En utilisant l'existence d'une constante K indépendante de ε , telle que pour toute v de $H^1(\Omega)$, $v = 0$ sur $\bigcup_r T_{\varepsilon r}$:

$$(3.1) \quad \int_{\Sigma_\varepsilon} u^2 dx \leq K\varepsilon^2 \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx,$$

$$\int_{\Sigma} u^2 d\Sigma \leq K\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx.$$

(cf. [13], Lemme 3.4), on obtient, compte tenu de l'inégalité de Korn :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\Sigma &\leq K\varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} |\nabla(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})|^2 dx \\ &\leq K\varepsilon \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx \\ &\leq K\varepsilon \int_{\Sigma} |\sigma_{i3}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})| |(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i| d\Sigma. \end{aligned}$$

Par suite, grâce aux propriétés de régularité de \bar{u}^{0*} :

$$\int_{\Sigma} |\bar{u}^\varepsilon|^2 d\Sigma \leq K\varepsilon \|\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*})\|_{L^2(\Sigma)} \|(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i\|_{L^2(\Sigma)}$$

et l'assertion 1) de la proposition est alors démontrée. Remarquons que :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_i d\Sigma,$$

on établit que la suite $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$ reste bornée dans $(H^1(\Omega))^3$.

Comme $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})|_\Sigma\right)_\varepsilon$ converge vers 0, dans la topologie forte de $(L^2(\Sigma))^3$, on obtient la convergence de $\left(\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})\right)_\varepsilon$ vers 0, dans la

topologie faible de $(H^1(\Omega))^3$, donc l'assertion 2) de la proposition est démontrée. ■

Pour achever l'étude de cette situation particulière, il nous reste à déterminer la limite de la suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \Big|_\Sigma\right)_\varepsilon$ pour la topologie faible de $(L^2(\Sigma))^3$. Nous sommes naturellement amenés à introduire la fonction \bar{Z}^k , $k = 1, 2, 3$, solution du problème local :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \sigma_{ij,y}(\bar{Z}^k) = 0 \text{ dans } G = Y \times (0, +\infty), \quad i = 1, 2, 3, \\ \bar{Z}_i^k = 0 \text{ sur } \alpha T, \\ \sigma_{i3,y}(\bar{Z}^k) = \delta_{ik} \text{ sur } Y - \overline{\alpha T}, \\ \bar{Z}^k \text{ Y-périodique,} \end{cases}$$

où Y est le carré unité de \mathbb{R}^2 : $Y = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et Y -périodique veut dire périodique par rapport aux deux premières variables.

Le problème (3.2) a pour formulation variationnelle : trouver une fonction \bar{Z}^k dans $V(G)$ telle que :

$$(3.3) \quad \int_G \sigma_{ij}(\bar{Z}^k) e_{ij}(\bar{Z}) dy = \int_Y Z_k dy_1 dy_2 \quad \forall \bar{Z} \in V(G),$$

où $V(G)$ est l'espace :

$$\left\{ \bar{Z} / \bar{Z} \in (H^1(G \cap \{y_3 < R\}))^3, \forall R > 0, \bar{Z}|_T = 0, \bar{Z} \text{ Y-périodique} \right. \\ \left. \text{et } \|e_{ij}(\bar{Z})\|_{L^2(G)} < \infty, i, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

$V(G)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\left(\int_G \sigma_{ij}(\bar{Z}) e_{ij}(\bar{Z}) dy\right)^{1/2}$.

L'existence d'une solution unique \bar{Z}^k du problème (3.3) résulte de l'inégalité de Korn dans $G \cap \{y_3 < R\}$ et du théorème de Lax-Milgram. La principale propriété de cette fonction est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2 : *Il existe une fonction \bar{Z}_0^k appartenant à $(L^2(G))^3$ et un vecteur constant \bar{A}^k de \mathbb{R}^3 tels que pour tout y de \mathbb{R}^3 :*

$$\bar{Z}^k(y) = \bar{Z}_0^k(y) + \bar{A}^k.$$

Démonstration : En effectuant des calculs analogues à ceux de [12] Théorème 1, ou [6] Théorème 3, on obtient le résultat de la proposition. ■

On définit la fonction $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$ sur $G_\varepsilon = Y_\varepsilon \times (0, +\infty)$, $Y_\varepsilon = \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, par :

$$(3.4) \quad \bar{Z}^{k, \varepsilon}(x) = \bar{Z}^k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall x \in G_\varepsilon.$$

Cette fonction $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$ étant Y_ε -périodique peut être prolongée en une fonction définie sur \mathbb{R}^{3+} , encore notée $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$. La restriction à Ω de cette fonction $\bar{Z}^{k, \varepsilon}$ appartient à $(H^1(\Omega))^3$ et satisfait les propriétés suivantes :

LEMME 3.3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) &= 0 \text{ dans } G_\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \\ Z_i^{k, \varepsilon} &= 0 \text{ sur } T_\varepsilon, \\ \sigma_{i3}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) &= \frac{1}{\varepsilon} \delta_{ik} \text{ sur } Y_\varepsilon - \bar{T}_\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus, la suite $(\bar{Z}^{k, \varepsilon})_\varepsilon$ est bornée dans $(L^2(\Omega))^3$ et la suite $(\varepsilon^{1/2} e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}))_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, $i, j = 1, 2, 3$.

Démonstration : Les trois premières propriétés sont des conséquences de la définition (3.4) et du fait que \bar{Z}^k est solution faible du problème (3.2). Les deux dernières se démontrent facilement à l'aide de la Proposition 3.2 et des calculs simples analogues à ceux effectués dans [13]. ■

Le résultat concernant la limite de la suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \mid_\Sigma\right)_\varepsilon$ est énoncé dans la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4 : La suite $\left(\frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \mid_\Sigma\right)_\varepsilon$ converge, dans la topologie faible de $(L^2(\Sigma))^3$ vers

$$-\sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \left(\int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) \bar{e}^k.$$

Démonstration : Nous utilisons un argument déjà employé dans [13] et [15]. Soit $\bar{\Phi}$ une fonction de $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$, nulle sur Γ . Alors :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon} \Phi_k) dx &= \\ &= \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) \Phi_k dx + \int_\Omega \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \Phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx. \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) \phi_k dx + \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx .$$

Ces deux égalités donnent donc :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon} \phi_k) dx = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})) e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx - \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(\bar{Z}^{k, \varepsilon}) dx .$$

En intégrant par parties, et compte tenu du Lemme 3.3 :

$$- \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \phi_k Z_i^{k, \varepsilon} d\Sigma = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) D_i \phi_k Z_j^{k, \varepsilon} dx - \int_{\Omega} a_{ijlh} D_l \phi_k(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*})_h e_{ij}(Z^{k, \varepsilon}) dx + \int_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \cdot \bar{\phi} d\Sigma .$$

Compte tenu des diverses estimations établies dans le Lemme 3.3 et la Proposition 3.1 et du Lemme 4.1 de [14] il est possible de passer à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma} \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon \cdot \bar{\phi} d\Sigma = - \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \phi_k \left(\int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) d\Sigma .$$

L'égalité précédente étant vraie pour toute fonction $\bar{\phi}$ de $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$, nulle sur Γ , on obtient le résultat énoncé dans la proposition. ■

COROLLAIRE 3.5 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}^{0*}) dx = \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) \sigma_{k3}(\bar{u}^{0*}) d\Sigma \left(\int_Y Z_i^k(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2 \right) . \quad \blacksquare$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}^e - \bar{u}^{0*}) e_{ij}(\bar{u}^e - \bar{u}^{0*}) dx = - \int_{\Sigma} \sigma_{i3}(\bar{u}^{0*}) u_i^e d\Sigma$$

et d'utiliser le résultat de convergence établi dans la Proposition 3.4 pour démontrer le corollaire. ■

4. ANALYSE LIMITE DU PROBLÈME DE SIGNORINI

La situation géométrique est celle décrite dans le paragraphe 1. Au lieu d'imposer au corps élastique de rester fixé sur les zones T_{er} , nous imposons ici $u_3 \geq 0$ sur $\bigcup_r T_{er}$ ce qui traduit une tendance au décollement. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution \bar{u}^{se} du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^{se}) + f_i = 0 \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^{se} = 0 \text{ sur } \Gamma_2, \\ u_3^{se} \geq 0 \text{ sur } \bigcup_r T_{er}, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^{se}) n_j = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^{se}) = 0 \text{ sur } \Sigma - \bigcup_r T_{er}. \end{array} \right.$$

La solution faible \bar{u}^{se} de ce problème, est solution du problème de minimisation :

$$\text{Min}_{\bar{u} \in (H^1(\Omega))^3} \left(F^{se}(\bar{u}) - \int_{\Omega} \bar{f} \cdot \bar{u} dx \right),$$

où F^{se} est la fonctionnelle définie sur $(H^1(\Omega))^3$ par :

$$(4.1) \quad F^{se}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \delta_{V_{3e}(\Omega)}(\bar{u}),$$

$V_{3e}(\Omega)$ étant la fermeture dans $(H^1(\Omega))^3$ de

$$\left\{ \bar{u} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3 / \bar{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } u_3 \geq 0 \text{ sur } \bigcup_r T_{er} \right\}.$$

THÉORÈME 4.1 : La suite $(F^{s\varepsilon})_\varepsilon$ définie en (4.1) τ -épi-converge vers la fonctionnelle F^s définie sur $(H^1(\Omega))^3$ par :

$$F^s(\bar{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx + \frac{1}{2} c \int_{\Sigma} C_{33}(u_3^-)^2 d\Sigma ,$$

où C_{33} est le coefficient donné par (1.6) avec $k = l = 3$, et u_3^- est la partie négative de u_3 : $u_3^-(x) = -\min(u_3(x), 0)$.

Démonstration : Elle est tout à fait analogue à celle du Théorème 2.6 hormis la modification naturelle de la fonction test :

$$\bar{v}_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} \bar{v}(x) + (\bar{\varepsilon}^3 - \bar{W}^{3,\varepsilon}(x - x_{\varepsilon r})) \varphi_{\varepsilon r}(x) v_3^-(x) & \text{dans } B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ , \\ \bar{v}(x) & \text{dans } \Omega - \bigcup_r B_3(x_{\varepsilon r}, \varepsilon)^+ . \end{cases} \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 4.2 : La suite $(\bar{u}^{s\varepsilon})_\varepsilon$ converge dans $(H^1(\Omega))^3$ -faible vers la solution faible du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}^{s0}) + f_i = 0 & \text{dans } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \\ u_i^{s0} = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \sigma_{ij}(\bar{u}^{s0}) n_j = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \sigma_{i3}(\bar{u}^{s0}) + c C_{33} u_3^{s0-} = 0 & \text{sur } \Sigma \text{ si } c \geq 0, \\ u_3^{s0-} = 0 & \text{sur } \Sigma \text{ si } c = +\infty. \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] H. ATTOUCH, *Variational convergence for functions and operators*. Appli. Maths. Series. Pitman, London (1984).
- [2] P. CIARLET, *Elasticité tridimensionnelle*. Masson, Paris (1986).
- [3] D. CIORANESCU et F. MURAT, *College de France Seminar. Research Notes in Maths*. Vols. 60, 70. Pitman, London (1982).
- [4] E. DE GIORGI, *Convergence problems for functionals and operators*. Proceedings Int. Congress « Recent Methods in Nonlinear Analysis ». De Giorgi, Mosco Eds. Pitagora Editrice, Bologna (1979).

- [5] G. DUVAUT et J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris (1972).
- [6] V. A. KONDRATIEV et O. A. OLEINIK, *On the behaviour at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral*. Arch. Rat. Mech. Anal. pp. 75-89 (1987).
- [7] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Théorie de l'élasticité*. Editions Mir, Moscou (1967).
- [8] M. LOBO et E. PEREZ, *Comportement asymptotique d'un corps élastique dont une surface présente de petites zones de collage*. C.R.A.S. Série II, 304, n° 5, pp. 195-198 (1987).
- [9] M. LOBO et E. PEREZ, *Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small sticked regions*. Math. Modelling and Num. Analysis, Vol. 22, n° 4, pp. 609-624 (1988).
- [10] V. A. MARCHENKO et E. J. HROUSLOV, *Problèmes aux limites dans des domaines avec frontières finement granuléés*. Naukova Dumka, Kiev (1974) (en russe).
- [11] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [12] O. A. OLEINIK et G. A. YOSIFIAN, *On the asymptotic behaviour at infinity of solutions in linear elasticity*. Arch. Rat. Mech. Anal., 78, pp. 29-53 (1982).
- [13] C. PICARD, *Analyse limite d'équations variationnelles dans un domaine contenant une grille*, Math. Modelling and Num. Analysis, Vol. 21, n° 2, pp. 293-326 (1987).
- [14] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non-homogeneous media and vibration theory*, Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer Verlag, Berlin (1980).
- [15] L. TARTAR, *Incompressible fluid flow in a porous medium. Convergence of the homogeneization process*. Appendice dans la référence [14].