

C. LICHT

**Homogénéisation d'un milieu incompressible
viscoplastique de type Norton-Hoff
périodiquement perforé**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 22, n° 2 (1988), p. 289-309

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1988__22_2_289_0

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HOMOGÉNÉISATION D'UN MILIEU INCOMPRESSIBLE VISCOPLASTIQUE DE TYPE NORTON-HOFF PÉRIODIQUEMENT PERFORÉ (*)

par C. LICHT ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On étudie le comportement macroscopique d'un matériau incompressible viscoplastique de type Norton-Hoff périodiquement perforé. La loi de comportement homogénéisée est celle d'un matériau incompressible viscoplastique. La différentielle du potentiel de dissipation homogénéisé vérifie le même type d'inégalités d'ellipticité et de continuité que celle du potentiel microscopique.

Abstract. — We study the macroscopic behaviour of an incompressible viscoplastic Norton-Hoff type, periodically perforated medium. The homogenized behaviour law is a law of a compressible viscoplastic material. The differential of the homogenized potential of dissipation satisfies the same kind of inequalities which are fulfilled by the differential of the microscopic potential.

1. INTRODUCTION

On considère un matériau poreux constitué d'une matrice incompressible viscoplastique de type Norton-Hoff, affaiblie par des micro vides. Notre but est d'en décrire le comportement macroscopique : pour cela, supposant les trous répartis périodiquement, on procède à l'homogénéisation du milieu.

Le problème physique est posé dans le paragraphe 2. Quelques notations et le cadre fonctionnel imposé naturellement par la loi de comportement de Norton sont présentés au paragraphe 3. Du point de vue technique, il y a trois difficultés : la non-linéarité du problème due à la loi de Norton, la présence de trous et donc un domaine variable avec le paramètre ε

(*) Reçu en décembre 1986.

(1) Laboratoire de Mécanique Générale des Milieux Continus, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Place Eugène Bataillon, 34060 Montpellier Cedex et GRECO 47 « Grandes Déformations et Endommagement »

décrivant la périodicité de la structure et enfin la condition d'incompressibilité. Pour la commodité du lecteur, on a réuni dans le paragraphe 4 des lemmes techniques connus ou des variantes adaptées à la situation présente. En particulier sont construits des opérateurs de prolongement dans les trous des champs de vitesses et de contraintes définis sur la partie saine du matériau. Ensuite, on étudie le problème dans le domaine troué : il en résulte des estimations uniformes en ε sur les prolongés des champs de vitesses et de contraintes. Au paragraphe 6 est étudié le candidat fourni heuristiquement par la méthode des moyennes ([2], [14], [15], [16], ...) au titre de potentiel de dissipation homogénéisé. Enfin, au paragraphe 7, on établit, par la méthode des fonctions test [16], que la loi de comportement homogénéisée est celle d'un matériau compressible viscoplastique.

Nos résultats ont été annoncés en [8]. Lorsque l'exposant de Norton p vaut 2 le problème se réduit au système de Stokes avec une condition de vecteur contrainte nul sur le bord des trous, aussi cette étude est à rapprocher de [4] où est traitée l'homogénéisation du système de Stokes et de Navier Stokes avec des conditions aux limites de type Neumann ou Fourier d'ailleurs on généralise ici au cas $p \neq 2$ la technique proposée d'estimation de la partie sphérique du tenseur des contraintes. L'étude de l'homogénéisation d'un matériau élastique non linéaire mais avec une énergie de déformation à croissance quadratique a été effectuée en [15] dans le cas d'un matériau sain et en [1] dans le cas d'un matériau périodiquement fissuré.

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME PHYSIQUE

Dans \mathbb{R}^N on considère un domaine Ω de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, une cellule de base $Y = \prod_{i=1}^N]0, y_i[$, $0 < y_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ et un ouvert

T de frontière lipschitzienne fortement inclus dans Y . On note $Y^* = Y \setminus \bar{T}$ et on suppose Y^* connexe. On reproduit $Y^* \cup \partial Y$ par Y -périodicité dans \mathbb{R}^N en un ouvert H . Pour tout ε positif on pose $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon H$, $\Gamma_\varepsilon = \bar{\Omega} \cap \partial(\varepsilon H)$. On fait l'hypothèse technique :

(H.1) *L'ensemble $\Lambda = \{\varepsilon \in \mathbb{R}^+ ; \Omega_\varepsilon \text{ est un domaine à frontière lipschitzienne et } \Gamma_\varepsilon \cap \partial\Omega = \emptyset\}$ est non vide et possède zéro comme point adhérent.*

Ω_ε schématise le domaine occupé par un matériau incompressible viscoplastique de type Norton-Hoff. Le solide troué est soumis à une densité volumique de forces f , est encastré sur $\partial\Omega$ et libre sur Γ_ε le bord des trous.

Les équations liant le champ des vitesses v_ε et le champ de contraintes σ_ε sont alors :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \sigma_{\varepsilon D} = \phi'_p(e(v_\varepsilon)), & \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \operatorname{div} \sigma_\varepsilon + f = 0 & & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ v^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad \sigma^\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{cases}$$

$\sigma_{\varepsilon D}$ est la composante déviatorique de σ_ε , e l'opérateur de déformation

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad 1 \leq i, j \leq N$$

n est la normale extérieure à Γ_ε et ϕ'_p la différentielle du potentiel modèle de dissipation de Norton :

$$\mathbb{R}^{N^2} \ni \tau \mapsto \phi_p(\tau) = \frac{1}{p} |\tau|^p \in \mathbb{R} \quad 1 < p < \infty$$

$|\cdot|$ désignant la norme euclidienne.

On se propose d'étudier l'existence et l'unicité de $(v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ et le comportement limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

3. NOTATIONS, CADRE FONCTIONNEL ET RAPPELS

Aucune confusion n'étant possible on note respectivement $|\cdot|$ et $x \cdot y$ la norme euclidienne et le produit scalaire de deux éléments x et y de \mathbb{R}^N ou de \mathbb{R}^{N^2} . Si G est un ouvert de \mathbb{R}^N , $|G|$ désigne sa mesure. I_d est le tenseur unité de $\mathbb{R}_S^{N^2}$ le sous-espace de \mathbb{R}^{N^2} des tenseurs symétriques, $p' = p/(p-1)$ est l'exposant conjugué de p , enfin ψ_p est l'analogie monodimensionnel de ϕ_p :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \psi_p(t) = \frac{1}{p} |t|^p \quad 1 < p < \infty.$$

On va utiliser les espaces fonctionnels suivants (voir [13] pour les précisions). Si G est un ouvert à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^N ,

- $\mathcal{D}(G)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans G ;
- $\mathcal{D}'(G)$ l'espace des distributions sur G ;
- $\mathbb{L}^{p'}(G) = \{ \tau \in L^{p'}(G)^{N^2}; \tau(x) \in \mathbb{R}_S^{N^2} \text{ pp } x \in G \}$ on notera $|\cdot|_{p', G}$ aussi bien la norme dans $L^{p'}(G)^N$ que dans $\mathbb{L}^{p'}(G)$.

— $W^{1,p}(G)^N$ est l'espace des fonctions de $L^p(G)^N$ dont les dérivées-distributions sont dans $L^p(G)$ et $\|\cdot\|_{1,p,G}$ la norme usuelle. $W_0^{1,p}(G)^N$ est le sous-espace fermé des éléments à trace nulle sur ∂G ; $W^{-1,p'}(G)^N$ son dual. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire de dualité qui s'écrit

$$\langle v, \varphi \rangle = \int_G v \cdot \varphi \quad \text{si } (v, \varphi) \in L^{p'}(G)^N \times W_0^{1,p}(G)^N.$$

$W^{1/p',p}(\partial G)^N$ est l'espace des traces sur ∂G des éléments de $W^{1,p}(G)$ et $W^{-1/p',p'}(\partial G)^N$ son dual. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial G}$ désigne la forme bilinéaire de dualité qui s'écrit $\int_{\partial G} \psi \cdot \varphi$ si $(\psi, \varphi) \in L^{p'}(\partial G)^N \times W^{1/p',p}(\partial G)^N$.

Il est classique que si $\sigma \in \mathbb{L}^{p'}(G)$ avec $\operatorname{div} \sigma \in L^{p'}(G)^N$ on peut définir $\sigma \cdot n \in W^{-1/p',p'}(\partial G)^N$ tel que :

$$\int_G \sigma \cdot e(\varphi) + \int_G \operatorname{div} \sigma \cdot \varphi = \langle \sigma \cdot n, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in W^{1,p}(G)^N$$

si $\sigma \in C^1(\bar{G})^N$ l'élément $\sigma \cdot n$ précédemment défini coïncide avec $\sigma|_{\partial G} \cdot n$.

Pour alléger l'écriture des normes on omet l'indice Ω si $G = \Omega$ et si $G = \Omega_\varepsilon$ on remplace l'indice Ω_ε par ε .

On pose :

$$V = W_0^{1,p}(\Omega)^N, \quad V_\varepsilon = \{v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon)^N; v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ au sens des traces}\}$$

$$V_{\varepsilon, \operatorname{div}} = \{v \in V_\varepsilon; \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon)^N\}.$$

On sait (voir lemme 4.4) que

$$V \ni v \mapsto |v|_V = \sum_{i,j=1}^N |e_{ij}(v)|_p$$

est une norme sur V et on déduit sans peine que

$$V_\varepsilon \ni v \mapsto |v|_{V_\varepsilon} = \sum_{i,j=1}^N |e_{ij}(v)|_{p,\varepsilon}$$

est une norme sur V_ε .

Dans la suite la lettre C indicée ou non désigne diverses constantes.

4. PRÉLIMINAIRES TECHNIQUES

4.1. Propriétés de continuité et d'ellipticité de ϕ'_p et conséquences.

LEMME 4.1 : Il existe deux constantes positives $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ telles que :
 (i) si $1 < p \leq 2$

$$|\phi'_p(s) - \phi'_p(t)| \leq \beta |s - t|^{p-1} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^{N^2}$$

$$(|s| + |t|)^{2-p} (\phi'_p(s) - \phi'_p(t)) \cdot (s - t) \geq \alpha |s - t|^2$$

(ii) si $2 \leq p < \infty$

$$|\phi'_p(s) - \phi'_p(t)| \leq \beta |s - t| (|s| + |t|)^{p-2} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}^{N^2}$$

$$(\phi'_p(s) - \phi'_p(t)) \cdot (s - t) \geq \alpha |s - t|^p$$

LEMME 4.2 : Pour tout ouvert G de \mathbb{R}^N on a :
 (i) si $1 < p \leq 2$

$$|\phi'_p(s) - \phi'_p(t)|_{p', G} \leq \beta |s - t|_{p, G}^{p-1} \quad \forall s, t \in \mathbb{L}^p(G)$$

$$(|s|_{p, G} + |t|_{p, G})^{2-p} \int_G (\phi'_p(s) - \phi'_p(t)) \cdot (s - t) \geq \alpha |s - t|_{p, G}^2$$

(ii) si $2 \leq p < \infty$

$$|\phi'_p(s) - \phi'_p(t)|_{p', G} \leq \beta |s - t|_{p, G} (|s|_{p, G} + |t|_{p, G})^{p-2} \quad \forall s, t \in \mathbb{L}^p(G)$$

$$\int_G (\phi'_p(s) - \phi'_p(t)) \cdot (s - t) \geq \alpha |s - t|_{p, G}^p$$

On trouvera dans [6] une démonstration de ces résultats qui jouent un rôle technique fondamental dans l'étude des problèmes avec loi de comportement de type Norton.

4.2. Lemmes de prolongement

LEMME 4.3. Pour tout $\varepsilon \in \Lambda$, il existe un opérateur de prolongement P^ε linéaire continu de V_ε sur V tel que :

$$|e(P^\varepsilon v)|_p \leq C |e(v)|_{p, \varepsilon} \quad \forall v \in V_\varepsilon$$

avec C indépendant de ε .

On adapte au cas vectoriel et au cadre L^p une technique classique ([16], [3], [5], [4], ...). Pour cela on utilisera les 3 lemmes suivants :

LEMME 4 4 (inégalité de Korn) *Soit G un ouvert lipschitzien, l'expression*

$$|e(u)|_{p, G} + |u|_{p, G}$$

est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1, p}(G)^N$, $|e(u)|_{p, G}$ est une norme équivalente à celle de $W_0^{1, p}(G)^N$

Preuve Le cas G lipschitzien est traité dans [12]

Notons \mathcal{R} l'ensemble des déplacements rigides de \mathbb{R}^N , c'est-à-dire le noyau dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)^N$ de l'opérateur e

LEMME 4 5 *Soit \mathcal{R}_G l'ensemble des restrictions à G des éléments de \mathcal{R} , il existe un opérateur ρ linéaire continu de $W^{1, p}(G)^N$ dans \mathcal{R}_G tel que*

$$|v - \rho(v)|_{p, G} \leq C |e(v)|_{p, G} \quad \forall v \in W^{1, p}(G)^N$$

avec C indépendant de v

Preuve Posons $\hat{N} = \dim(\mathcal{R}_G)$, il existe une base $\{\rho_i\}_1^{\hat{N}}$ de \mathcal{R}_G $L^2(G)^N$ -orthonormale. On définit ρ par

$$v \in W^{1, p}(G)^N \mapsto \rho(v) = \sum_{i=1}^{\hat{N}} \left(\int_G v \cdot \rho_i \right) \rho_i \in \mathcal{R}_G \subset W^{1, p}(G)^N$$

Supposons fautive l'inégalité annoncée, alors il existe une suite $v_n \in W^{1, p}(G)^N$ telle que $|e(v_n)|_{p, G} \rightarrow 0$, $|v_n - \rho(v_n)|_{p, G} = 1$

D'après l'inégalité de Korn $u_n \equiv v_n - \rho(v_n)$ est bornée dans $W^{1, p}(G)^N$ ainsi il existe une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans $W^{1, p}(G)^N$ donc fortement dans $L^p(G)^N$. En outre

$$|e(u)|_{p, G} \leq \varliminf |e(u_n)|_{p, G} = \varliminf |e(v_n)|_{p, G} = 0$$

donc $u \in \mathcal{R}_G$ et par suite $u = \rho(u)$. Or

$$\rho(u_n) = \rho(v_n) - \rho(\rho(v_n)) = \rho(v_n) - \rho(v_n) = 0$$

donc $u = \rho(u) = \lim \rho(u_n) = 0$. Ce qui conduit à l'absurdité $|u_n|_{p, G} = 1$ et $u_n \rightarrow 0$ dans $L^p(G)^N$.

LEMME 4 6 *Soit G et U deux ouverts lipschitziens avec U fortement inclus dans G , posons $G^* = G \setminus \bar{U}$, alors il existe un opérateur de prolongement P de $W^{1, p}(G^*)^N$ dans $W^{1, p}(G)^N$ tel que*

$$|e(Pv)|_{p, G} \leq C |e(v)|_{p, G^*} \quad \forall v \in W^{1, p}(G^*)^N$$

avec C indépendant de v

Preuve : Le lemme 4.5 appliqué à G^* montre que tout $v \in W^{1,p}(G^*)^N$ peut s'écrire $v = v_1 + \rho_1$ avec $\rho_1 \in \mathcal{R}$ et

$$|v_1|_{p, G^*} \leq C_1 |e(v)|_{p, G^*}$$

on prolonge par la méthode de Nikolskij ([13] p. 75-77) v_1 en \tilde{v}_1 sur G avec

$$|\tilde{v}_1|_{1,p,G} \leq C_2 |v_1|_{1,p,G^*}$$

et C_2 indépendante de v .

Posons $Pv = \tilde{v}_1 + \rho_1$, alors $Pv \in W^{1,p}(G)^N$ et :

$$\begin{aligned} |e(Pv)|_{p,G} &= |e(\tilde{v}_1)|_{p,G} \leq |\tilde{v}_1|_{1,p,G} \leq \\ &\leq C_2 |v_1|_{1,p,G^*} \\ &\leq C_3 \{ |v_1|_{p,G^*} + |e(v_1)|_{p,G^*} \} \quad (\text{lemme 4.4}) \\ &\leq C_3(C_1 + 1) |e(v)|_{p,G^*}. \end{aligned}$$

Preuve du lemme 4.3 : On peut maintenant adapter le raisonnement de [16]. Notons $T_I, I = 1, \dots, M(\varepsilon)$ les $M(\varepsilon)$ ouverts distincts inclus dans Ω déduits du trou de base T par une homothétie de rapport ε . Grâce à l'hypothèse (H1), on peut recouvrir Ω par $M(\varepsilon) + 1$ ensembles mesurables disjoints :

$$\Omega = G_0 \cup \left(\bigcup_{I=1}^{M(\varepsilon)} G_I \right)$$

tels que :

- (i) G_0 ne contient aucun des trous $T_I, I = 1, \dots, M(\varepsilon)$.
- (ii) Pour $I = 1, \dots, M(\varepsilon)$

- $\bar{T}_I \subset G_I$.

- Chaque G_I se déduit d'un même domaine G à frontière lipschitzienne contenant \bar{T} et indépendant de ε par une transformation τ_I du type :

$$y \in G \mapsto \tau_I(y) = x_I + \varepsilon y \in G_I.$$

Soit v arbitraire dans V_ε , notons v_I sa restriction à G_I et $U_I = v_I \circ \tau_I$. u_I est un élément de $W^{1,p}(G^*)^N$ si $G^* = G \setminus \bar{T}$. Par le lemme 4.5, on peut étendre u_I à G en Pu_I . Ceci permet de définir $P^\varepsilon v$ par :

$$P^\varepsilon v(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in G_0 \\ (Pu_I \circ \tau_I^{-1})(x) & \text{si } x \in G_I, \quad 1 \leq I \leq M(\varepsilon). \end{cases}$$

Il est clair que $P^\varepsilon v \in V$, de plus :

$$\begin{aligned} \int_{G_I} |e_{i_j}(P^\varepsilon v)(x)|^p dx &= \varepsilon^{N-p} \int_G |e_{i_j}(Pu_I)(y)|^p dy \\ &\leq C \varepsilon^{N-p} \int_{G^*} |e_{i_j}(u_I)(y)| dy \\ &= C \int_{G_I \setminus \bar{T}_I} |e_{i_j}(v)(x)|^p dx. \end{aligned}$$

D'où :

$$|e(P^\varepsilon v)|_p^p = |e(v)|_{p, G_0}^p + \sum_{l=1}^{M(\varepsilon)} |e(P^\varepsilon v)|_{p, G_l}^p \leq \text{Max}(1, C) |e(v)|_{p, \varepsilon}^p.$$

Pour chaque ε de Λ on définit les deux isométries :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega_\varepsilon) &\mapsto Q^\varepsilon \sigma = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega \setminus \bar{\Omega}_\varepsilon \\ \sigma & \text{sur } \Omega_\varepsilon \end{cases} \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \\ f \in L^{p'}(\Omega)^N &\mapsto R^\varepsilon f = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \\ f & \text{sur } \Omega_\varepsilon \end{cases} \in L^{p'}(\Omega)^N. \end{aligned}$$

LEMME 4.7 : Si $\theta = |T|/|Y|$ désigne la porosité et si $f \in L^{p'}(\Omega)^N$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ $R^\varepsilon f$ converge faiblement dans $L^{p'}(\Omega)^N$ vers $(1 - \theta) f$.

Preuve : On adapte sans peine la preuve donnée dans [5].

4.3. Lemme relatif à l'opérateur divergence

LEMME 4.8 : Soit G un domaine à frontière lipschitzienne :

(i) Si $f \in W^{-1, p'}(G)^N$ et $\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1, p}(G)^N$ tel que $\text{div } \varphi = 0$ alors il existe $q \in L^{p'}(\Omega)$ tel que $f = \nabla q$.

(ii) Si $q \in L^p(G)$ et $\int_G q(x) dx = 0$ il existe $v \in W_0^{1, p}(G)^N$ tel que $\text{div } v = q$, en outre on peut choisir v dépendant linéairement et continûment de q :

$$\exists C(G, p) : |v|_{1, p, G} \leq C |q|_{p, G}.$$

(iii) g élément de $W^{1/p', p}(G)^N$ est la trace d'un élément de $W^{1, p}(G)^N$ à divergence nulle si et seulement si $\int_{\partial G} g \cdot n = 0$.

Ce résultat est classique si $p = 2$ et de notoriété moindre si $p \neq 2$ et G lipschitzien. On peut démontrer très simplement (i) et (ii) comme dans [17] p. 29-30 en utilisant le lemme de Peetre et le fait ([12] p. 108) que sur $L^p(G)$ $N(f) = |\nabla f|_{W^{-1,p}(G)^N} + |f|_{W^{-1,p}(G)^N}$ définit une norme équivalente à la norme usuelle. (iii) est une conséquence immédiate de (ii) et de

$$\int_G \operatorname{div} u = \int_{\partial G} u \cdot n \quad \forall u \in W^{1,p}(G)^N .$$

5. LE PROBLÈME DANS L'OUVERT « TROUÉ » Ω_ε

Soit f un élément quelconque de $L^{p'}(\Omega)^N$, il est immédiat de constater que toute solution du problème

$$(P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in V_{\varepsilon, \operatorname{div}} \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_\varepsilon \cdot e(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon \\ \sigma_{\varepsilon D} = \Phi'_p(e(v_\varepsilon)) \end{array} \right.$$

est solution dans un sens faible du système d'équations ponctuelles (2.1).

PROPOSITION 5.1 : *Pour tout ε de Λ , et tout f de $L^{p'}(\Omega)^N$ le problème (P_ε) admet une solution unique. En outre :*

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } |P^\varepsilon v_\varepsilon|_V \leq C |f|_{p'}^{\frac{1}{p'-1}} \\ \text{(ii) } |Q^\varepsilon \sigma_\varepsilon|_{p'} \leq C |f|_{p'} \end{array} \right.$$

avec C indépendant de ε et de f .

Preuve : v_ε vérifie nécessairement :

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_\varepsilon} \Phi'_p(e(v_\varepsilon)) \cdot e(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in V_{\varepsilon, \operatorname{div}} \\ v_\varepsilon \in V_{\varepsilon, \operatorname{div}} \end{array} \right.$$

Vu le lemme 4.2, l'existence et l'unicité de v_ε découle d'un résultat classique ([9] p. 171-173). (5.1 i) résulte alors du choix $\varphi = v_\varepsilon$ dans (5.2) et des lemmes 4.2 et 4.3.

Du lemme 4.8, on déduit l'existence de $q_\varepsilon \in L^{p'}(\Omega_\varepsilon)$ déterminé à une constante près tel que si

$$\sigma_\varepsilon = -q_\varepsilon I_d + \phi_p'(e(v_\varepsilon))$$

on ait :

$$(5.3) \quad \sigma_{\varepsilon D} = \phi_p'(e(v_\varepsilon))$$

$$(5.4) \quad \operatorname{div} \sigma_\varepsilon + f = 0.$$

Par suite pour tout φ de $V_{\varepsilon, \operatorname{div}}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\varepsilon \cdot n, \varphi \rangle_{\Gamma_\varepsilon} &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_\varepsilon^\varepsilon \cdot e(\varphi) + \int_{\Omega_\varepsilon} \operatorname{div} \sigma_\varepsilon^\varepsilon \cdot \varphi \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_D^\varepsilon \cdot e(\varphi) - \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\sigma_\varepsilon \cdot n$ appartient au polaire du sous-espace de $W^{1/p', p}(\Gamma_\varepsilon)^N$ des traces des éléments de $V_{\varepsilon, \operatorname{div}}$. Or celui-ci, d'après le lemme 4.8, est engendré par le champ n . Donc on peut choisir q_ε de manière que $\sigma_\varepsilon \cdot n = 0$ au sens de $W^{-1/p', p'}(\Gamma_\varepsilon)^N$ ce qui, augmenté de (5.3) établit l'existence de σ_ε . L'unicité découle de celle de v_ε qui implique que la différence de deux solutions $\sigma_\varepsilon^1, \sigma_\varepsilon^2$ vérifie :

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^1 - \sigma_\varepsilon^2 &= (q_\varepsilon^2 - q_\varepsilon^1) I_d, \quad \nabla(q_\varepsilon^2 - q_\varepsilon^1) = 0, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} (q_\varepsilon^2 - q_\varepsilon^1) n \cdot \varphi &= 0 \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon. \end{aligned}$$

Il reste à estimer $|q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}$. Soit \tilde{q}_ε l'élément de $L^p(\Omega)$ défini par :

$$\tilde{q}_\varepsilon = \begin{cases} \psi_{p'}'(q_\varepsilon) & \text{sur } \Omega_\varepsilon \\ -\frac{1}{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|} \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_{p'}'(q) & \text{sur } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On a :

$$(5.5) \quad \int_{\Omega} \tilde{q}_\varepsilon^\varepsilon = 0$$

et

$$\begin{aligned} |\tilde{q}_\varepsilon|_p^p &= |\psi_{p'}'(q_\varepsilon)|_{p', \varepsilon}^p + \frac{1}{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|^{p-1}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \psi_{p'}'(q_\varepsilon) \right)^p \\ &\leq |q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}^{p'} + \frac{1}{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|^{p-1}} |q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}^{p'} |\Omega_\varepsilon|^{p'/p} \quad (\text{Hölder}). \end{aligned}$$

Il est clair qu'il existe une constante positive minorant $|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon|$ pour tout ε de Λ , ainsi il existe C indépendant de ε tel que :

$$(5.6) \quad |\tilde{q}_\varepsilon|_p^p \leq C |q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}^{p'}$$

(5.5) et (5.6) via le lemme 4.8 entraînent l'existence de $\varphi \in V$ vérifiant :

$$(5.7) \quad \operatorname{div} \varphi = \tilde{q}_\varepsilon, \quad |\varphi|_V^p \leq C_1(\Omega, p) |q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}^{p'}$$

Or on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon} -q_\varepsilon \operatorname{div} \varphi + \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{\varepsilon D} \cdot e(\varphi) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi$$

ainsi

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \psi_{p'}'(q_\varepsilon) \cdot q_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi - \int_{\Omega_\varepsilon} Q^\varepsilon \sigma_{\varepsilon D} \cdot e(\varphi)$$

donc :

$$|q_\varepsilon|_{p', \varepsilon}^{p'} \leq (|f|_{p'} + |Q^\varepsilon \sigma_{\varepsilon D}|_{p'}) |\varphi|_V$$

(5.7), (5.3) (5.1 i) et le lemme 4.2 fournissent enfin le résultat.

On déduit de la proposition que pour chaque f de $L^{p'}(\Omega)^N$ il existe une suite ε_n dans Λ tendant vers zéro lorsque n tend vers l'infini telle que $(P^{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}, Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n})$ converge faiblement vers (v_0, σ_0) dans $V \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$. En outre puisque

$$\int_{\Omega} R^\varepsilon f \cdot \varphi = \int_{\Omega_\varepsilon} f \cdot \varphi = \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_\varepsilon \cdot e(\varphi) = \int_{\Omega} Q^\varepsilon \sigma_\varepsilon \cdot e(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$$

il vient du lemme 4.7 :

$$(5.8) \quad \operatorname{div} \sigma^0 + (1 - \theta) f = 0$$

Pour montrer qu'en fait lorsque ε tend vers zéro en restant dans $\Lambda(P^\varepsilon v_\varepsilon, Q^\varepsilon \sigma_\varepsilon)$ converge faiblement vers (v_0, σ_0) et établir les relations entre v_0 et σ_0 on introduit classiquement ([2], [14], [15], [16], ...) un problème annexe dans la cellule de base trouée Y^* .

6. UN PROBLÈME ANNEXE DANS Y^*

On pose

$$W = \{w \in W^{1,p}(Y^*)^N ; \text{traces de } w \text{ égales sur les faces opposées de } Y\}$$

$$W_{\text{div}} = \{w \in W ; \text{div } w = 0 \text{ dans } Y^*\}$$

$$\hat{W} = W/\mathbb{R}^N$$

$$S_{\text{per}}^0 = \left\{ \sigma \in \mathbb{L}^{p'}(Y^*) ; \int_{Y^*} \sigma \cdot e(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W \right\}.$$

A l'aide du lemme 4.4 et d'une variante évidente du lemme 4.5, on établit que

$$\hat{u} \in \hat{W} \mapsto |\hat{u}|_{\hat{W}} = |e(u)|_{p, Y^*} \quad \text{où } u \in \hat{u}$$

est une norme sur \hat{W} équivalente à la norme usuelle.

Pour tout $E \in \mathbb{R}_S^{N^2}$, considérons le problème

$$(P_E) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (v_E, \sigma_E) \in W \times S_{\text{per}}^0 \text{ tel que} \\ \sigma_{ED} = \phi'_p(E + e(v_E)), \quad \text{div } v_E + \text{tr } E = 0 \text{ dans } Y^*. \end{array} \right.$$

LEMME 6.1 : Pour tout E de $\mathbb{R}_S^{N^2}$, (P_E) admet une solution. σ_E est unique, v_E l'est à un champ constant près.

Preuve : Nécessairement v_E vérifie

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{Y^*} \phi'_p(E + e(v_E)) \cdot e(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_{\text{div}} \\ v_E \in K_E = \{v \in W ; \text{div } v + \text{tr } E = 0 \text{ dans } Y^*\} . \end{array} \right.$$

Il est immédiat que K_E est un convexe fermé de W , vérifions qu'il est non vide. Soit h l'élément de $\mathbb{L}^p(Y^*)$ défini par

$$h = \begin{cases} -\text{tr } E & \text{dans } Y^* \\ \frac{|Y^*|}{|T|} \text{tr } E & \text{dans } T. \end{cases}$$

On a $\int_Y h = 0$, donc d'après le lemme 4.8 il existe $\tilde{\varphi}_0 \in W_0^{1,p}(Y)^N$ tel que $\text{div } \tilde{\varphi}_0 = h$ dans Y , ainsi l'élément $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0|_{Y^*}$ appartient à K_E .

Vu le lemme 4.2 on déduit d'un résultat classique ([9] p. 247-248) l'existence et l'unicité de $\hat{v}_E \in \hat{W}$ tel que tout représentant v_E de \hat{v}_E soit solution de (6.1). on a :

$$\int_{Y^*} \Phi'_p(E + e(v_E)) \cdot e(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(Y^*)^N \quad \text{tel que } \text{div } \varphi = 0,$$

ainsi — lemme 4.8 — il existe $q_E \in L^{p'}(Y^*)$ défini à une constante près tel que si $\sigma_E = -q_E Id + \Phi'_p(E + e(v_E))$, on ait $\text{div } \sigma_E = 0$. Donc :

$$\int_{Y^*} \sigma_E \cdot e(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in W_{\text{div}}.$$

Cela est vrai en particulier pour tout champ de W_{div} nul sur ∂Y , en procédant comme dans la démonstration de l'existence de σ_e dans la proposition 5.1 on déduit que l'on peut ajuster la constante associée à q_E de manière que $\sigma_E \cdot n = 0$ dans $W^{-1/p',p'}(\partial T)$. Ainsi pour tout φ de W

$$\begin{aligned} \int_{Y^*} \sigma_E \cdot e(\varphi) &= - \int_{Y^*} \text{div } \sigma_E \cdot \varphi + \langle \sigma_E \cdot n, \varphi \rangle_{\partial T} + \langle \sigma_E \cdot n, \varphi \rangle_{\partial Y} \\ &= \langle \sigma_E \cdot n, \varphi \rangle_{\partial Y}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que ce terme est nul. Or pour tout φ de W on a $\int_{\partial Y} \varphi \cdot n = 0$, donc — lemme 4.8 appliqué dans Y — il existe $\theta \in W_{\text{div}}$ tel que $\theta = \varphi$ sur ∂Y^* et alors :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_E \cdot n, \varphi \rangle_{\partial Y} &= \langle \sigma_E \cdot n, \theta \rangle_{\partial Y^*} = \\ &= \int_{Y^*} \sigma_E \cdot e(\theta) = \int_{Y^*} \Phi'_s(E + e(v_E)) \cdot e(\theta) = 0 \end{aligned}$$

L'unicité de σ_E s'obtient de la même manière que celle de σ_e .

On définit la fonction Φ_p^{hom} par :

$$(6.2) \quad \mathbb{R}_S^{N^2} \ni E \mapsto \Phi_p^{\text{hom}}(E) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi_p(E + e(v_E))$$

v_E étant déterminé à un champ constant près la définition a bien un sens. Le résultat essentiel de ce paragraphe est la :

PROPOSITION 6.1 : ϕ_p^{hom} est strictement convexe, Fréchet-différentiable, positivement homogène de degré p et $\phi_p^{\text{hom}'}$ vérifie

$$(6.3) \quad \phi_p^{\text{hom}'}(E) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \sigma_E(y) dy$$

(a) $1 < p \leq 2$:

$$\begin{aligned} |\phi_p^{\text{hom}'}(E_1) - \phi_p^{\text{hom}'}(E_2)| &\leq M_1 |E_1 - E_2|^{p-1} \quad \forall E_1, E_2 \in \mathbb{R}_S^{N^2} \\ (|E_1| + |E_2|)^{2-p} (\phi_p^{\text{hom}'}(E_1) - \phi_p^{\text{hom}'}(E_2)) \cdot (E_1 - E_2) &\geq M_2 |E_1 - E_2|^2 \end{aligned}$$

(b) $2 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned} |\phi_p^{\text{hom}'}(E_1) - \phi_p^{\text{hom}'}(E_2)| &\leq M_3 (|E_1| + |E_2|)^{p-2} |E_1 - E_2| \quad \forall E_1, E_2 \in \mathbb{R}_S^{N^2} \\ (\phi_p^{\text{hom}'}(E_1) - \phi_p^{\text{hom}'}(E_2)) \cdot (E_1 - E_2) &\geq M_4 |E_1 - E_2|^p \end{aligned}$$

où les constantes M_i ne dépendent que de Y^* et de p .

Pour établir cela, on complète le résultat du lemme 6.1.

Pour tout E de $\mathbb{R}_S^{N^2}$ et à chaque solution v_E de (P_E) on associe u_E :

$$(6.4) \quad u_E(y) = v_E(y) + E \cdot y \text{ pp } y \in Y^* .$$

On définit l'application j suivante :

$$(6.5) \quad \mathbb{R}_S^{N^2} \ni E \mapsto j(E) = \hat{u}_E \in W^{1,p}(Y^*)^N / \mathbb{R}^N$$

v_E étant déterminée à un champ constant près la définition a un sens.

LEMME 6.2 : j est injective, homogène de degré 1 et

$$(6.6) \quad |e(j(E))|_{p, Y^*} \leq C(p, Y^*) |E| \quad \forall E \in \mathbb{R}_S^{N^2}$$

$$(6.7) \quad E_{k\ell} = \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} u_{E_k} n_\ell + u_{E_\ell} n_k \quad \forall u_E \in j(E),$$

$$\forall k, \ell \in \{1, \dots, N\}$$

$$(6.8) \quad |E - E'| \leq C(p, Y^*) |e(u_E) - e(u_{E'})|_{p, Y^*}$$

$$\forall (u_E, u_{E'}) \in j(E) \times j(E'), \quad \forall E, E' \in \mathbb{R}_S^{N^2} .$$

Preuve : (6.7) est évidente, ce qui implique l'injectivité de j . L'homogénéité de degré 1 de j découle de (6.1). Le second membre de (6.7) n'étant pas modifié par ajout à u_E d'un champ rigide, (6.8) est une conséquence du lemme (4.4) et de la continuité de l'application trace de $W^{1,p}(Y^*)$ dans $L^p(\partial Y)$. Enfin d'après (6.1)

$$\int_{Y^*} \Phi'_p(e(u_E)) \cdot e(u_E) = E \cdot \int_{Y^*} \Phi'_p(e(u_E))$$

ainsi (6.6) résulte du lemme 4.2 et de l'inégalité de Hölder.

Preuve de la proposition 6.1 : 1^{re} étape : la positive homogénéité de degré p de Φ_p^{hom} vient de celle de Φ_p et de l'homogénéité de degré un de j .

2^e étape : on établit la stricte convexité de Φ_p^{hom} sur $\mathbb{R}_S^{N^2}$ ce qui entraînera la continuité et la sous-différentiabilité sur $\mathbb{R}_S^{N^2}$. (6.1) implique

$$\Phi_p^{\text{hom}}(E) \leq \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi_p(E + e(v)(y)) dy \quad \forall v \in K_E,$$

en utilisant l'injectivité de j et la stricte convexité de Φ_p on obtient :

$$\forall E_1 \neq E_2 \in \mathbb{R}_S^{N^2}, \quad \forall \lambda \in]0, 1[$$

$$\begin{aligned} & \Phi_p^{\text{hom}}(\lambda E_1 + (1 - \lambda) E_2) \\ & \leq \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi_p(\lambda E_1 + (1 - \lambda) E_2 + \lambda e(v_{E_1}) + (1 - \lambda) e(v_{E_2})) \\ & = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi_p(\lambda(E_1 + e(v_{E_1})) + (1 - \lambda)(E_2 + e(v_{E_2}))) \\ & < \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \lambda \Phi_p(E_1 + e(v_{E_1})) + (1 - \lambda) \Phi_p(E_2 + e(v_{E_2})) \\ & = \lambda \Phi_p^{\text{hom}}(E_1) + (1 - \lambda) \Phi_p^{\text{hom}}(E_2) \end{aligned}$$

3^e étape : on montre que

$$a(E) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \sigma_E(y) dy \in \partial \Phi_p^{\text{hom}}(E)^{(1)} \quad \forall E \in \mathbb{R}_S^{N^2}.$$

(¹) On note ∂J le sous-différentiel d'une fonction convexe J .

• *Propriétés de continuité.*

Utilisant q_E défini lors de la démonstration du lemme 6.1, on écrit :

$$a(E) = a_D(E) + a_m(E) I_d,$$

$$\text{avec } a_D(E) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \Phi'_p(e(u_E)), \quad a_m(E) = -\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} q_E$$

l'inégalité d'Hölder entraîne :

$$|a_D(E_1) - a_D(E_2)| \leq C(p, Y^*) \left| \Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2})) \right|_{p', Y^*}$$

Par un argument désormais familier, on construit $\varphi \in W$ tel que :

$$\operatorname{div} \varphi = \Psi'_{p'}(q_{E_1} - q_{E_2}), \quad |e(\varphi)|_{p, Y^*} \leq C(p, Y^*) |q_{E_1} - q_{E_2}|_{p', Y^*}^{p'/p}.$$

Puisque

$$\int_{Y^*} (q_{E_1} - q_{E_2}) \cdot \Psi'_{p'}(q_{E_1} - q_{E_2}) = \int_{Y^*} (\Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2}))) \cdot e(\varphi)$$

l'inégalité d'Hölder implique :

$$|q_{E_1} - q_{E_2}|_{p', Y^*} \leq C(p, Y^*) \left| \Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2})) \right|_{p', Y^*}$$

ainsi :

$$(6.12) \quad |a(E_1) - a(E_2)| \leq C(p, Y^*) \left| \Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2})) \right|_{p', Y^*}$$

$\Phi'_{p'}$ étant l'inverse de Φ'_p on remplace dans l'expression (6.10) $e(u_{E_i})$ par $\Phi'_{p'}(\Phi'_p(e(u_{E_i})))$ $i = 1, 2$ et il vient en appliquant le lemme 4.2 à $\Phi'_{p'}$:

$$(6.13) \quad \begin{cases} A \geq C(p, Y) \left| \Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2})) \right|_{p', Y^*}^{p'} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ \left(|e(u_{E_1})|_{p, Y^*} + |e(u_{E_2})|_{p, Y^*} \right)^{2-p} A \\ \geq C(p, Y) \left| \Phi'_p(e(u_{E_1})) - \Phi'_p(e(u_{E_2})) \right|_{p', Y^*}^2 & \text{si } 2 \leq p. \end{cases}$$

Utilisant (6.12), (6.6) si $2 \leq p < \infty$, (6.10) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans (6.9) on déduit :

$$(6.14) \quad \begin{cases} |a(E_1) - a(E_2)| \leq C(p, Y^*) |E_1 - E_2|^{p-1} & \text{si } 1 < p \leq 2 \\ |a(E_1) - a(E_2)| \leq C(p, Y^*) |E_1 - E_2| (|E_1| + |E_2|)^{p-2} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

5^e étape ϕ_p^{hom} étant une fonction convexe continue sur $\mathbb{R}_S^{N^2}$, $a(E)$ étant un sous-gradient en tout point E de $\mathbb{R}_S^{N^2}$ et a étant continu de $\mathbb{R}_S^{N^2}$ dans $\mathbb{R}_S^{N^2}$, un résultat d'analyse convexe (cf [14] p 114) montre que ϕ_p^{hom} est Fréchet-différentiable et que sa différentielle est a

Ce qui achève la preuve de la proposition 5 1

7. LE RESULTAT D'HOMOGENEISATION

THEOREME 7 1 *Pour tout f de $L^p(\Omega)^N$ si ε tend vers zéro en restant dans Λ alors $(P^\varepsilon v_\varepsilon, Q^\varepsilon \sigma_\varepsilon)$ converge faiblement dans $V \times L^p(\Omega)^N$ vers l'unique élément (v_0, σ_0) de $V \times L^p(\Omega)^N$ vérifiant*

$$(7\ 1) \quad \sigma_0 = \phi_p^{\text{hom}}(e(v_0)), \text{div } \sigma_0 + (1 - \theta) f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

La preuve de ce theoreme se fait selon la technique des fonctions test de [16]

Construction de fonctions test

Soit E arbitraire dans $\mathbb{R}_S^{N^2}$, on prolonge (v_E, σ_E) a tout Y en $(\tilde{v}_E, \tilde{\sigma}_E)$ de manière que $\tilde{\sigma}_E = 0$ dans T et $\tilde{v}_E \in W^{1,p}(Y)^N$ ce qui est possible d'après le lemme 4 6 On étend ensuite à tout \mathbb{R}^N $(\tilde{v}_E, \tilde{\sigma}_E)$ par Y -périodicité en des champs encore notés $(\tilde{v}_E, \tilde{\sigma}_E)$ Pour tout ε de Λ on définit $(v_E^\varepsilon, \sigma_E^\varepsilon)$ par

$$\begin{aligned} v_E^\varepsilon(x) &= E \cdot x + \varepsilon \tilde{v}_E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{pp } x \in \Omega \\ \sigma_E^\varepsilon(x) &= \tilde{\sigma}_E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{pp } x \in \Omega \end{aligned}$$

LEMME 7 1

- (i) $(v_E^\varepsilon, \sigma_E^\varepsilon)$ converge faiblement vers $(E \cdot x, \phi_p^{\text{hom}}(E))$ dans $W^{1,p}(\Omega)^N \times L^p(\Omega)$
- (ii) $\text{div } \sigma_E^\varepsilon = 0$ dans Ω

Preuve On a

$$e(v_E^\varepsilon)(x) = E + e(\tilde{v}_E)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{pp } x \in \Omega$$

$\tilde{\sigma}_E$ et $e(\tilde{v}_E)$ sont des fonctions Y -périodiques de moyenne sur Y égales respectivement a $\phi_p^{\text{hom}}(E)$ d'après (6 3) et à zéro puisque $v_E \in W$ Le point (i) découle alors d'un resultat classique ([15] p 308) sur les fonctions périodiques Evidemment $\int_Y \tilde{\sigma}_E \cdot e(\varphi) = 0$ pour tout φ de $W^{1,p}(Y)^N$ dont

les traces sont égales sur les faces opposées de ∂Y et (ii) résulte d'une extension triviale au cas $p \neq 2$ du lemme 1 p. 305 de [15].

Preuve du théorème : On a vu au paragraphe 5 qu'il existe une suite ε_n de Λ tendant vers zéro telle que $(P^{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}, Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n}, \text{div } Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n})$ converge faiblement vers $(v_0, \sigma_0, (1 - \theta) f)$ dans $V \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times L^{p'}(\Omega)^N$.

Soit η quelconque positive de $\mathcal{D}(\Omega)$, la monotonie de ϕ'_p implique :

$$0 \leq \eta(x) (\phi'_p(e(v_E^{\varepsilon_n})(x)) - \phi'_p(e(v_{\varepsilon_n})(x))) \cdot (e(v_E^{\varepsilon_n})(x) - e(v_{\varepsilon_n})(x)) \quad \text{pp } x \in \Omega_{\varepsilon_n}$$

$$= \eta(x) (\sigma_E^{\varepsilon_n}(x) - \sigma_{\varepsilon_n}(x)) \cdot (e(v_E^{\varepsilon_n})(x) - e(v_{\varepsilon_n})(x)) \quad \text{pp } x \in \Omega_{\varepsilon_n}$$

puisque $v_E^{\varepsilon_n}$ et v_{ε_n} sont à divergence nulle dans Ω_{ε_n} .

Ainsi

$$0 \leq \int_{\Omega} \eta \cdot (\sigma_E^{\varepsilon_n} - Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n}) \cdot (e(v_E^{\varepsilon_n}) - e(P^{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n})) \cdot$$

Vu le lemme 7.1, les champs $\tau_{\varepsilon_n} = \sigma_E^{\varepsilon_n} - Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n}$ et $u_{\varepsilon_n} = v_E^{\varepsilon_n} - P^{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}$ convergent faiblement respectivement vers $\tau_0 = \phi_p^{\text{hom}'}(E) - \sigma_0$ et $u_0 = E \cdot x - v_0$ dans respectivement $\mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)^N$; en outre $\text{div } \tau_{\varepsilon_n}$ égal à $R^{\varepsilon_n} f$ converge faiblement vers $(1 - \theta) f$ dans $L^{p'}(\Omega)^N$. D'un résultat élémentaire de compacité par compensation [10], on déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \eta \tau_{\varepsilon_n} \cdot e(u_{\varepsilon_n}) = \int_{\Omega} \eta \tau_0 \cdot e(u_0)$$

donc :

$$(\phi_p^{\text{hom}'}(E) - \sigma_0(x)) \cdot (E - e(v_0)(x)) \geq 0 \quad \text{pp } x \in \Omega \quad \forall E \in \mathbb{R}_S^{N^2}$$

la continuité de $\phi_p^{\text{hom}'}$ entraîne alors :

$$\sigma_0(x) = \phi_p^{\text{hom}'}(e(v_0)(x)) \quad \text{pp } x \in \Omega.$$

Enfin vu les propriétés de continuité et d'ellipticité (6.11) et (6.14) de $\phi_p^{\text{hom}'}$ qui permettent de lui appliquer le lemme 4.2 (1), il existe un seul élément de $V \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ vérifiant (7.1). Comme le raisonnement plus haut montre que pour toute suite ε_n de Λ tendant vers zéro toute valeur d'adhérence faible dans $V \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega)$ de $(P^{\varepsilon_n} v_{\varepsilon_n}, Q^{\varepsilon_n} \sigma_{\varepsilon_n})$ vérifie (7.1) le théorème est complètement démontré.

(1) Avec des constantes α, β dépendant de p et Y^* .

8. COMMENTAIRES

Du point de vue mécanique, le comportement macroscopique du milieu poreux apparaît comme celui d'un milieu viscoplastique de potentiel de dissipation convexe et régulier égal à ϕ_p^{hom} . D'après la proposition 6.1, il est à noter que la structure des inégalités d'ellipticité et de continuité vérifiées par la différentielle de ϕ_p^{hom} est la même que celle de la différentielle du potentiel microscopique de Norton. Dans [7] sont étudiées l'homogénéisation et la structure des inégalités vérifiées par l'opérateur homogénéisé pour une équation scalaire dans un domaine non troué avec une classe d'opérateurs non linéaires contenant la différentielle de ψ_p .

Il est remarquable que la condition d'incompressibilité imposée à v_ε n'apparaît plus sur le champ limite v_0 ainsi le comportement macroscopique est celui d'un milieu a priori compressible ([4] p. 38).

Il est à noter aussi que le comportement homogénéisé ne dépend pas de l'opérateur de prolongement P^ε qui n'est qu'un artifice technique pour travailler sur un espace fonctionnel fixe, tout autre opérateur de prolongement vérifiant le lemme 4.3 eut pu être employé. Dans le même ordre d'idée en considérant une répartition de trous non nécessairement périodique dépendant d'un paramètre ε telle qu'il existe un opérateur de prolongement P^ε vérifiant le lemme 4.3 et que $|\Omega - \Omega_\varepsilon|$ soit uniformément minoré sur Λ par une constante positive, on pourrait en utilisant le schéma de démonstration [8] calqué sur le schéma général d'homogénéisation non nécessairement périodique ([16], [11]) montrer que la loi de comportement homogénéisée est locale.

RÉFÉRENCES

- [1] H. ATTOUCH et F. MURAT, *Homogenization of fissured elastic materials*, Publications AVAMAC n° 85-03, Université de Perpignan, 1985.
- [2] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [3] D. CIORANESCU et J. SAINT JEAN PAULIN, *Homogenization in Open Sets with Holes*, J. Math. Anal. and Appl., vol. 71, 1979, pp. 590-600.
- [4] C. CONCA, *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics*, J. Math. pures et appl., 64, 1985, pp. 31-75.
- [5] G. DUVAUT, *Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement*, Lecture Notes in Mathématiques, n° 594, Springer Verlag, Berlin, 1977, pp. 131-145.

- [6] R. GLOWINSKI, A. MARROCO, *Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un, et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*, RAIRO, R2, 1975, pp. 41-76.
- [7] N. FUSCO, G. MOSCARIELLO, *On the homogenization of quasilinear divergence structure operators*, Preprint n° 55, Univ. Naples, 1984.
- [8] C. LICHT, *Homogénéisation d'un milieu incompressible viscoplastique de type Norton-Hoff périodiquement perforé*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 302, Série I, n° 1, 1986, pp. 51-53.
- [9] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.
- [10] F. MURAT, *Compacité par compensation*, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, 5, 1978, pp. 489-507.
- [11] F. MURAT et L. TARTAR, *Calcul des variations et homogénéisation*, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, Eyrolles, Paris, 1984, Cours de l'École d'Été CEA-EDF-INRIA sur l'homogénéisation, à paraître.
- [12] J. NECAS, *Sur les normes équivalentes dans $W_p^{(k)}(\Omega)$ et sur la coercivité des formes formellement positives*. Équations aux dérivées partielles, Séminaire de Mathématiques Supérieures ; Montréal 1966.
- [13] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Paris, 1967.
- [14] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non homogeneous media and vibration theory*, Lectures Notes in Physics, vol. 127, Springer, Berlin, 1980.
- [15] P. SUQUET, *Plasticité et Homogénéisation*, Thèse d'État, Paris, 1982.
- [16] L. TARTAR, *Problèmes d'homogénéisation dans les équations aux dérivées partielles*, Cours Peccot, Collège de France, 1977.
- [17] L. TARTAR, *Topics in Nonlinear Analysis*, Publications Mathématiques d'Orsay, # 78.13, 1978.

UNIVERSITE PAUL SABATIER
LABORATOIRE
DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX