

A. BERMÚDEZ

J. DURANY

**La méthode des caractéristiques pour les problèmes
de convection-diffusion stationnaires**

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 1 (1987), p. 7-26

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_1_7_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES POUR LES PROBLÈMES DE CONVECTION-DIFFUSION STATIONNAIRES (*)

A. BERMÚDEZ ⁽¹⁾ et J. DURANY ⁽¹⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — Dans cet article on adapte la méthode des caractéristiques à la résolution de problèmes de convection-diffusion stationnaires.

On obtient une estimation d'erreur pour le cas où la variable d'état est approchée par éléments finis d'ordre un et la vitesse par des fonctions constantes par morceaux.

On montre la convergence d'un algorithme itératif pour la résolution du problème discrétisé où chaque itération conduit à un système linéaire à matrice constante et symétrique.

Le cas où le coefficient de diffusion est nul est aussi considéré.

Abstract. — In this paper the method of characteristics is adapted to solve steady-state convective-diffusive problems.

An error estimate is given when one approximates the unknown function by triangular finite elements of degree one and the velocity by piecewise constant functions.

Convergence of an iterative algorithm to solve the discretized problems is proved. Each iteration needs the solution of a linear system whose matrix is constant and symmetric.

The case where the diffusion coefficient is zero is also considered.

1. INTRODUCTION

Récemment la méthode des caractéristiques a été adaptée pour résoudre des problèmes de convection-diffusion ainsi que les équations de Navier-Stokes, en utilisant des éléments finis pour la discrétisation en espace (Benque, Ibler, Karaimsi, Labadie [1], Pironneau [4], Douglas-Russell [3], Bercovier-Pironneau-Sastri [2]).

(*) Reçu en janvier 1985.

(¹) Departamento de Matematica Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela, Espagne.

Dans ces articles les auteurs ont considéré des problèmes d'évolution. La méthode consiste à remplacer les termes $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho$ par la dérivée totale $\frac{D\rho}{Dt}$ et, ensuite, à discrétiser cette dérivée.

Ici nous allons reprendre ces idées et les adapter au cas stationnaire. On obtiendra une famille de schémas qui dépendent d'un paramètre k (le « pas de temps »), pour laquelle on démontrera une estimation d'erreur.

Dans le cas monodimensionnel et pour k suffisamment petit, on montre que ces schémas correspondent au schéma décentré classique.

De la même façon on établit la relation avec le schéma décentré de M. Tabata.

Finalement nous présentons quelques résultats numériques pour un problème de convection-diffusion en dimension deux d'espace.

2. LE PROBLÈME A RÉSOUDRE. DISCRÉTISATION EN TEMPS

Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^N , de frontière Γ régulière.

Soit donnée une application $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ (le champ de vitesses) telle que

$$u \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.2)$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma, \text{ avec } n \text{ vecteur unitaire normal à } \Gamma. \quad (2.3)$$

Soient finalement $f \in L^\infty(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$; on considère le problème :

$$\begin{cases} u \cdot \nabla y - v \Delta y = f & \text{dans } \Omega \\ y = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.4)$$

qui admet une solution unique $y \in H^1(\Omega)$.

En vue de transformer ce problème en un problème d'évolution on définit les fonctions \tilde{u} , \tilde{f} et \tilde{g} par

$$\begin{cases} \tilde{u}(x, t) = u(x) \\ \tilde{f}(x, t) = f(x) \\ \tilde{g}(x, t) = g(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

pour tout $t \in (0, T)$.

Alors il est évident que la fonction $\tilde{y}(x, t) = y(x)$ est la solution unique du

problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{y} - v \Delta \tilde{y} = f \quad \text{p.p. dans } (0, T) \\ \tilde{y}|_{\Gamma} = \tilde{g} \\ \tilde{y}(x, 0) = y(x) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Pour résoudre numériquement (2.6) on reprend les idées de [4]. La première équation (2.6) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\frac{D\tilde{y}}{Dt} - v \Delta \tilde{y} = f. \quad (2.7)$$

On note par $S(x, t; \tau)$ la solution unique du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = u(S) \\ S(x, t; t) = x \end{array} \right. \quad (2.8)$$

alors on a

$$\frac{D\tilde{y}}{Dt}(x, t) = \frac{d}{dt} \tilde{y}(S(x, t; \tau), \tau) \Big|_{\tau=t}$$

et il est raisonnable, pour discrétiser en temps, d'utiliser le schéma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}^{m+1}(x) - \tilde{y}^m(X^k(x))}{k} - v \Delta \tilde{y}^{m+1}(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega \\ \tilde{y}^{m+1} = g \quad \text{sur } \Gamma \\ \tilde{y}^0 = y \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où

$$X^k(x) = S(x, (m+1)k; mk), \quad \text{pour tout } m. \quad (2.10)$$

(Notons que le système différentiel (2.8) est autonome).

En principe on ne sait pas résoudre le problème (2.9) parce qu'on ne connaît pas la condition initiale $\tilde{y}^0 = y$. Or, comme la solution de (2.6) ne dépend pas du temps ($y(t) = y$, pour tout t), il semble raisonnable de modifier ce problème comme suit :

Trouver $y^k \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \frac{y^k(x) - y^k(X^k(x))}{k} - v \Delta y^k(x) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ y^k = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.11)$$

avec $X^k(x)$ défini par (2.10)

On va démontrer que ce problème admet une solution unique. Pour cela on commence par considérer la formulation variationnelle suivante

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(y^k, z) - \frac{1}{k}(y^k(X^k(\cdot)), z) + va(y^k, z) = (f, z) & \text{pour tout } z \in H_0^1(\Omega) \\ y^k \in H^1(\Omega), \quad y^k|_{\Gamma} = g \end{cases} \quad (2.12)$$

où (\cdot, \cdot) dénote le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et a est défini sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ comme suit

$$a(y, z) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx. \quad (2.13)$$

PROPOSITION 2.1 : *Le problème (2.12) a une solution unique.*

Démonstration : Soit T l'application de $L^2(\Omega)$ dans lui-même défini par $T(w) = y$ solution de

$$\frac{1}{k}(y, z) + va(y, z) = (f, z) + \frac{1}{k}(w(X^k(\cdot)), z). \quad (2.14)$$

Alors T est une contraction stricte. En effet, soient $y_i = T(w_i)$, avec $w_i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, on a

$$\frac{1}{k} \|y_1 - y_2\|_0^2 + va(y_1 - y_2, y_1 - y_2) \leq \frac{1}{k} \|w_1 - w_2\|_0 \|y_1 - y_2\|_0. \quad (2.15)$$

De (2.15) on déduit le résultat. Pour démontrer (2.15) on utilise l'inégalité de Poincaré et l'égalité

$$\int_{\Omega} G(X^k(x)) = \int_{\Omega} G(x) \, dx \quad (2.16)$$

qui est valable parce que la Jacobien de la transformation $x \rightarrow X^k(x)$ est égal à 1, u étant à divergence nulle.

La proposition ci-après donne une estimation de l'erreur.

PROPOSITION 2.2 : *Si y est solution de (2.4) avec (2.1)-(2.3) et y^k est solution de (2.12) on a :*

$$va(y - y^k, y - y^k)^{1/2} \leq C(y, u) k. \tag{2.17}$$

Démonstration : Tout d'abord on a

$$\begin{aligned} \tilde{y}(S(x, k; 0), 0) &= \tilde{y}(S(x, k; k), k) - k \frac{d}{d\tau} \tilde{y}(S(x, k; \tau), \tau) \Big|_{\tau=k} + \\ &+ \frac{k^2}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} \tilde{y}(S(x, k; \tau), \tau) \Big|_{\tau=\theta k}, \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \tag{2.18}$$

d'où

$$\begin{aligned} y(X^k(x)) &= y(x) - ku(x) \cdot \nabla y(x) + \frac{k^2}{2} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} (\eta^k(x)) u_i(\eta^k(x)) \times \right. \\ &\quad \left. \times u_j(\eta^k(x)) + \frac{\partial y}{\partial x_i} (\eta^k(x)) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\eta^k(x)) u_j(\eta^k(x)) \right\} \end{aligned} \tag{2.19}$$

avec $\eta^k(x) = S(x, k; \theta k)$.

On a, par conséquent

$$\frac{1}{k} (y, z) - \frac{1}{k} (y(X^k(\cdot)), z) + va(y, z) = (f, z) - \frac{k}{2} \langle E^k(\eta^k(\cdot)), z \rangle,$$

$$\text{pour tout } z \in H_0^1(\Omega) \tag{2.20}$$

avec

$$\langle E^k(\eta^k(\cdot)), z \rangle = \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i(\eta^k(x)) u_j(\eta^k(x)) \frac{\partial y}{\partial x_i} (\eta^k(x)) \frac{\partial z}{\partial x_j} (x) dx. \tag{2.21}$$

En retranchant (2.12) de (2.20) et en prenant $z = y - y^k$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |y - y^k|_0^2 + va(y - y^k, y - y^k) &= \\ &= \frac{1}{k} (y(X^k(\cdot)) - y^k(X^k(\cdot)), y - y^k) - \frac{k}{2} \langle E^k(\eta^k(\cdot)), y - y^k \rangle. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En utilisant (2.16) dans (2.22) on déduit le résultat.

Remarque 2.1 : Il est évident qu'on peut prendre d'autres formules pour discrétiser la dérivée totale $\frac{Dy}{Dt}$, ce qui pourrait augmenter l'ordre de la méthode. Par exemple, si on utilise un schéma du type Crank-Nicholson l'erreur serait d'ordre deux en k .

3. DISCRÉTISATION EN ESPACE PAR ÉLÉMENTS FINIS

Soit H_h un espace d'éléments finis constantes par morceaux sur une triangulation donnée et V_h l'espace d'éléments finis de Lagrange de degré un sur la même triangulation.

On définit V_{h0} par

$$V_{h0} = V_h \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.1)$$

Soient u_h et g_h des approximations données de u et g dans H_h et V_h respectivement.

Alors on définit le problème discrétisé en espace de la façon suivante :

Trouver $y_h^k \in V_h$ tel que

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(y_h^k, z_h) - \frac{1}{k}(y_h^k(X_h^k(\cdot)), z_h) + \text{va}(y_h^k, z_h) = \\ = (f, z_h) \quad \text{pour tout } z_h \in V_{h0} \\ y_h^k = g_h \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$X_h^k(x) = S_h(x, (m+1)k; mk)$$

où S_h est défini par :

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{d\tau} = u_h(S_h) \\ S_h(x, (m+1)k; (m+1)k) = x. \end{cases} \quad (3.3)$$

PROPOSITION 3.1 : *Le problème (3.2), (3.3) admet une solution unique.*

Démonstration : Elle est analogue à celle de la Proposition 2.1.

La Proposition suivante donne une estimation d'erreur.

PROPOSITION 3.2 : *La méthode (3.2), (3.3) est d'ordre $h + \frac{h^2}{k} + k$ plus précisément, si $g \equiv 0$ on a :*

$$v | \nabla(y_h^k - y) |_0 \leq 0 \left(h + \frac{h^2}{k} + k \right). \tag{3.4}$$

Démonstration : Soit $\delta_h = y_h^k - y^k$; en retranchant (2.12) de (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (\delta_h, z_h) - \frac{1}{k} (y_h^k(X_h^k(\cdot)) - y^k(X_h^k(\cdot)), z_h) + va(\delta_h, z_h) = \\ = \frac{1}{k} (y^k(X_h^k(\cdot)) - y^k(X^k(\cdot)), z_h) \text{ pour tout } z_h \in V_{h0}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En prenant $z_h = \delta_h + y^k - w_h$ avec $w_h \in V_{h0}$ quelconque, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |\delta_h|_0^2 + \frac{1}{k} (\delta_h, y^k - w_h) - \frac{1}{k} (\delta_h(X_h^k(\cdot)), \delta_h) - \\ - \frac{1}{k} (\delta_h(X_h^k(\cdot)), y^k - w_h) + va(\delta_h, \delta_h) + va(\delta_h, y^k - w_h) = \\ = \frac{1}{k} (y^k(X_h^k(\cdot)) - y^k(X^k(\cdot)), \delta_h) \\ + \frac{1}{k} (y^k(X_h^k(\cdot)) - y^k(X^k(\cdot)), y^k - w_h) \end{aligned} \tag{3.6}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} va(\delta_h, \delta_h) \leq \frac{2}{k} |\delta_h|_0 |y^k - w_h|_0 + v | a(\delta_h, y^k - w_h) | + \\ + |\nabla y^k|_\infty |u - u_h|_\infty |y^k - w_h|_0 + |\nabla y^k|_\infty |\delta_h|_0 |u - u_h|_\infty \end{aligned} \tag{3.7}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} va(\delta_h, \delta_h) \leq \frac{2}{k} Ca(\delta_h, \delta_h)^{1/2} |y^k - w_h|_0 \\ + va(\delta_h, \delta_h)^{1/2} a(y^k - w_h, y^k - w_h)^{1/2} + |\nabla y^k|_\infty |u - u_h|_\infty |y^k - w_h|_0 \\ + |\nabla y^k|_\infty |u - u_h|_\infty Ca(\delta_h, \delta_h)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit $e_h = a(\delta_h, \delta_h)^{1/2}$, alors (3.8) s'écrit

$$ve_h^2 \leq \frac{2}{k} Ce_h |y^k - w_h|_0 + e_h va(y^k - w_h, y^k - w_h)^{1/2} + \\ + |\nabla y^k|_\infty |u - u_h|_\infty |y^k - w_h|_0 + |\nabla y^k|_\infty C |u - u_h|_\infty e_h \quad (3.9)$$

ce qui entraîne

$$ve_h \leq c_1 \frac{h^2}{k} + c_2 h. \quad (3.10)$$

L'inégalité (3.4) est alors une conséquence de (3.10) et de (2.17).

Remarque 3.1 : Il est possible que l'on puisse remplacer $\frac{h^2}{k}$ par $\min \left\{ \frac{h^2}{k}, h \right\}$ en utilisant les techniques de [3].

Remarque 3.2 : En général on ne peut pas obtenir une estimation de l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ qui soit indépendante de v . En effet, revenons à l'estimation de l'erreur $y - y^k$. De (2.12) et (2.20) on déduit

$$(u \cdot \nabla(y - y^k), z) + va(y - y^k, z) = -\frac{k}{2} \langle E^k(\eta^k(\cdot)), z \rangle + \\ + \frac{k}{2} \sum_{i,j} \int_{\Omega} u_i(\rho^k(x)) u_j(\rho^k(x)) \frac{\partial y^k}{\partial x_i}(\rho^k(x)) \frac{\partial z}{\partial x_j}(x) dx \\ \text{pour tout } z \in H_0^1(\Omega). \quad (3.11)$$

Le problème consiste donc à obtenir une estimation $L^2(\Omega)$ pour la solution du problème

$$\begin{cases} (u \cdot \nabla e, z) + va(e, z) = (g, z), & \text{pour tout } z \in H_0^1(\Omega) \\ e \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

qui soit indépendante de v .

Or en général, ceci n'est pas possible, comme le montre l'exemple ci-après :

$$\begin{cases} \Omega = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \\ u(x_1, x_2) = (x_2, -x_1) \\ g(x_1, x_2) = 4. \end{cases} \quad (3.13)$$

Soit $v_n = \frac{1}{n}$, alors $y(x_1, x_2) = n(1 - x_1^2 - x_2^2)$ est la solution du problème (3.12) pour $v = v_n$ (notons que $u \cdot \nabla y_n = 0$ sur Ω), et il est évident que $|e_n|_0 \uparrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$.

Cependant on peut traiter le cas avec $v = 0$ si on fait sur le champ de vitesses l'hypothèse suivante :

Pour tout $x \in \Omega$ il existe un « temps » t_x tel que

$$S(x, t_x; 0) \in \Gamma^- \tag{3.14}$$

avec

$$\Gamma^- = \{ x \in \Gamma : u(x) \cdot n(x) < 0 \} . \tag{3.15}$$

En effet, dans ce cas l'erreur est solution d'une équation du type :

$$\begin{cases} u \cdot \nabla e = \varphi \\ e|_{\Gamma^-} = \psi \end{cases} \tag{3.16}$$

par conséquent on a :

$$e(x) = \psi(S(x, t_x; 0)) + \int_0^{t_x} \varphi(S(x, t_x; \tau)) d\tau . \tag{3.17}$$

~~En supposant $\psi \in L^\infty(\Gamma^-)$, $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ et $t_x \leq M$ pour tout x on obtient~~

$$|e|_\infty \leq |\psi|_\infty + M |\varphi|_\infty . \tag{3.18}$$

4. RÉOLUTION DU PROBLÈME DISCRET

Soit w_{hi} $i = 1, \dots, N_h$ la base de l'espace V_h défini par

$$w_{hi}(b_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N_h \tag{4.1}$$

où les b_j , ($j = 1, \dots, N_h$), représentent les sommets de la triangulation.

On a alors,

$$y_h^k = \sum_{i=1}^{N_h} \xi_{hi} w_{hi} \tag{4.2}$$

et, par conséquent le second terme dans (3.2) peut s'écrire sous la forme :

$$(y_h^k(X_h^k(\cdot)), z_h) = \sum_{i=1}^{N_h} \xi_{hi}(w_{hi}(X_h^k(\cdot)), z_h). \quad (4.3)$$

La contribution de ce terme à la matrice du système est donnée par

$$a_{ij}^{(2)} = (w_{hj}(X_h^k(\cdot)), w_{hi}). \quad (4.4)$$

Le calcul de $a_{ij}^{(2)}$ se fait normalement par intégration numérique et pour cela il faut résoudre préalablement l'équation différentielle (3.3), en prenant comme valeurs initiales les nœuds des formules de quadrature.

La méthode décrite conduit à un système linéaire non symétrique pour les ξ_{hi} , la matrice $(a_{ij}^{(2)})$ ne l'étant pas, ce qui rend plus difficile sa résolution.

Pour éviter ce problème on peut utiliser une autre méthode que l'on va décrire par la suite.

Il s'agit de l'algorithme itératif suivant :

On prend $y_h^{k,0} \in V_h$, avec $y_h^{k,0}|_{\Gamma} = g_h$ quelconque.

Étape $n + 1$: Étant donné $y_h^{k,n}$ on détermine $y_h^{k,n+1}$ solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(y_h^{k,n+1}, z_h) + \text{va}(y_h^{k,n+1}, z_h) = (f, z_h) + \frac{1}{k}(y_h^{k,n}(X_h^1(\cdot)), z_h) \\ y_h^{k,n+1} = g_h \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{pour tout } z_h \in V_{h0}. \end{cases} \quad (4.5)$$

PROPOSITION 4.1 : La suite $\{y_h^{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y_h^k solution de (3.2), fortement dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration : En retranchant (4.5) de (3.2) et en prenant ensuite $z_h = y_h^k - y_h^{k,n+1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |y_h^k - y_h^{k,n+1}|_0^2 + \text{va}(y_h^k - y_h^{k,n+1}, y_h^k - y_h^{k,n+1}) = \\ = \frac{1}{k} (y_h^k(X^1(\cdot)) - y_h^{k,n}, y_h^k(X^1(\cdot)) - y_h^{k,n+1}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

d'où

$$\frac{1}{2k} |y_h^k - y_h^{k,n+1}|_0^2 + \nu |\nabla(y_h^k - y_h^{k,n+1})|_0^2 \leq \frac{1}{2k} |y_h^k - y_h^{k,n}|_0^2. \quad (4.7)$$

Par conséquent la suite

$$\{ \|y_h^k - y_h^{k,n+1}\|_0^2 \}$$

est monotone, décroissante donc convergente.

En passant à la limite dans (4.7) on déduit le résultat.

Remarque 4.1 : De la proposition 2.1 on déduit que l'application qui à $y_h^{k,n}$ fait correspondre $y_h^{k,n+1}$ est une contraction stricte dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, il est facile de voir que la constante de contraction tend vers 1 si k ou v tendent vers zéro, ce qui va entraîner une convergence très lente de l'algorithme pour k ou v petit.

5. LE CAS MONODIMENSIONNEL

On considère le problème

$$\begin{cases} -v \frac{d^2 y}{dx^2} + u \frac{dy}{dx} = f & \text{dans } [0, 1] \\ y(0) = a \\ y(1) = b. \end{cases} \quad (5.1)$$

On va prendre u constante positive pour simplifier l'exposé et comme espace V_h celui des fonctions continues et linéaires par morceaux sur une partition ~~uniforme de l'intervalle $[0, 1]$.~~

Voici dans ce cas le problème discrétisé :

$$\begin{cases} \frac{1}{k} \int_0^1 y_h^k z_h - \frac{1}{k} \int_0^1 y_h^k(X_h^k(\cdot)) z_h + v \int_0^1 \frac{dy_h^k}{dx} \frac{dz_h}{dx} = \int_0^1 f z_h \\ y_h^k(0) = a, \quad y_h^k(1) = b \quad \text{pour tout } z_h \in V_{h0}. \end{cases} \quad (5.2)$$

avec $X_h^k(x) = S_h(x, k; 0)$ et S_h solution de

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{d\tau} = u(S_h) \\ S_h(x, k; k) = x. \end{cases} \quad (5.3)$$

On a donc $X_h^k(x) = x - uk$.

En utilisant la formule du trapèze sur chaque intervalle pour calculer les

intégrales dans (5.2), et en prenant k tel que

$$uk \leq k \quad (5.4)$$

on obtient

$$\frac{1}{k} y_{h,i}^k h - \frac{1}{k} \left[y_{h,i-1}^k + \frac{y_{h,i}^k - y_{h,i-1}^k}{h} (h - uk) \right] h - \frac{y_{h,i-1}^k - 2y_{h,i}^k + y_{h,i+1}^k}{h} = f_i h \quad (5.5)$$

ce qui donne, après simplifications, le schéma décentré classique

$$u \frac{y_{h,i}^k - y_{h,i-1}^k}{h} - \frac{y_{h,i-1}^k - 2y_{h,i}^k + y_{h,i+1}^k}{h^2} = f_i.$$

6. RELATION AVEC LE SCHÉMA DÉCENTRÉ DE M. TABATA

On peut montrer que si k est suffisamment petit la méthode (3.2), (3.3) est très voisine de celle de M. Tabata [5].

Rappelons le schéma de Tabata. On considère la formulation classique de Galerkin du problème de départ (2.4) et on la discrétise par éléments finis en utilisant l'espace V_h du paragraphe 3. On obtient le système linéaire :

$$(u \cdot \nabla y_h, w_{h_i}) + a(u_h, w_{h_i}) = (f, w_{h_i}), \quad i = 1, \dots, N_h. \quad (6.1)$$

La méthode de Tabata consiste à approcher le premier terme de la façon suivante :

On commence par utiliser la formule de quadrature correspondant aux trois sommets sur chaque élément, ce qui donne

$$(u \cdot \nabla y_h, w_{h_i}) \cong \frac{S_i}{3} u(b_i) \cdot \nabla y_h(b_i) \quad (6.2)$$

où S_i représente l'aire des triangles ayant b_i comme sommet.

Ensuite en considérant l'égalité

$$u(b_i) \cdot \nabla y_h(b_i) = \frac{\partial y_h}{\partial u}(b_i) \quad (6.3)$$

on « décentre » l'approximation (6.2) en la remplaçant par

$$\frac{S_i}{3} |u(b_i)| \frac{y_h(b_i) - y_h(\tilde{b}_i)}{|b_i - \tilde{b}_i|}. \quad (6.4)$$

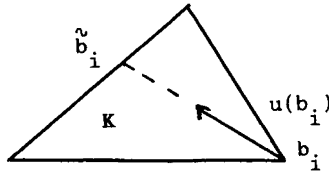


Figure 1.

Écrivons maintenant la contribution des deux premiers termes du schéma (3.2) quand on utilise la formule de quadrature correspondant aux sommets sur chaque triangle. On a

$$\frac{1}{k} (y_h^k, w_{hi}) - \frac{1}{k} (y_h^k(X^k(\cdot)), w_{hi}) = \frac{S_i}{3k} [y_h^k(b_i) - y_h^k(X_h^k(b_i))]. \quad (6.5)$$

Or, si \$u_h|_K\$ était choisi égal à \$u(b_i)\$ et \$k\$ tel que

$$k < \frac{|b_i - \tilde{b}_i|}{|u(b_i)|}, \quad (6.6)$$

alors \$X_h^k(b_i)\$ serait placé sur le segment \$|\tilde{b}_i, b_i|\$ qui est inclus dans \$K\$ et, puisque \$y_h^k\$ est de degré un sur \$K\$, on aurait

$$\frac{y_h^k(b_i) - y_h^k(X_h^k(b_i))}{k} = |u(b_i)| \frac{y_h^k(b_i) - y_h^k(\tilde{b}_i)}{|b_i - \tilde{b}_i|} \quad (6.7)$$

et par conséquent l'égalité de (6.4) et (6.5).

Remarque 6.1 : Il faut noter que l'avantage de la méthode décrite dans ce papier est de pouvoir prendre

$$k > \frac{|b_i - \tilde{b}_i|}{|u(b_i)|},$$

au lieu de (6.6), pour transporter l'information d'un triangle dans un autre sans diffuser trop.

7. EXEMPLE NUMÉRIQUE EN DIMENSION DEUX

Nous avons utilisé la méthode décrite dans le paragraphe 4 pour résoudre le problème (2.1)-(2.4) dans le carré unité de \mathbb{R}^2 .

Le maillage du domaine est composé de 800 triangles de la même taille, le nombre de sommets étant 441. Ainsi, on obtient le pas de discrétisation h égal à 0,05.

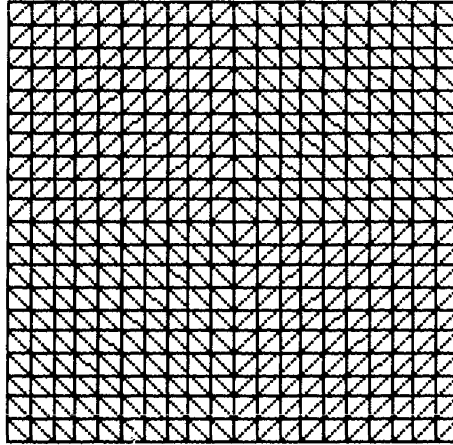


Figure 2. — Maillage du domaine.

Le second membre « f » est choisi de telle manière que la solution exacte « y » soit connue et définie par

$$y(x_1, x_2) = 100 x_1^2(1 - x_1)^2 + 100 x_2^2(1 - x_2)^2, \quad (7.1)$$

le champ de vitesses étant donné par

$$\begin{aligned} u &\equiv (u_1, u_2) \\ \begin{cases} u_1(x_1, x_2) = 2\,000 x_1^2(1 - x_1)^2 x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2) \\ u_2(x_1, x_2) = -2\,000 x_2^2(1 - x_2)^2 x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1). \end{cases} \end{aligned} \quad (7.2)$$

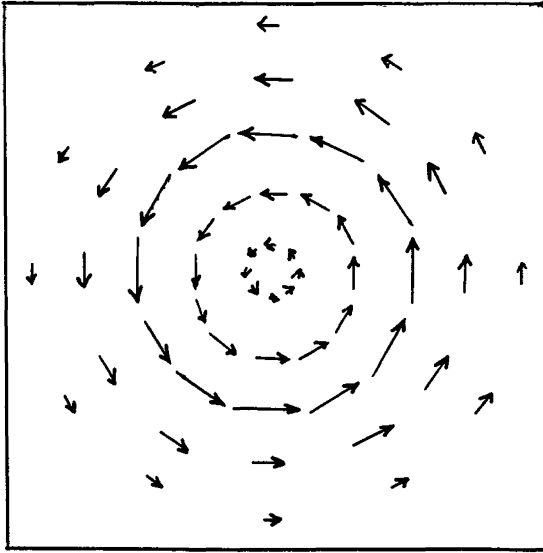


Figure 3. — Champ de vitesses.

D'autre part, on a pris $v = 1$ et $g = y|_{\Gamma}$.

Pour résoudre le problème discrétisé (3.2) on a utilisé l'algorithme (4.5) avec un test d'arrêt du type « erreur absolue » inférieure à 10^{-5} .

Le tableau 1 montre les erreurs obtenues pour différentes valeurs du paramètre k .

8. UN EXEMPLE AVEC $v = 0$

Dans ce cas, le problème discrétisé s'écrit

$$\begin{cases} \frac{1}{k}(y_h^k, z_h) - \frac{1}{k}(y_h^k(X^k(\cdot)), z_h) = (f, z_h), & \text{pour tout } z_h \in V_h \text{ nul sur } \Gamma^- \\ y_h^k = g_h & \text{sur } \Gamma^- . \end{cases} \quad (8.1)$$

Si on utilise sur chaque triangle la formule d'intégration numérique ayant comme nœuds les sommets, ce problème équivaut à

$$\begin{cases} y_h^k(b_i) - y_h^k(X^k(b_i)) = kf(b_i), & \text{pour tout sommet } b_i \text{ n'appartenant pas à } \Gamma^- \\ y_h^k(b_i) = g_h(b_i), & \text{pour tout sommet } b_i \text{ appartenant à } \Gamma^- \end{cases} \quad (8.2)$$

TABLEAU 1
Erreurs obtenues pour différentes valeurs du k .

Solution exacte	(x_1, x_2)	k 50	5	1	0.1	0.05
0.	(0, 1)	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}
1.62	(0.1, 0.9)	0.14×10^{-2}	0.14×10^{-2}	0.12×10^{-2}	0.81×10^{-3}	0.32×10^{-2}
5.12	(0.2, 0.8)	0.56×10^{-2}	0.56×10^{-2}	0.59×10^{-2}	0.83×10^{-2}	0.11×10^{-1}
8.82	(0.3, 0.7)	0.94×10^{-2}	0.90×10^{-2}	0.10×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.32×10^{-1}
11.52	(0.4, 0.6)	0.36×10^{-2}	0.38×10^{-2}	0.52×10^{-2}	0.21×10^{-1}	0.39×10^{-1}
12.5	(0.5, 0.5)	0.62×10^{-1}	0.61×10^{-1}	0.59×10^{-1}	0.42×10^{-1}	0.22×10^{-1}
11.52	(0.6, 0.6)	0.36×10^{-2}	0.38×10^{-2}	0.52×10^{-2}	0.21×10^{-1}	0.39×10^{-1}
8.82	(0.7, 0.7)	0.94×10^{-2}	0.95×10^{-2}	0.10×10^{-1}	0.20×10^{-1}	0.32×10^{-1}
5.12	(0.8, 0.8)	0.56×10^{-2}	0.56×10^{-2}	0.56×10^{-2}	0.83×10^{-2}	0.11×10^{-1}
1.62	(0.9, 0.9)	0.14×10^{-2}	0.14×10^{-2}	0.12×10^{-2}	0.86×10^{-3}	0.32×10^{-2}
0.	(1, 1)	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}	10^{-30}
Nombre d'iterations		4	5	6	14	21

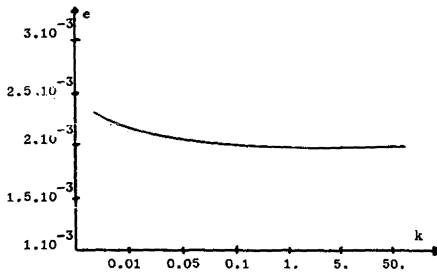


Figure 4. — Erreur quadratique.

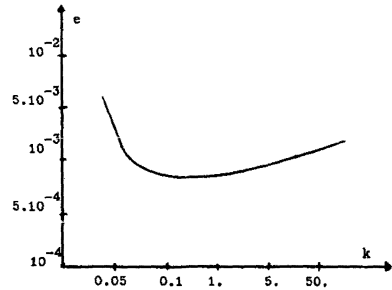


Figure 5. — Erreur absolue au point (0,1, 0,9).

L'algorithme itératif (4.5) devient

$$\begin{cases} y_h^{k,n+1}(b_i) = y_h^{k,n}(X^k(b_i)) + kf(b_i), & b_i \notin \Gamma^- \\ y_h^{k,n+1}(b_i) = g_h(b_i), & b_i \in \Gamma^- \end{cases} \quad (8.3)$$

On va utiliser cette méthode pour résoudre l'exemple test qui suit :

On considère $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Soit u le champ de vitesses donné par

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = -100 x_2 \\ u_2(x_1, x_2) = 100 x_1 \end{cases} \quad (8.4)$$

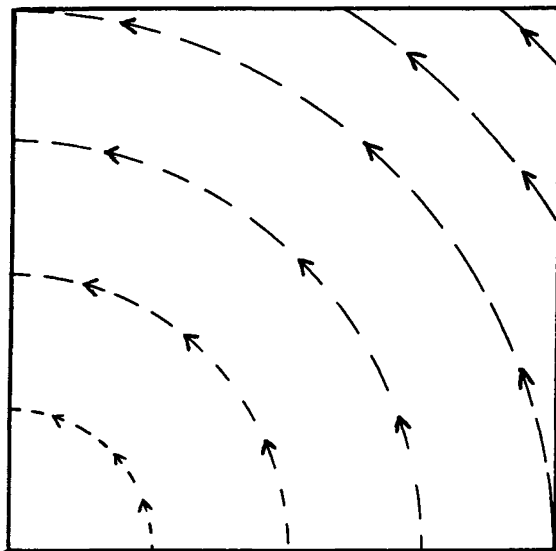


Figure 6. — Champ de vitesses.

Alors on a :

$$\Gamma^- = \{(x_1, 0) : 0 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq 1\}. \quad (8.5)$$

Soient

$$f(x_1, x_2) = Cx_1 x_2, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \quad (8.6)$$

et

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 10x_1 & \text{si } x_2 = 0 \\ 10 - 10x_2 & \text{si } x_1 = 1. \end{cases} \quad (8.7)$$

Alors la solution exacte du problème

$$\begin{cases} u \cdot \nabla y = f \\ y|_{\Gamma^-} = g \end{cases}$$

est donnée par

$$y(x_1, x_2) = \begin{cases} 10 x_1 + C \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}{400} (1 - \cos(2\theta)) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ 10 - 10 x_2 + C \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}{400} (\cos(2\alpha) - \cos(2\theta)) & \text{si } x_1^2 + x_2^2 > 1 \end{cases}$$

avec

$$\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \quad \alpha = \arctan\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}\right).$$

Le tableau 2 montre les erreurs obtenues en prenant $C = 500$ et un maillage triangulaire régulier avec 441 degrés de liberté.

On donne aussi le nombre d'itérations de l'algorithme pour le test d'arrêt suivant

$$|y_h^{k,n+1}(b_i) - y_h^{k,n}(b_i)| < 10^{-4}.$$

Pour $k = 0.0001$ on observe que pour chaque sommet b_i le point $X^k(b_i)$ appartient à l'intérieur du triangle (voir *fig. 1*). Si on prend

$$k = \frac{|b_i - \tilde{b}_i|}{|u|_K}$$

alors $x^k(b_i) = \tilde{b}_i$ et le problème discrétisé reste le même (voir § 6) mais, cependant, le nombre d'itérations diminue de façon considérable, comme le montre la dernière colonne du tableau 2.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
LABORATOIRE
STATISTIQUE ET PROBABILITÉS
78, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX

TABLEAU 2
Erreurs obtenues pour différentes valeurs du k

Solution exacte	(x_1, x_2)	k				
		0.1	0.01	0.001	0.0001	
12.50	(0. , 1.)	2.50	2.46	2.04	2.50	2.50
10.89	(0.1 , 0.9)	1.186	0.635	0.029	0.461	0.461
9.566	(0.2 , 0.8)	0.271	0.194	0.261	0.141	0.141
8.549	(0.3 , 0.7)	0.277	0.185	0.291	0.239	0.239
7.860	(0.4 , 0.6)	0.513	0.513	0.265	0.223	0.223
7.513	(0.5 , 0.5)	0.532	0.532	0.207	0.166	0.166
7.50	(0.6 , 0.4)	0.404	0.404	0.136	0.096	0.096
7.787	(0.7 , 0.3)	0.241	0.241	0.079	0.045	0.045
8.329	(0.8 , 0.2)	0.100	0.100	0.037	0.016	0.016
9.078	(0.9 , 0.1)	0.017	0.017	0.015	0.004	0.004
10.00	(1. , 0)	0.	0.	0.	0.	0.
Nombre d'iterations		2	20	152	844	34

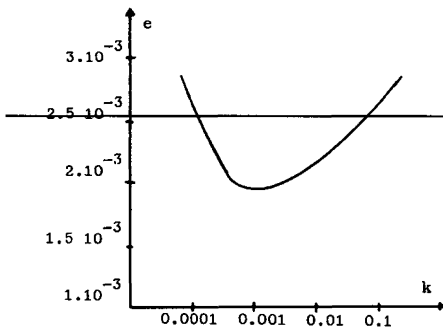


Figure 7. — Erreur quadratique.

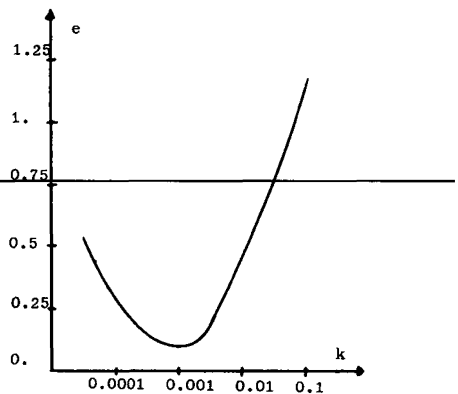


Figure 8. — Erreur absolue au point (0,1, 0,9)

Remerciements : Les auteurs remercient M. O. Pironneau pour ses intéressants conseils et orientations.

Ce travail a été financé, en partie, par la C.A.I.C.Y.T., projet n° 1800-82.

Les auteurs remercient également le support de l'ambassade de France en Espagne.

REFERENCES

- [1] J. BENQUE, B. IBLER, A. KARAIMSI et G. LABADIE, *A finite element method for Navier-Stokes equations*. Proc. 3rd. Int. Conf. Finite Elements in Flow Problems. Canada (1980).
- [2] M. BERCOVIER, O. PIRONNEAU et V. SASTRI, *Finite elements and characteristics for some parabolic-hiperbolic problems*. Appl. Math. Modelling, Vol. 7, pp. 89-92 (1983).
- [3] J. DOUGLAS et T. RUSSELL, *Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference*. SIAM J. on Numerical Analysis. Vol. 19, n° 5, p. 871 (1982).
- [4] O. PIRONNEAU, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*. Num. Math. Vol. 38, p. 309 (1982).
- [5] M. TABATA, *A finite element approximation corresponding to the upwind differencing*. Memoirs of Numerical Mathematics. 1, pp. 47-63 (1977).