

MONIQUE DAUGE

SERGE NICAISE

MARYSE BOURLARD

JEAN MBARO-SAMAN LUBUMA

**Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. I : Résultats généraux pour le problème de Dirichlet**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 24, n° 1 (1990), p. 27-52

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1990\\_\\_24\\_1\\_27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_1_27_0)

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



**COEFFICIENTS DES SINGULARITÉS  
POUR DES PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES  
SUR UN DOMAINE À POINTS CONIQUES.  
I : RÉSULTATS GÉNÉRAUX POUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET (\*)**

par Monique DAUGE <sup>(1)</sup> et Serge NICAISE <sup>(2)</sup>,  
Maryse BOURLARD <sup>(3)</sup> et Jean Mbaro-Saman LUBUMA <sup>(4)</sup>

Communiqué par E. SANCHEZ-PALENCIA

Résumé. — *Il est bien connu, cf. par exemple les travaux de Kondrat'ev, qu'une solution d'un problème aux limites sur un domaine dont la frontière a un point conique, admet une décomposition en parties régulière et singulière. La partie singulière est combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions qui ne dépendent que du domaine et de l'opérateur. Les coefficients de cette combinaison linéaire dépendent de la solution. Nous donnons des formules exprimant ces coefficients en fonction du second membre et éventuellement de la solution. Dans cette première partie, nous étudions le problème de Dirichlet pour un opérateur à coefficients réguliers sur un domaine  $n$ -dimensionnel. Nos formules sont valables dans un cadre fonctionnel beaucoup plus large que celui de Maz'ya et Plamenevskii dans [M-P2].*

Abstract. — *It is well known, cf. Kondrat'ev's works for instance, that a solution of a boundary value problem on a domain with conical points, may be split into a regular and a singular part. The singular part is a linear combination of a finite set of functions which only depend on the domain and on the operator. We give formulae for those coefficients in relation to the right hand side of the equation and to the solution. In that first part, we study the Dirichlet problem for an operator with smooth coefficients on a  $n$ -dimensional domain. Our formulae hold in a wider functional framework than the one which was given by Maz'ya and Plamenevskii in [M-P2].*

---

(\*) Reçu en juin 1988.

(1) Département de Mathématiques et Informatique, Université de Nantes, U.A. C.N.R.S. 758 2 rue de la Houssinière, 44072 Nantes, France.

(2) Département de Mathématiques, Université de l'État à Mons, 17 place Warocqué, 7000 Mons, Belgique.

(3) Département de Mathématiques, Université de l'État à Mons, 15 avenue Maistriau, 7000 Mons, Belgique.

(4) Département de Mathématiques, Université de Annaba, BP n° 12, Annaba, Algérie.

## § 1. INTRODUCTION

## 1.A. Finalités de l'ensemble de l'étude

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbf{R}^n$ , à singularités coniques. Il est bien connu (*cf.* [K], [M-P1, 2] [D]) que, sur un tel domaine, une solution d'un problème aux limites elliptique n'a pas en général la régularité optimale correspondant à celle du second membre et que cette solution  $u$  peut se décomposer en la somme d'une fonction  $v$  de régularité optimale et d'une combinaison linéaire finie  $\sum_i \delta_i w_i$  où les fonctions singulières  $w_i$  ne dépendent que du

domaine et du problème aux limites et les  $\delta_i$  sont des coefficients complexes qui dépendent du second membre (et de la solution  $u$  si le problème n'est pas injectif).

Le but de cet article est de préciser l'expression des coefficients  $\delta_i$ . Ce sujet a déjà été traité dans un cadre général dans [M-P2]: les opérateurs étudiés sont des problèmes aux limites généraux pour des systèmes elliptiques et les espaces fonctionnels utilisés sont les espaces de Sobolev à poids « totalement caractéristique »

$$V_{\rho, \beta}^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), r^{\beta + |\alpha| - k} D^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}$$

où  $r$  désigne la distance aux points singuliers de  $\Omega$ .

D'autre part, en ce qui concerne le problème de Dirichlet sur un polygone pour l'opérateur de Laplace, avec un second membre de classe  $L_p(\Omega)$ , des expressions des coefficients ont été données dans [G] et [M] et aussi dans [L-S] lorsque le second membre s'annule au voisinage des points singuliers de  $\Omega$ . Trois des auteurs ont donné des formules systématiques des coefficients dans un cadre fonctionnel plus général dans la note [D-L-N] qui constitue une synthèse de travaux antérieurs indépendants de ces trois auteurs.

Dans l'ensemble de ce travail nous nous proposons trois buts :

1) Élargir le cadre fonctionnel de [M-P2] quitte à restreindre la classe d'opérateurs (principalement le problème de Dirichlet pour un opérateur elliptique  $L(x; D_x)$  d'ordre  $2m$  à coefficients réguliers) pour arriver à décrire les coefficients des singularités de  $u$  solution de

$$(1.1) \quad u \in \dot{H}^m(\Omega), \quad Lu \in W_p^{s-m}(\Omega)$$

où  $W_p^s(\Omega)$  désigne l'espace de Sobolev usuel sur  $\Omega$  (rappelons que dans [M-P2] seuls les espaces à poids sont considérés, de plus une restriction forte est imposée sur les poids dès que les opérateurs ne sont pas homogènes à coefficients constants).

2) Préciser au maximum l'expression des coefficients pour certains opérateurs particuliers : le Laplacien sur un cône en dimension quelconque, le bilaplacien sur un polygone, l'opérateur de Helmholtz  $-\Delta + \xi I$  sur un polygone et aussi des problèmes à dérivées obliques mixtes pour le Laplacien sur un polygone.

3) Exploiter ces résultats pour approcher numériquement par éléments finis la solution d'un problème coercif sur un polygone et les coefficients des singularités de cette solution et estimer l'erreur en fonction d'une puissance du pas  $h$  de la triangulation.

Selon ce schéma, notre article est divisé en trois parties.

*Première partie* : § 1, 2, 3, 4. Au § 2, nous donnons des formules très générales pour les coefficients : ils dépendent soit du second membre seul, soit de la solution seule ; ils ont une forme intégrale, ou ponctuelle, ou mixte : théorèmes (2.15) et (2.18). Dans le § 3, nous rappelons la notion de chaîne de Jordan et introduisons les différentes fonctions qui permettront de relier chaque singularité à une singularité bien particulière du problème dual ; dans ce paragraphe, nous reprenons des résultats démontrés dans [M-P2, 3]. Cela nous permet au § 4 de préciser l'expression des coefficients : théorèmes (4.7), (4.19) et (4.35).

*Deuxième partie* : § 5, 6, 7, 8. Au § 5, nous précisons les singularités et les singularités duales pour le Laplacien sur un cône, en fonction des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur l'intersection du cône et de la sphère unité : théorèmes (5.7) et (5.11). Le reste de l'article est consacré à l'étude d'opérateurs sur des domaines polygonaux plans. Au § 6, nous traitons le cas du bilaplacien : (6.7), (6.9), (6.19) et au § 7 celui d'un opérateur non homogène :  $\Delta - \xi I$ , avec  $\xi$  dans  $\mathbf{C}$  : (7.9), (7.22), (7.30). Dans les deux cas, nous précisons les expressions des coefficients des singularités. Enfin, au § 8, nous étendons les résultats de ce travail à des problèmes aux limites différents de celui de Dirichlet, à savoir des problèmes mixtes et à dérivées obliques pour le Laplacien, dans les cas où le problème adjoint est du même type (cadre variationnel) : (8.11), (8.13).

*Troisième partie* : § 9, 10, 11, 12. Au § 9, nous précisons les opérateurs que nous étudions : le problème de Dirichlet associé à un opérateur fortement elliptique d'ordre  $2m$  homogène à coefficients constants et aussi le problème mixte du § 8 ; nous rappelons les espaces  $V_h$  d'approximation. Au § 10, nous déduisons des résultats de régularité de [D] dans les espaces de Sobolev  $H^s$  à exposant fractionnaire, les ordres « optimaux » d'approximation pour la solution et les coefficients par la méthode de Galerkin « ordinaire ». Aux § 11 et 12, nous étudions des méthodes spéciales d'approximation : approximation de la solution à partir de celle des coefficients, puis la méthode des fonctions singulières duales (DSFM).

L'ensemble des trois parties de ce travail est signé conjointement par M. Bourlard, M. Dauge, J. Lubuma et S. Nicaise ; M. D. et S. N. ont plus particulièrement contribué aux deux premières parties alors que M. B. et J. L. sont les contributeurs principaux de la troisième partie.

## 1.B. Hypothèses et notations pour la partie I

### (1.2) Hypothèses sur le domaine

On suppose dans toute cette première partie que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbf{R}^n$  à bord partout régulier sauf en 0 où il coïncide sur un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 avec un cône infini  $\Gamma$  ; on notera  $G = \Gamma \cap S^{n-1}$ .  $\eta$  désignera une fonction  $C^\infty$  à support dans  $\mathcal{V}$ , qui vaut 1 sur un voisinage de 0.

### (1.3) Hypothèses sur l'opérateur

On se donne aussi un opérateur  $L(x; D_x)$  différentiel d'ordre  $2m$ , elliptique et à coefficients  $C^\infty$  sur  $\bar{\Omega}$ . Si  $n = 2$ , on suppose comme à l'accoutumée que  $L$  est proprement elliptique (*cf.* [L-M]). Soit  $L_0$  la partie principale (notée pp. ) de  $L$  gelée en 0 et soit  $\mathcal{L}$  son écriture en coordonnées polaires  $r = |x|$  et  $\theta = \frac{x}{|x|}$  :

$$\mathcal{L}(\theta; r\partial_r, D_\theta) = r^{2m} L_0(D_x).$$

### (1.4) Opérateur à paramètre

On note  $\mathcal{L}(\lambda)$  l'opérateur  $\mathcal{L}(\theta; \lambda, D_\theta)$  agissant de  $\dot{H}^m(G)$  dans  $H^{-m}(G)$ , où  $\dot{H}^m(G)$  est l'adhérence dans  $H^m(G)$  de l'espace  $\mathcal{D}(G)$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact et où  $H^{-m}(G)$  désigne le dual de  $\dot{H}^m(G)$  pour l'extension de la dualité  $L^2$ .

$\mathcal{L}(\lambda)^{-1}$  est méromorphe sur  $\mathbf{C}$  et ses pôles déterminent l'apparition des fonctions singulières.

## § 2. RÉSULTATS ABSTRAITS

### 2.A. Espaces fonctionnels

Nous utiliserons des espaces de Sobolev ordinaires et à poids de type  $L_p$  et d'exposant entier positif ou de type  $L_2$  et d'exposant réel.

Pour  $1 < p < +\infty$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$  et  $k \in \mathbf{N}$ , nous rappelons :

$$V_{p,\beta}^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), r^{\beta+|\alpha|} D^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq k\}.$$

Pour  $p = 2$ ,  $\beta \in \mathbf{R}$  et  $s$  positif non entier (cf. [D], annexe AA) :

$$V_{p,\beta}^s(\Omega) = \{u \in V_{p,\beta-\{s\}}^{[s]}(\Omega) / \forall \alpha, |\alpha| \leq [s] \\ (|x|^\beta D^\alpha u(x) - |y|^\beta D^\alpha u(y)) |x-y|^{-\{s\}-n/2} \in L^2(\Omega \times \Omega)\}$$

où  $[s]$  est la partie entière de  $s$  et  $\{s\} = s - [s]$ .

Dans toutes les situations, on a :

$$u \in V_{p,\beta}^s(\Omega) \Leftrightarrow r^\beta u \in V_{p,0}^s(\Omega).$$

Il est intéressant de connaître l'effet du changement de variables d'Euler :

$$(2.1) \quad x \rightarrow (t, \theta) = \left( \text{Log } |x|, \frac{x}{|x|} \right)$$

sur ces espaces.  $\Omega$  est transformé en un ouvert  $B$  qui pour  $t \leq t_0$ , coïncide avec  $]-\infty, t_0] \times G$ . Soit :

$$(2.2) \quad W_{p,\alpha}^s(B) = \{v \in \mathcal{D}'(B) / e^{\alpha t} v \in W_p^s(B)\}.$$

On démontre que (voir [D], annexe AA pour  $p = 2$ ).

(2.3) LEMME : *Le changement de variables (2.1) induit un isomorphisme de  $V_{p,\beta}^s(\Omega)$  sur  $W_{p,\alpha}^s(B)$  avec  $\alpha = \beta + \frac{n}{p} - s$ .*

On note aussi  $V_{2,\beta}^s$  par  $H_\beta^s$ .  $\overset{\circ}{H}_\beta^s(\Omega)$  désigne l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H_\beta^s(\Omega)$ , et  $H_{-\beta}^{-s}(\Omega)$  désigne son dual. Pour  $s < 0$ ,  $W_{2,\beta}^s(B)$  se définit comme en (2.2) et le lemme (2.3) est encore valable. Il est utile de comparer entre eux ces différents espaces dans le but de se ramener aux espaces hilbertiens ( $p = 2$ ) pour le calcul des coefficients.

(2.4) PROPOSITION : *Soient  $s \geq 0$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbf{R}$ . Soit  $p > 1$ .*

1) *Si  $p = 2$  on suppose :*

$$-\gamma \leq s - \beta ;$$

2) *Si  $p > 2$  on suppose  $s$  entier,  $s \geq m$  et :*

$$(2.5) \quad -\gamma - \frac{n}{2} < s - \frac{n}{p} - \beta ;$$

3) *Si  $p < 2$  on suppose  $s$  entier,  $s \geq m$  et  $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{2}$ , en plus de (2.5).*

*Alors on a l'injection (2.6) :*

$$(2.6) \quad V_{p,\beta}^{s-m}(\Omega) \subset H_\gamma^{-m}(\Omega).$$

*Preuve :*

- 1) Le cas  $p = 2$  est une conséquence évidente de (2.3).
- 2) Dans le cas où  $p > 2$ , par application de (2.3), on se ramène à montrer que

$$W_{p,\alpha}^{s-m}(B) \subset W_{2,\alpha'}^{-m}(B).$$

avec

$$\alpha = \beta + \frac{n}{p} - s + m \quad \text{et} \quad \alpha' = \gamma + \frac{n}{2} + m.$$

Soit  $k = \alpha' - \alpha$ . Comme  $s \geq m$ , il suffit de montrer que :

$$W_{p,-k}^0(B) \subset H^{-m}(B).$$

Par dualité, cela revient à :

$$\hat{H}^m(B) \subset W_{q,k}^0(B)$$

où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ; ainsi  $q < 2$ .

Comme  $k$  est strictement positif, on vérifie immédiatement grâce à l'inégalité de Hölder que si  $v \in L_2(B)$ , alors

$$e^{kt} v \in L_q(B).$$

- 3) Dans le cas où  $p < 2$ , grâce à (2.3), on se ramène à montrer que

$$(2.7) \quad W_{p,-k}^{s-m}(B) \subset H^{-m}(B).$$

Si  $s - m - \frac{n}{p} < 0$ , soit  $p' > p$  tel que :

$$s - m - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p'};$$

sinon on prend  $p'$  arbitrairement grand. Grâce au théorème d'injection de Sobolev, on a :

$$W_{p,-k}^{s-m}(B) \subset L_{p',-k}(B).$$

Il ne reste plus qu'à montrer :

$$(2.8) \quad H^m(B) \subset L_{q',k}(B)$$

où  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$ , pour établir (2.7).

Si  $m - \frac{n}{2} \geq 0$ , c'est une conséquence de l'injection de Sobolev. Sinon, on a :

$$H^m(B) \subset L_q(B)$$

avec

$$m - \frac{n}{2} = -\frac{n}{q}.$$

Comme  $k > 0$ , pour obtenir (2.8), il suffit de montrer que :

$$q' \leq q.$$

Si  $s - m - \frac{n}{p} \geq 0$ ,  $p'$  est arbitrairement grand, donc  $q'$  arbitrairement proche de 1 et  $q' \leq q$ . Sinon, les relations déterminant  $p'$ ,  $q'$  et  $q$  avec la condition  $s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{2}$  impliquent que  $q' \leq q$ . ■

## 2.B. Régularité et singularités dans les espaces à poids

Soient  $s \geq 0$  et  $p \in ]1, +\infty[$  vérifiant l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes :

$$(H_1) \quad p = 2 \quad \text{et} \quad s \geq 0 \quad \text{réel}, \quad s \notin \left\{ \frac{1}{2}, \dots, m - \frac{1}{2} \right\}$$

$$(H'_1) \quad p \in ]1, +\infty[, \quad s \text{ entier} \geq m, \quad s + m - \frac{n}{p} \notin \mathbf{N}, \quad s \geq \frac{n}{p} - \frac{n}{2}.$$

$L$  opère de  $\dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  dans  $H_\gamma^{-m}(\Omega)$  et de  $V_{p,\beta}^{s+m}(\Omega)$  dans  $V_{p,\beta}^{s-m}(\Omega)$ . On a le résultat de régularité suivant.

$$(2.9) \text{ THÉORÈME : Soient } \beta \text{ et } \gamma \text{ tels que } m - \frac{n}{2} - \gamma \leq m + s - \frac{n}{p} - \beta.$$

Donc d'après (2.4),  $V_{p,\beta}^{s-m}(\Omega) \subset H_\gamma^{-m}(\Omega)$ . On suppose que :

$$\forall \lambda, \quad \text{Re } \lambda \in \left[ m - \frac{n}{2} - \gamma, m + s - \frac{n}{p} - \beta \right],$$

$\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible.

Soit  $u \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  tel que  $Lu \in V_{p,\beta}^{s-m}(\Omega)$ . Alors :

$$u \in V_{p,\beta}^{s+m}(\Omega).$$

(2.10) Remarque : Si  $p \geq 2$  et si  $m - \frac{n}{2} - \gamma = m + s - \frac{n}{p} - \beta$ , l'hypothèse relative à l'inversibilité de  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inutile : la démonstration se fait grâce à



un recouvrement de  $\Omega$  par des couronnes dyadiques et des estimations a priori uniformes sur ces couronnes (cf. [M-P4]). Le théorème (2.9) est analogue au corollaire 4.1 de [M-P1] (situation où  $p \neq 2$ ) et au corollaire (5.12) de [D] (cas où  $p = 2$  et  $s$  quelconque). ■

De façon analogue à [K] et [D], on montre le résultat suivant de décomposition des solutions en parties régulière et singulière.

(2.11) THÉORÈME : Soit  $\gamma < 0$ . Donc  $\dot{H}_\gamma^m(\Omega) \subset \dot{H}^m(\Omega)$ . Supposons que

$$\forall \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda = m - \frac{n}{2} - \gamma,$$

$\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible.

Soit  $u \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  tel que  $Lu \in H_\gamma^{-m}(\Omega)$ . Alors :

$$(2.12) \quad u = v + \sum_{i \in I} \delta_i w_i, \quad I \text{ fini},$$

où  $v \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  : c'est la partie régulière, et où les fonctions  $w_i$  ne dépendent que de  $L$  et  $\Omega$  et vérifient :

$$\text{si} \quad \left\{ \begin{array}{l} w_i \in \dot{H}^m(\Omega) \\ Lw_i \in H_\gamma^{-m}(\Omega) \\ \sum \delta_i w_i \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega), \quad \text{alors} \quad \delta_i = 0, \quad \forall i, \end{array} \right.$$

i.e. les  $w_i$  forment une base de fonctions singulières.

Dans le § 4, nous détaillerons la structure des  $w_i$ . Disons pour le moment que les  $w_i$  apparaissent si  $\mathcal{L}(\lambda)^{-1}$  admet des pôles dans la bande

$$\operatorname{Re} \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, m - \frac{n}{2} - \gamma \right[.$$

## 2.C. Expression générale des coefficients

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème (2.11).

Soit  $\mathcal{A}_\gamma$  l'espace des  $u$  dans  $\dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  tels que  $Lu \in H_\gamma^{-m}(\Omega)$  et soit  $\mathcal{W}_\gamma$  l'espace dont une base est constituée par les  $w_i$ . La conclusion du théorème (2.11) peut s'exprimer par :

$$\mathcal{A}_\gamma = \mathcal{W}_\gamma \oplus \dot{H}_\gamma^m(\Omega).$$

Considérons le noyau  $\text{Ker } L$  de  $L$  agissant de  $\dot{H}^m(\Omega)$  dans  $H^{-m}(\Omega)$ . Comme  $\text{Ker } L \subset \mathcal{A}_\gamma$ , soit  $\mathcal{L}_\gamma$  la projection de  $\text{Ker } L$  sur  $\mathcal{W}_\gamma$  et soit  $\mathcal{S}_\gamma$  un supplémentaire de  $\mathcal{L}_\gamma$  dans  $\mathcal{W}_\gamma$ . Soit  $(Z_i)$  une base de  $\mathcal{L}_\gamma$  et  $(S_i)$  une base de  $\mathcal{S}_\gamma$ . La décomposition (2.12) s'écrit alors :

$$(2.13) \quad u = v + \sum_i \gamma_i S_i + \sum_i \varepsilon_i Z_i .$$

Les  $\varepsilon_i$  ne dépendent que de  $u$ , et non de  $Lu$ .  
Par contre les  $\gamma_i$  s'expriment en fonction de  $Lu$  :

(2.14) LEMME : *Sous les hypothèses de (2.11), il existe des éléments  $(K_i)$  linéairement indépendants dans  $\dot{H}^m_\gamma(\Omega)$  et tels que  $L^* K_i = 0$ , tels que pour tout  $u$  dans  $\mathcal{A}_\gamma$  :*

$$\gamma_i = \int_\Omega Lu \cdot \bar{K}_i \, dx .$$

*Preuve :* Soit

$$E_\gamma = H_\gamma^{-m} \cap L(\dot{H}^m) \quad \text{et} \\ R_\gamma = L(\dot{H}^m_\gamma) .$$

Par (2.13), on a :

$$E_\gamma = L\mathcal{S}_\gamma \oplus R_\gamma$$

Posons  $f = Lu$ .  $f$  se décompose selon  $L\mathcal{S}_\gamma \oplus R_\gamma$  en :

$$\sum \gamma_i LS_i + f_0$$

car  $(LS_i)$  est une base de  $L\mathcal{S}_\gamma$ .

Ainsi les  $\gamma_i$  sont des formes linéaires continues sur  $E_\gamma$ , donc sur  $H_\gamma^{-m}$ . Par conséquent, il existe des  $K_i$  dans le dual de  $H_\gamma^{-m}$ , qui est  $\dot{H}^m_\gamma$ , tels que :

$$\gamma_i = \int_\Omega f \bar{K}_i$$

(extension de la dualité  $L_2$ ).

Enfin, si  $u \in \dot{H}^m_\gamma$ , la décomposition (2.13) s'écrit simplement  $u = v$ , donc, comme  $\gamma_i = 0$  :

$$\int_\Omega Lu \cdot \bar{K}_i = 0 .$$

La formule de Green s'étendant naturellement à  $u \in \mathring{H}_\gamma^m$  et  $K_i \in \mathring{H}_{-\gamma}^m$ , on a :

$$\int_{\Omega} u \cdot \overline{L^* K_i} = 0, \quad \forall u \in \mathring{H}_\gamma^m.$$

$\mathring{H}_\gamma^m$  est le dual de  $H_{-\gamma}^{-m}$  dans lequel est  $L^* K_i$ . Donc  $L^* K_i = 0$ . ■

(2.15) THÉORÈME : *Supposons  $(H_1)$  ou  $(H'_1)$  vérifiée. Soit  $\beta$  réel tel que*

$$-\frac{n}{2} \leq s - \frac{n}{p} - \beta.$$

*On suppose que :*

$$\forall \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda = s + m - \frac{n}{p} - \beta, \quad \mathcal{L}(\lambda) \text{ est inversible.}$$

*Soit  $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$  tel que  $Lu \in V_{p,\beta}^{s,-m}(\Omega)$ . Alors  $u$  se décompose en :*

$$u = v + \sum_i \gamma_i S_i + \sum_i \varepsilon_i Z_i$$

*où*

$$v \in V_{p,\beta}^{s,+m}(\Omega),$$

*les  $\varepsilon_i$  ne dépendent pas de  $Lu$  et*

$$\gamma_i = \int_{\Omega} Lu \cdot \bar{K}_i$$

*avec les  $K_i$  définis en (2.14) pour  $\gamma$  tel que  $m - \frac{n}{2} - \gamma = s + m - \frac{n}{p} - \beta$ . Les  $S_i$  et  $Z_i$  sont ceux qui interviennent en (2.13).*

*Preuve :* Soit  $\delta > \gamma$  tel que :

$$\forall \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda \in \left[ m - \frac{n}{2} - \delta, m - \frac{n}{2} - \gamma \right], \quad \mathcal{L}(\lambda) \text{ est inversible.}$$

En conséquence de la proposition (2.4), on a :

$$V_{p,\beta}^{s,-m}(\Omega) \subset H_{\delta}^{-m}(\Omega).$$

Donc, on a (2.11)-(2.14) pour le poids  $\delta$ . De plus, comme  $v \in \mathring{H}_{\delta}^m(\Omega)$  est tel que  $Lv \in V_{p,\beta}^{s,-m}(\Omega)$ , par application de (2.9),  $v \in V_{p,\beta}^{s,+m}(\Omega)$ . ■

## 2.D. Décomposition et coefficients dans les espaces ordinaires

Supposons d'abord pour simplifier que  $s + m - \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ .

Si  $s + m - \frac{n}{p} < 0$ ,  $W_p^{s+m}(\Omega) = V_{p,0}^{s+m}(\Omega)$  et il n'y a rien de plus à faire.

Sinon, soit  $A$  la partie entière de  $s + m - \frac{n}{p}$ . Pour  $f \in W_p^{s-m}(\Omega)$ , notons :

$$(2.16) \quad \Pi_A f = \sum_{|\alpha| \leq A-2m} \partial^\alpha f(0) \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

le développement de Taylor de  $f$  en 0.

On rappelle que  $\eta$  désigne une fonction de troncature  $C_0^\infty$  qui vaut 1 au voisinage de 0. Notons  $\mathcal{Q}^K$  l'espace des polynômes de degré  $\leq K$ .

L'application qui à  $f$  dans  $W_p^{s-m}(\Omega)$  associe le couple  $(\Pi_A f, f - \eta \Pi_A f)$  induit un isomorphisme sur  $\mathcal{Q}^{A-2m} \oplus V_{p,0}^{s-m}(\Omega)$  : c'est une conséquence classique de l'inégalité de Hardy.

Notons  $\tilde{L}$  la « partie polynomiale » de  $L$  modulo  $V_{p,0}^{s-m}(\Omega)$  : c'est-à-dire que pour :

$$h \in H_{\text{loc}}^m(\Gamma) \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{Q}^{A-2m},$$

$$\tilde{L}h = f \Leftrightarrow L(\eta h) - \eta f \in V_{p,0}^{s-m}(\Omega).$$

Lorsque  $L$  est homogène à coefficients constants,  $\tilde{L} = L$  ; sinon,  $\tilde{L}$  correspond à une résolution approchée (voir (7.15) pour  $\Delta - \xi$ ).

Soit  $\mathcal{P}^A$  l'espace des polynômes de degré  $\leq A$  vérifiant les conditions de Dirichlet sur  $\partial\Gamma$ .

De façon analogue à (2.11), on a :

(2.17) LEMME ET NOTATION : *Il existe un espace de dimension finie  $\mathcal{E}^A$ , contenu dans  $\dot{H}^m(\Omega)$ , d'intersection nulle avec  $W_p^{s+m}(\Omega)$  tel que :*

$\tilde{L}$  soit injectif sur  $\mathcal{E}^A$

$\tilde{L}$  opère de  $\mathcal{E}^A \oplus \mathcal{P}^A$  dans  $\mathcal{Q}^{A-2m}$  et soit surjectif.

Notons  $M_A$  un inverse à droite de  $\tilde{L}$ .

Soit  $(E_i)$  une base de  $\mathcal{E}^A$  et  $(P_i)$  une base de  $\mathcal{P}^A$ . Voici un énoncé général :

(2.18) THÉORÈME : Supposons que  $(H_1)$  ou  $(H'_1)$  soit vérifiée et que de plus,  $s + m - \frac{n}{p} \notin \mathbf{N}$ . Supposons que :

$$(2.19) \quad \forall \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda = s + m - \frac{n}{p}, \quad \mathcal{L}(\lambda) \text{ est inversible .}$$

Soit  $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$  tel que  $f = Lu \in W_p^{s-m}(\Omega)$ . Alors  $u$  admet le développement asymptotique suivant :

$$u = v + \sum_i \gamma_i S_i + \sum_i \varepsilon_i Z_i + \sum a_i E_i + \sum b_i P_i$$

où

- $v \in V_{p,0}^{s+m}(\Omega)$ ,
- les  $\varepsilon_i$  ne dépendent pas de  $f$ ,
- les  $a_i$  et  $b_i$  sont des combinaisons linéaires des dérivées de  $f$  en 0,
- les  $\gamma_i$  sont égaux à  $\int_{\Omega} g \bar{K}_i dx$  avec  $g = f - L(\eta M_A \Pi_A f)$ .

La preuve découle immédiatement de (2.15) et (2.17). En effet,  $M_A \Pi_A f$  se décompose en  $\sum a_i E_i + \sum b_i P_i$  et, si on pose

$$w = u - \eta M_A \Pi_A f ,$$

$w$  est dans  $\mathring{H}^m(\Omega)$  et  $Lw = g$  est dans  $V_{p,0}^{s-m}(\Omega)$ . On applique alors (2.15) à  $w$  pour  $\beta = 0$ . ■

(2.20) Remarques :

1) On peut regrouper convenablement les termes du développement asymptotique de  $u$  de façon à rassembler tous les termes polynomiaux avec  $v$  : on obtient ainsi une nouvelle partie régulière  $\tilde{v}$  qui est dans  $W_p^{s+m}(\Omega)$ .

2) Si  $p = 2$  et  $s + m - \frac{n}{2} \in \mathbf{N}$ , il convient de remplacer l'hypothèse (2.19) par la condition d'injectivité modulo les polynômes introduite dans [D] ; le développement de  $u$  ne peut plus s'écrire sous la forme annoncée dans le théorème (2.18), mais sous la forme évoquée dans la première partie de cette remarque :

$$u = \tilde{v} + \sum \gamma_i S_i + \sum \varepsilon_i Z_i + \sum a_i E_i ,$$

où  $\tilde{v} \in H^{s+m}(\Omega)$ .

En dimension 2 et si  $L$  est homogène et à coefficients constants, il résulte de (4.9), (4.15) et (4.16/2) dans [D] que l'hypothèse d'injectivité modulo les polynômes est équivalente à l'hypothèse (2.19) à condition que l'ouverture du secteur  $\Gamma$  soit différente de  $2\pi$  (fissure plane).

## § 3. CHAÎNES DE JORDAN, DIRECTES ET DUALES

Dans ce paragraphe, nous allons essentiellement rappeler des résultats de [M-P2,3], relatifs à la structure des singularités associées à l'opérateur homogène à coefficients constants sur le cône  $\Gamma$  :

$$L_0(D_x) = ppL(0 ; D_x) .$$

Cela permettra d'expliciter les fonctions  $S_i$  et les éléments duaux  $K_i$  correspondants dans le cas où les  $Z_i$  sont absents (noyau régulier), cf. § 4.

Les singularités de  $L_0$  proviennent du noyau  $\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda)$  des opérateurs  $\mathcal{L}(\lambda)$  pour les  $\lambda$  tels que  $\mathcal{L}(\lambda)$  ne soit pas inversible, et de fonctions « générées » par ce noyau : les chaînes de Jordan.

Soit donc  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\mathcal{L}(\lambda)$  ne soit pas inversible. Comme  $\mathcal{L}(\lambda)$  est d'indice nul,  $\mathcal{L}(\lambda)$  n'est pas injectif. Soit  $\varphi_1^{\lambda,1}, \dots, \varphi_1^{\lambda,M^\lambda}$  une base de  $\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda)$ .

Notons  $\mathcal{L}^{(j)}(\lambda)$  la  $j$ -ième dérivée par rapport à  $\lambda$  de  $\mathcal{L}(\lambda)$  et  $\text{Im } \mathcal{L}(\lambda)$  l'image de  $\mathcal{L}(\lambda)$ .

Si tout élément  $\varphi$  non nul de  $\text{Ker } \mathcal{L}(\lambda)$  vérifie

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda) \varphi \notin \text{Im } \mathcal{L}(\lambda)$$

la construction est terminée pour  $\lambda$ .

Sinon, quitte à regrouper et à renuméroter les  $\varphi_1^{\lambda,\mu}$ , on suppose que :

- $\mathcal{L}^{(1)}(\lambda) \varphi_1^{\lambda,\mu} \in \text{Im } \mathcal{L}(\lambda) \quad \mu = 1, \dots, \mu_0$
- $\forall \varphi$  combinaison linéaire non nulle des  $\varphi_1^{\lambda,\mu}$  pour  $\mu > \mu_0$ , on a :

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda) \varphi \notin \text{Im } \mathcal{L}(\lambda) .$$

Alors, pour  $\mu = 1, \dots, \mu_0$  soit  $\varphi_2^{\lambda,\mu} \in \mathring{H}^m(G)$  tel que :

$$\mathcal{L}^{(1)}(\lambda) \varphi_1^{\lambda,\mu} + \mathcal{L}(\lambda) \varphi_2^{\lambda,\mu} = 0 .$$

De façon analogue, on construit de façon « maximale » les chaînes de Jordan :

$$\varphi_1^{\lambda,\mu}, \dots, \varphi_\kappa^{\lambda,\mu} \quad \text{où} \quad \mu = 1, \dots, M^\lambda \quad \text{et} \quad \kappa = \kappa^{\lambda,\mu}$$

possédant les propriétés suivantes :

$$(3.1) \quad \varphi_k^{\lambda,\mu} \in \mathring{H}^m(G)$$

(les  $\varphi_k^{\lambda, \mu}$  sont même  $C^\infty(\bar{G})$  car  $G$  est à bord régulier).

$$(3.2) \quad \sum_{q=1}^k \frac{\mathcal{L}^{(k-q)}(\lambda)}{(k-q)!} \varphi_q^{\lambda, \mu} = 0, \quad k = 1, \dots, \kappa^{\lambda, \mu}$$

et, pour  $k = \kappa^{\lambda, \mu}$ ,

$$(3.3) \quad \sum_{q=1}^k \frac{\mathcal{L}^{(k-q+1)}(\lambda)}{(k-q+1)!} \varphi_q^{\lambda, \mu} \notin \text{Im } \mathcal{L}(\lambda).$$

Posons :

$$(3.4) \quad \sigma_k^{\lambda, \mu} = r^\lambda \sum_{q=1}^k \frac{\text{Log}^{k-q} r}{(k-q)!} \varphi_q^{\lambda, \mu}(\theta).$$

Comme :

$$(3.5) \quad L_0(r^\lambda \text{Log}^q r \varphi(\theta)) = r^{\lambda-2m} \sum_{j=0}^q \frac{q!}{j!(q-j)!} \text{Log}^{q-j} r \mathcal{L}^{(j)}(\lambda) \varphi$$

on déduit de (3.2) et (3.5) que

$$L_0 \sigma_k^{\lambda, \mu} = 0.$$

Ainsi, les  $\sigma_k^{\lambda, \mu}$  sont des fonctions singulières de  $L_0$ . On peut montrer qu'elles engendrent toutes les fonctions singulières de  $L_0$ .

Soit  $\mathcal{L}(\lambda)^*$  l'adjoint de  $\mathcal{L}(\lambda)$ , opérant de  $\hat{H}^m(G)$  dans  $H^{-m}(G)$ . D'après [M-P3] lemme 2.1, il existe un système de chaînes de Jordan  $(\psi_k^{\lambda, \mu})$  associé à  $\mathcal{L}(\lambda)^*$ , et dual du système  $(\varphi_k^{\lambda, \mu})$ , i.e. vérifiant :

$$(3.6) \quad \sum_{q=1}^k \sum_{q'=1}^{k'} \int_G \frac{\mathcal{L}^{(q+q'-1)}(\lambda)}{(q+q'-1)!} \cdot \varphi_{k'+1-q}^{\lambda, \mu} \bar{\psi}_{k'+1-q'}^{\lambda, \mu'} = \delta_{\mu, \mu'} \cdot \delta_{\kappa-k, k'-1}.$$

De manière analogue à (3.4), on pose :

$$(3.7) \quad \tau_k^{\lambda, \mu} = -r^{-\bar{\lambda}+2m-n} \sum_{q=1}^{\kappa(\lambda, \mu)-k+1} \frac{\text{Log}^{\kappa-k+1-q} r}{(\kappa-k+1-q)!} \psi_q^{\lambda, \mu}(\theta).$$

La raison du choix de la puissance  $-\bar{\lambda}+2m-n$  est le lemme suivant qui est en particulier démontré dans [M-P4] :

(3.8) LEMME :

$$\mathcal{L}^*(\lambda) = \mathcal{L}(-\bar{\lambda}+2m-n)^*$$

où on rappelle que  $\mathcal{L}(\lambda)^*$  est l'adjoint de  $\mathcal{L}(\lambda)$  et  $\mathcal{L}^*(\lambda)$  est l'opérateur  $\mathcal{L}^*(\theta; \lambda, D_\theta)$ , où  $\mathcal{L}^*(\theta; r\partial_r, D_\theta) = r^{2m} L_0^*$ , avec  $L_0^*$  l'adjoint formel de  $L_0$ .

Ainsi, les  $\tau_k^{\lambda, \mu}$  vérifient  $L_0^* \tau_k^{\lambda, \mu} = 0$  et sont les fonctions singulières de  $L_0^*$ . D'autre part la formulation précise de  $\tau_k^{\lambda, \mu}$  (en particulier son signe et son degré) est calculée pour que :

(3.9) PROPOSITION :

$$\int_{\Omega} L_0(\eta\sigma_k^{\lambda, \mu}) \bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'} = \delta_{\lambda, \lambda'} \cdot \delta_{\mu, \mu'} \cdot \delta_{k, k'}.$$

Cette propriété résulte du théorème 3.1 de [M-P3]. Elle peut être interprétée comme le calcul des coefficients correspondant à  $u = \eta\sigma_k^{\lambda, \mu}$  et  $L = L_0$ .

#### § 4. COEFFICIENTS DES SINGULARITÉS

##### 4.A. Problème modèle dans les espaces à poids

On se donne  $s, p, \beta$  en se plaçant sous les hypothèses du théorème (2.15). On définit  $\gamma$  comme en (2.15). On commence donc par le cas plus simple où  $L = L_0$ , i.e.  $L$  homogène à coefficients constants. On pose :

$$(4.1) \quad S_k^{\lambda, \mu} = \eta\sigma_k^{\lambda, \mu} \quad \text{et} \quad T_k^{\lambda, \mu} = \eta\tau_k^{\lambda, \mu}$$

pour  $\text{Re } \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, s + m - \frac{n}{p} - \beta \right[$ . Il résulte de [M-P3] que les  $S_i$  peuvent être pris égaux aux  $S_k^{\lambda, \mu}$ . D'autre part, par construction :

$$(4.2) \quad L^* \tau_k^{\lambda, \mu} = 0.$$

Ainsi :

$$(4.3) \quad L^* T_k^{\lambda, \mu} \in H^{-m}(\Omega).$$

En fait, cette fonction est  $C^\infty(\bar{\Omega})$  car son support ne rencontre pas 0.

Ces deux ensembles de fonctions suffiront à donner une expression des coefficients dans une situation très générale : formule (4.9). Pour avoir une expression des singularités ne dépendant que du second membre, on fera l'hypothèse supplémentaire suivante de régularité du noyau de  $L$  :

$$(H_2) \quad \text{si } u \in \mathring{H}^m(\Omega) \text{ est tel que } Lu = 0, \text{ alors } u \in \mathring{H}_\gamma^m,$$



où  $\gamma$  est comme dans (2.15). Il résulte de cette hypothèse que les  $Z_i$  de (2.15) n'apparaissent pas. On va pouvoir définir précisément les  $S_i$  et les  $K_i$  en fonction des  $\sigma_k^{\lambda, \mu}$  et  $\tau_k^{\lambda, \mu}$ .

(4.4) LEMME : *Supposons  $(H_2)$  satisfaite. Soit  $\lambda$  tel que  $\operatorname{Re} \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, m - \frac{n}{2} - \gamma \right[$  et tel que  $\mathcal{L}(\lambda)$  ne soit pas inversible. Soit  $\mu \in \{1, \dots, M^\lambda\}$ ,  $k \in \{1, \dots, \kappa^{\lambda, \mu}\}$ . Alors il existe  $X_k^{\lambda, \mu} \in \mathring{H}^m(\Omega)$  tel que :*

$$(4.5) \quad L^* X_k^{\lambda, \mu} = L^* T_k^{\lambda, \mu}.$$

On pose :

$$(4.6) \quad K_k^{\lambda, \mu} = T_k^{\lambda, \mu} - X_k^{\lambda, \mu}.$$

*Preuve :* Notons  $L_{(\gamma)}$  l'opérateur  $L$  agissant de  $\mathring{H}_\gamma^m(\Omega)$  dans  $H_\gamma^{-m}(\Omega)$ . Son adjoint est  $L_{(-\gamma)}^*$ , c'est-à-dire  $L^*$  agissant de  $\mathring{H}_{-\gamma}^m(\Omega)$  dans  $H_{-\gamma}^{-m}(\Omega)$

$$T_k^{\lambda, \mu} \in \mathring{H}_{-\gamma}^m(\Omega), \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \lambda < m - \frac{n}{2} - \gamma.$$

Donc :

$$L^* T_k^{\lambda, \mu} \in \operatorname{Im} L_{(-\gamma)}^* = (\operatorname{Ker} L_{(\gamma)})^\perp.$$

Or, il résulte de l'hypothèse  $(H_2)$  que

$$\operatorname{Ker} L_{(\gamma)} = \operatorname{Ker} L_{(0)}.$$

Donc

$$L^* T_k^{\lambda, \mu} \in (\operatorname{Ker} L_{(0)})^\perp.$$

Avec (4.3), cela implique que :

$$L^* T_k^{\lambda, \mu} \in \operatorname{Im} L_{(0)}^*.$$

D'où l'existence de  $X_k^{\lambda, \mu}$  satisfaisant au lemme (4.4). ■

(4.7) THÉORÈME : *On suppose  $L$  homogène à coefficients constants. On fait les hypothèses  $(H_1)$  ou  $(H_1')$ . On prend  $s, p, \beta$  comme dans le théorème (2.15), ainsi que  $u$ . Alors*

$$(4.8) \quad u = v + \sum_{\lambda, k, \mu} \gamma_k^{\lambda, \mu} S_k^{\lambda, \mu}$$

où :

- $v \in V_{p, \beta}^{s+m}(\Omega),$

- la somme est étendue aux  $\lambda$  tels que  $\mathcal{L}(\lambda)$  est non inversible et

$$\operatorname{Re} \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, s + m - \frac{n}{p} - \beta \right[ , \quad \mu = 1, \dots, M^\lambda, \quad k = 1, \dots, \kappa^{\lambda, \mu},$$

- on a l'expression des coefficients :

$$(4.9) \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} Lu \cdot \bar{T}_k^{\lambda, \mu} - \int_{\Omega} u \cdot \bar{L}^* \bar{T}_k^{\lambda, \mu}.$$

De plus, dans ce cas, on a aussi une formulation locale pour les coefficients,

$$(4.9') \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} L(\eta u) \cdot \bar{\tau}_k^{\lambda, \mu}.$$

Enfin, si on fait en plus l'hypothèse  $(H_2)$  relative à la régularité du noyau on a une expression qui ne dépend que du second membre :

$$(4.9'') \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} Lu \cdot \bar{K}_k^{\lambda, \mu}.$$

La formule (4.9) sera particulièrement avantageuse pour l'approximation numérique car la fonction  $T$  est « explicite » et  $u$  n'est pas dérivé. Cette formule est nouvelle par rapport à [M-P2], alors que (4.9') est à rapprocher du théorème (7.3) *loc. cit.* et (4.9'') du théorème (9.1).

On fera la démonstration du théorème (4.7) dans la situation générale (théorème (4.19) ci-dessous).

Pour le cas particulier du laplacien sur un polygone, chacune de ces formules a déjà été donnée séparément par [L-S] pour la première, par [G] pour la deuxième et par [M] en ce qui concerne la troisième.

#### 4.B. Problème général dans les espaces à poids

Supposons maintenant  $L$  à coefficients variables selon l'hypothèse (1.3).  $s$ ,  $p$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont choisis comme dans (2.15). Comme dans [D], on fait un développement asymptotique de  $L$ . On a :

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

On pose :

$$(4.10) \quad L = \sum_{j=0}^J L_j + R_J,$$

où  $J > -\gamma$ ,  $R_J$  est le reste et où :

$$L_j(x ; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} \sum_{|\beta| = j + |\alpha| - 2m} \partial^\beta a_\alpha(0) \frac{x^\beta}{\beta!} D^\alpha.$$

Grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, on voit que  $R_J$  opère de  $H_\delta^m(\Omega)$  dans  $H_{\delta+\gamma}^{-m}(\Omega)$ , pour tout  $\delta \in \mathbf{R}$ .

Pour  $\lambda, \mu, k$  fixés, on pose  $\sigma_{k,0}^{\lambda,\mu} = \sigma_k^{\lambda,\mu}$ . Pour  $q$  entier  $\geq 1$ , on cherche  $\sigma_{k,q}^{\lambda,\mu}$  tels que pour tout  $j$  :

$$\sum_{q=0}^j L_{j-q} \sigma_{k,q}^{\lambda,\mu} = 0.$$

Ainsi formellement,  $\sum_{j \in \mathbf{N}} L_j \sum_{q \in \mathbf{N}} \sigma_{k,q}^{\lambda,\mu} = 0$ . Pour construire les  $\sigma_{k,q}^{\lambda,\mu}$ , on rappelle les notations et résultats de [D], § 3-5 :

$$\mathcal{F}^\lambda = \left\{ r^\lambda \sum_{0 \leq q \leq Q} f_q(\theta) \text{Log}^q r / f_q \in H^{-m}(G), Q \in \mathbf{N} \right\}$$

$$\mathcal{S}^\lambda = \left\{ r^\lambda \sum_{0 \leq q \leq Q} u_q(\theta) \text{Log}^q r / u_q \in \dot{H}^m(G), Q \in \mathbf{N} \right\}.$$

(Ces espaces sont notés  $T^\lambda$  et  $S^\lambda$  dans [D], ce qui pourrait entraîner des confusions ici.)

(4.11) LEMME : Soit  $\sigma \in \mathcal{S}^\lambda$ ,  $\sigma \neq 0$ . Alors  $\eta\sigma \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega)$  si et seulement si  $\text{Re } \lambda > m - \frac{n}{2} - \gamma$ .

$L_0$  opère de  $\mathcal{S}^\lambda$  dans  $\mathcal{F}^{\lambda-2m}$  et il existe un opérateur  $\mathcal{R}$  qui est un inverse à droite de  $L_0$  ((4.17) dans [D]). On définit alors par récurrence :

$$(4.12) \quad \sigma_{k,q}^{\lambda,\mu} = - \sum_{j=0}^{q-1} \mathcal{R}L_{q-j} \sigma_{k,j}^{\lambda,\mu} \in \mathcal{S}^{\lambda+q}.$$

Et de même :

$$(4.13) \quad \tau_{k,q}^{\lambda,\mu} = - \sum_{j=0}^{q-1} \mathcal{R}L_{q-j}^* \tau_{k,j}^{\lambda,\mu} \in \mathcal{S}^{-\bar{\lambda}+2m-n+q}.$$

Enfin, au lieu de (4.1), on pose, pour  $\text{Re } \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, m - \frac{n}{2} - \gamma \right[ :$

$$(4.14) \quad S_k^{\lambda,\mu} = \eta \sum_{0 \leq q \leq m-n/2-\gamma-\text{Re } \lambda} \sigma_{k,q}^{\lambda,\mu}$$

$$(4.15) \quad T_k^{\lambda,\mu} = \eta \sum_{0 \leq q \leq \text{Re } \lambda - m + n/2} \tau_{k,q}^{\lambda,\mu}.$$

(4.16) LEMME :

$$a) \quad LS_k^{\lambda, \mu} \in H_{\gamma}^{-m}(\Omega).$$

$$b) \quad L^* T_k^{\lambda, \mu} \in H^{-m}(\Omega).$$

*Preuve :*

$$a) \quad LS_k^{\lambda, \mu} = \eta \sum_{j=0}^J L_j \sum_q \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} + \left[ \sum_{j=0}^J L_j, \eta \right] \sum_q \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} + R_J S_k^{\lambda, \mu}.$$

Comme les  $\sigma_{k,q}^{\lambda, \mu}$  sont dans  $\mathcal{S}^{\lambda+q}$  avec  $\operatorname{Re} \lambda > m - \frac{n}{2}$ ,  $S_k^{\lambda, \mu}$  est dans  $\mathring{H}^m(\Omega)$ , et par conséquent :

$$R_J S_k^{\lambda, \mu} \in H_{\gamma}^{-m}(\Omega).$$

Le deuxième terme de la somme a son support loin de 0 et est régulier. Il résulte de (4.12) que  $\sum_{j+q=l} L_j \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} = 0$ . Donc :

$$(4.17) \quad \eta \sum_{j=0}^J L_j \sum_{q=0}^P \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} = \eta \sum_{\substack{0 \leq j \leq J, 0 \leq q \leq P \\ j+q > \min(J, P)}} L_j \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu}$$

où  $P = m - \frac{n}{2} - \operatorname{Re} \lambda - \gamma$ . Or comme  $L_j$  opère de  $\mathcal{S}^{\lambda}$  dans  $\mathcal{F}^{\lambda-2m+j}$ , on a :

$$L_j \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}^{\lambda-2m+j+q}.$$

Ainsi, pour  $j+q \geq \min(J, P)$ , et comme  $\operatorname{Re} \lambda > m - \frac{n}{2}$  :

$$\operatorname{Re} \lambda - 2m + j + q > -m - \frac{n}{2} - \gamma.$$

D'où l'appartenance de (4.17) à  $H_{\gamma}^{-m}(\Omega)$ .

b) La démonstration est analogue : comme  $\sum_{j+q=l} L_j^* \tau_{k,q}^{\lambda, \mu} = 0$ , il suffit de voir que  $\eta L_j^* \tau_{k,q}^{\lambda, \mu}$  est dans  $H^{-m}(\Omega)$  pour  $j+q > \min(J, P')$  avec  $P' = \operatorname{Re} \lambda - m + \frac{n}{2}$ . Or :

$$L_j^* \tau_{k,q}^{\lambda, \mu} \in \mathcal{F}^{2m-n-\lambda+j+q}.$$

On a :

$$2m - n - \operatorname{Re} \lambda + j + q > -m - \frac{n}{2}.$$

D'où la régularité désirée. ■

Lorsque l'hypothèse (H<sub>2</sub>) est vérifiée, on démontre alors exactement comme dans le cas homogène à coefficients constants (lemme (4.4)) que :

$$L^* T_k^{\lambda, \mu} \in \operatorname{Im} L_{(0)}^*.$$

Donc, il existe  $X_k^{\lambda, \mu} \in \dot{H}^m(\Omega)$  vérifiant (4.5) et on pose encore :

$$(4.18) \quad K_k^{\lambda, \mu} = T_k^{\lambda, \mu} - X_k^{\lambda, \mu}.$$

On fait maintenant l'hypothèse technique supplémentaire suivante, qui ne sert que si  $L \neq L_0$  :

$$(H_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda, \lambda' \text{ avec } \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \lambda' \in \left] m - \frac{n}{2}, m - \frac{n}{2} - \gamma \right[ \text{ et tels que} \\ \mathcal{L}(\lambda), \mathcal{L}(\lambda') \text{ ne soient pas inversibles, on a :} \\ \lambda - \lambda' \notin \mathbf{N}^*. \end{array} \right.$$

Voici la version générale du théorème (4.7).

(4.19) THÉORÈME : *On se met dans la situation du théorème (2.15) et on fait en plus l'hypothèse (H<sub>3</sub>). Alors u se décompose selon (4.8) avec  $S_k^{\lambda, \mu}$  défini en (4.14) et les coefficients ont l'expression (4.9) avec  $T_k^{\lambda, \mu}$  défini en (4.15). Si on fait de plus l'hypothèse (H<sub>2</sub>), les coefficients ont l'expression (4.9'') et avec  $K_k^{\lambda, \mu}$  défini en (4.18).*

(4.20) Remarque : Comme nous l'avons déjà signalé dans l'introduction, ce résultat est nouveau par rapport à [M-P2] où les auteurs se placent dans la situation plus restreinte où  $|\gamma| < 1$  : dans ce cas, les  $\sigma_k^{\lambda, \mu}$  et les  $\tau_k^{\lambda, \mu}$  ont la même expression que lorsque  $L$  est homogène à coefficients constants, c'est-à-dire que dès que  $q \geq 1$  les  $\sigma_k^{\lambda, \mu}$  et  $\tau_k^{\lambda, \mu}$  n'apparaissent pas.

*Preuve* : Quitte à augmenter un peu  $\gamma$ , on peut supposer que

$$Lu \in H_\gamma^{-m}(\Omega).$$

(cf. proposition (2.4)), le reste étant inchangé.

On a alors la décomposition (4.8) avec  $v \in \dot{H}_\gamma^m(\Omega)$ . Lorsque  $L$  est homogène à coefficients constants, c'est un résultat bien connu (cf. [K], [M-P1]) qui se démontre à l'aide de la transformation de Mellin  $\mathcal{M}$  :

$$\mathcal{M}[g](\lambda) = \int_0^{+\infty} r^{-\lambda} g \frac{dr}{r}.$$

Lorsque  $L$  satisfait aux hypothèses générales (1.3), cela résulte de [D], théorème (5.11) : c'est basé sur le lemme (4.16) et le fait que le nombre de singularités indépendantes se conserve quand on passe de  $L$  à sa partie principale en 0.

Ainsi  $v \in \mathring{H}_\gamma^m(\Omega)$ . Il résulte du théorème (2.9) que  $v \in V_{\rho, \beta}^{s, m}(\Omega)$ . Comme  $T_k^{\lambda, \mu} \in \mathring{H}_{-\gamma}^m(\Omega)$ , l'extension naturelle et continue de la formule de Green donne que :

$$(4.21) \quad \int_{\Omega} Lv \cdot \bar{T}_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} v \cdot \bar{L}^* \bar{T}_k^{\lambda, \mu}.$$

Il nous reste à montrer que :

$$(4.22) \quad \int_{\Omega} LS_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{T}_{k'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} S_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{L}^* \bar{T}_{k'}^{\lambda', \mu'} + \delta_{\lambda, \lambda'} \cdot \delta_{\mu, \mu'} \cdot \delta_{k, k'}$$

pour obtenir (4.9). (4.9'') sera une conséquence immédiate de (4.9) car comme  $u$  et  $X_k^{\lambda, \mu}$  sont dans  $\mathring{H}^m(\Omega)$ , on a :

$$\int_{\Omega} Lu \cdot \bar{X}_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} u \cdot \bar{L}^* \bar{X}_k^{\lambda, \mu}.$$

Montrons donc (4.22). On reprend le développement (4.10) de  $L$ . Comme le reste  $R_j$  opère de  $\mathring{H}^m(\Omega)$  dans  $H_{-\gamma}^{-m}(\Omega)$  et  $R_j^*$  opère de  $\mathring{H}_{-\gamma}^m(\Omega)$  dans  $H^{-m}(\Omega)$ , l'extension naturelle de la formule de Green donne :

$$(4.23) \quad \int_{\Omega} R_j S_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{T}_{k'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} S_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{R}_j^* \bar{T}_{k'}^{\lambda', \mu'}.$$

Il reste à calculer les termes :  $\int_{\Omega} L_j(\eta\sigma_{k, q}^{\lambda, \mu}) \cdot \eta\bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'}$ .

Pour  $j, q, q' = 0$ , on a :

$$(4.24) \quad \int_{\Omega} L_0(\eta\sigma_k^{\lambda, \mu}) \cdot (1 - \eta) \bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} \eta\sigma_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{L}_0^*(1 - \eta) \bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'}$$

car le support commun est éloigné de 0. On déduit donc de (3.9) que, puisque  $L_0^* \bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'} = 0$  :

$$(4.25) \quad \int_{\Omega} L_0(\eta\sigma_k^{\lambda, \mu}) \eta\bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} \eta\sigma_k^{\lambda, \mu} \cdot \bar{L}_0^* \eta\bar{\tau}_{k'}^{\lambda', \mu'} + \delta_{\lambda, \lambda'} \cdot \delta_{\mu, \mu'} \cdot \delta_{k, k'}.$$

Au vu de (4.23), (4.24), (4.25), il suffit maintenant de montrer que :

$$(4.26) \quad \int_{\Omega} \sum_{(q, q', j) \neq 0} L_j(\eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu}) \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} \sum_{(q, q', j) \neq 0} \eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu} \bar{L}_j^* \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'}.$$

Lorsque  $L = L_0$  (hypothèse du théorème (4.7)), l'égalité (4.26) est trivialement vérifiée. Voici sa démonstration dans le cas général.

1<sup>er</sup> cas : Supposons que  $\operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} \lambda' + q + q' + j > 0$ . Alors, il existe  $\delta < 0$  tel que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda + q + j &> m - \frac{n}{2} - \delta \\ 2m - n - \operatorname{Re} \lambda' + q' &> m - \frac{n}{2} + \delta. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} L_j(\eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu}) &\in H_8^{-m}(\Omega) \\ \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'} &\in \dot{H}_{-\delta}^m(\Omega) \end{aligned}$$

et la formule de Green permet d'obtenir (4.27) :

$$(4.27) \quad \int_{\Omega} \sum_{q+q'+j > \operatorname{Re} \lambda' - \operatorname{Re} \lambda} L_j(\eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu}) \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'} = \int_{\Omega} \sum_{q+q'+j > \operatorname{Re} \lambda' - \operatorname{Re} \lambda} \eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu} \bar{L}_j^* \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'}.$$

2<sup>e</sup> cas : Supposons que  $\operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} \lambda' + q + q' + j \leq 0$ . Soit, pour  $a < 0$ ,

$$\Omega_a = \{x \in \Omega / |x| \geq e^a\}.$$

On intègre par partie  $L_j(\eta \sigma_{kq}^{\lambda, \mu}) \eta \bar{\tau}_{k'q'}^{\lambda', \mu'}$  sur  $\Omega_a$ . On obtient que c'est égal à l'intégrale de  $\eta \sigma_{k,q}^{\lambda, \mu} \bar{L}_j^*(\eta \bar{\tau}_{k',q'}^{\lambda', \mu'})$  sur  $\Omega_a$ , à laquelle s'ajoute un terme de bord sur  $\{x \in \Omega / |x| = e^a\}$ . On voit facilement que ce terme a une expression de la forme :

$$(4.28) \quad e^{a(\lambda - \lambda' + q + q' + j)} \sum_l c_{q, q', j, l} a^l.$$

*Synthèse* : Par construction de  $\sigma_{kq}^{\lambda, \mu}$  et  $\tau_{k'q'}^{\lambda', \mu'}$ , les intégrales dans les deux membres de (4.26) sont absolument convergentes et sont la limite quand

$a \rightarrow -\infty$  des intégrales sur  $\Omega_a$ . Ainsi, la différence des deux membres est finie, et grâce à (4.27) et (4.28), elle est égale à :

$$(4.29) \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{\substack{(q, q', j) \neq 0 \\ q + q' + j \leq \operatorname{Re} \lambda' - \operatorname{Re} \lambda}} e^{a(\lambda - \lambda' + q + q' + j)} \sum_l c_{q, q', j, l} a^l.$$

Or, selon l'hypothèse  $(H_3)$ ,  $\lambda - \lambda' + q + q' + j$  n'est jamais nul. Donc la limite (4.29) est nécessairement 0. ■

(4.30) *Remarques :*

1) Si  $(H_3)$  n'était pas vérifiée et si  $L \neq L_0$ , la limite (4.29) pourrait être non nulle, et il y aurait interaction entre les  $S_k^{\lambda, \mu}$  et  $T_k^{\lambda', \mu'}$  pour  $\lambda - \lambda' \in \mathbf{N}^*$ .

2) Si la dimension est 2, si  $\Omega$  a pour ouverture  $\omega$  en 0 et si  $L_0$  est le laplacien,  $(H_3)$  est vérifiée lorsque  $\frac{\pi}{\omega} \notin \mathbf{Q}$ .

3) On a vérifié numériquement l'hypothèse  $(H_3)$  pour  $\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Re} \lambda' \leq 4$  sur tout secteur d'angle  $\omega \neq 2\pi$ , lorsque  $L_0$  est le bilaplacien.

#### 4.C. Espaces ordinaires

Il résulte immédiatement des théorèmes (2.18) et (4.19) que sous les hypothèses de ces deux théorèmes :

$$\gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} g \cdot \bar{K}_k^{\lambda, \mu},$$

où, avec  $A = \left[ s + m - \frac{n}{p} \right]$  et les notations du § 2.D :

$$g = f - L(\eta M_A \Pi_A f).$$

Il reste à préciser la structure de  $M_A(\Pi_A f)$  et des singularités  $E_j$  issues des polynômes : on appelle cela la « résolution polynomiale ».

Supposons dans un premier temps que  $L = L_0$ . Soit  $\alpha \in \mathbf{N}^n$  un multi-indice. D'après le lemme (4.17) de [D],  $M_A x^\alpha$  est un élément de  $\mathcal{S}^{|\alpha| + 2m}$ , noté  $w_\alpha$ . Ainsi :

$$(4.31) \quad M_A(\Pi_A f) = \sum_{|\alpha| < s + m - \frac{n}{p}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) w_\alpha.$$

Si  $L_0$  est injectif modulo les polynômes sur  $\mathcal{S}^{|\alpha| + 2m}$  au sens de la définition (3.6) de [D], i.e. si

$$v \in \mathcal{S}^{|\alpha| + 2m} \quad \text{et} \quad L_0 v \text{ polynôme} \Rightarrow v \text{ polynôme},$$

alors  $w_\alpha$  est un polynôme (homogène de  $d^0|\alpha| + 2m$ ).



Soit  $\lambda \in \mathbf{N}$  tel que  $L_0$  ne soit pas injectif modulo les polynômes sur  $\mathcal{S}^\lambda$ . Donc il existe des combinaisons linéaires des  $w_\alpha$  pour  $|\alpha| = \lambda - 2m$  qui ne sont pas des polynômes. Soit  $e^{\lambda, \nu}$  une base de ces combinaisons linéaires :  $\nu = 1, \dots, N^\lambda$ . On a :

$$(4.32) \quad e^{\lambda, \nu} = \sum_{|\alpha| = \lambda - 2m} c_\alpha^\nu w_\alpha \in \mathcal{S}^\lambda.$$

Ainsi, pour tout  $\alpha$ ,  $|\alpha| = \lambda - 2m$ , il existe des coefficients  $d_{\alpha, \nu}$  tels que :

$$(4.33) \quad w_\alpha = \sum_\nu d_{\alpha, \nu} e^{\lambda, \nu} + v_\alpha, \quad \text{où } v_\alpha \text{ est un polynôme.}$$

On pose :

$$(4.34) \quad E^{\lambda, \nu} = \eta e^{\lambda, \nu}.$$

(4.35) THÉORÈME : *Supposons que  $(H_1)$  ou  $(H_1')$  soit vérifiée et que de plus,  $s + m - \frac{n}{p} \notin \mathbf{N}$ . Supposons que  $L = L_0$  et que :*

$$\forall \lambda, \quad \operatorname{Re} \lambda = s + m - \frac{n}{p}, \quad \mathcal{L}(\lambda) \text{ est inversible.}$$

Soit  $u \in \dot{H}^m(\Omega)$  tel que  $f = Lu \in W_p^{s-m}(\Omega)$ . Alors  $u$  admet le développement asymptotique suivant :

$$u = v + \sum_{\lambda, \mu, k} \gamma_k^{\lambda, \mu} S_k^{\lambda, \mu} + \sum_{\lambda, \nu} a^{\lambda, \nu} E^{\lambda, \nu}.$$

où

- $v \in W_p^{s+m}(\Omega)$  ;
- la première somme est étendue aux  $\lambda$  tels que  $\mathcal{L}(\lambda)$  ne soit pas inversible et tels que  $\operatorname{Re} \lambda \in \left] m - \frac{n}{2}, s + m - \frac{n}{p} \right[$ ,  $\mu = 1, \dots, M^\lambda$ ,  $k = 1, \dots, \kappa^{\lambda, \mu}$  ;
- la deuxième somme est étendue aux  $\lambda \in \mathbf{N}$  tels que  $L_0$  n'est pas injectif modulo les polynômes sur  $\mathcal{S}^\lambda$  et aux  $\nu = 1, \dots, N^\lambda$  ;
- les coefficients ont les expressions suivantes :

$$(4.36) \quad a^{\lambda, \nu} = \sum_{|\alpha| = \lambda - 2m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0) d_{\alpha, \nu},$$

où les  $d_{\alpha, \nu}$  sont ceux de (4.33),

$$(4.37) \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_\Omega (f - \Pi_A f) \cdot \bar{T}_k^{\lambda, \mu} - \int_\Omega (u - M_A \Pi_A f) \cdot \bar{L}^* \bar{T}_k^{\lambda, \mu}$$

$$(4.37') \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_\Omega L[\eta(u - M_A \Pi_A f)] \cdot \bar{\tau}_k^{\lambda, \mu}.$$

Enfin, si l'hypothèse  $(H_2)$  est vérifiée, on a encore l'expression suivante :

$$(4.37'') \quad \gamma_k^{\lambda, \mu} = \int_{\Omega} [f - L(\eta M_A \Pi_A f)] \cdot \bar{K}_k^{\lambda, \mu}.$$

(4.38) *Remarque : cas des domaines plans*

Si  $n = 2$ ,  $\Gamma$  est un secteur d'ouverture  $\omega$ . Supposons  $\omega \neq 2\pi$ . Alors il résulte de (4.9), (4.15) et (4.16/2) dans [D] que  $L_0$  est injectif modulo les polynômes sur  $\mathcal{S}^\lambda$  si et seulement si  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible. Précisons ce que cela implique lorsque  $\lambda$  est entier positif. Si  $\mathcal{L}(\lambda)$  est inversible, il n'y a pas de  $E^{\lambda, \nu}$ . Au contraire, si  $\mathcal{L}(\lambda)$  n'est pas inversible, les  $E^{\lambda, \nu}$  peuvent apparaître :  $N^\lambda$  coïncide avec la dimension du sous-espace des polynômes formés de combinaisons linéaires des  $S_1^{\lambda, \mu}$  (noter que pour  $k \geq 2$  les  $S_k^{\lambda, \mu}$  ne peuvent être des polynômes).

Enfin, si  $\omega = 2\pi$  (cas de la fissure), lorsque  $\lambda$  est un entier  $\geq m$ ,  $\mathcal{L}(\lambda)$  n'est pas inversible. Pourtant, il peut arriver qu'un tel  $\lambda$  ne donne lieu à aucune singularité : tel est le cas pour tout opérateur elliptique d'ordre 2 ou 4 (cf. [D], théorèmes (14.10) et (15.4)). Pour le bilaplacien, voir le théorème (6.9) dans la deuxième partie de cet article. ■

Pour un opérateur général (1.3), on a le même énoncé que (4.35), hormis la formule (4.37'), avec de nouveaux  $E^{\lambda, \nu}$  construits comme les  $S_k^{\lambda, \mu}$  en (4.14).

## RÉFÉRENCES

- [D] M. DAUGE : *Elliptic boundary value problems in corner domains ; smoothness and asymptotics of solutions*. Lect. Notes in Math. 1341, Springer-Verlag (1988).
- [D-L-N] M. DAUGE, M. S. LUBUMA et S. NICAISE : *Coefficients des singularités pour le problème de Dirichlet sur un polygone*. C.R. Acad. Sc. Paris 304, Série I, 16, 483-486 (1987).
- [G] P. GRISVARD : *Elliptic problems in non smooth domains*. Monographs and Studies in Math. 24, Pitman (1985).
- [K] V. A. KONDRAT'EV : *Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*. Trans. Moscow Math. Soc. 16, 227-313 (1967).
- [L-M] J. L. LIONS et E. MAGENES : *Problèmes aux limites non homogènes*. Vol. I, Dunod, 1967.
- [L-S] D. LEGUILLON et E. SANCHEZ-PALENCIA : *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. RMA 5, Masson (1987).
- [M-P1] V. G. MAZ'YA et B. A. PLAMENEVSKII : *Estimates in  $L_p$  and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary*. A.M.S. Transl. (2), 123, 1-56 (1984).

- [M-P2] V. G. MAZ'YA et B. A. PLAMENEVSKII : *Coefficients in the asymptotics of the solutions of an elliptic boundary value problem in a cone*. A.M.S. Transl. (2), 123, 57-88 (1984).
- [M-P3] V. G. MAZ'YA et B. A. PLAMENEVSKII : *On the coefficients in the asymptotics of the solutions of an elliptic boundary value problem in domains with conical points*. J. of Soviet. Math. 9, 5, 750-764 (1978).
- [M-P4] V. G. MAZ'YA et B. A. PLAMENEVSKII :  *$L_p$  estimates of solutions of elliptic boundary value problems in a domain with edges*. Trans. Moscow Math. Soc. 1, 49-97 (1980).
- [M] M. A. MOUSSAOUT : *Sur l'approximation des solutions du problème de Dirichlet dans un ouvert avec coins*. Singularities and constructive methods for their treatment P. Grisvard, W. Wendland, J. R. Whiteman éditeurs. Lecture Notes in Mathematics n° 1121, Springer Verlag, 1985, 199-206.