

MOHAMED EL HATRI

**Estimation d'erreur optimale et de type
superconvergence de la méthode des éléments
finis pour un problème aux limites, dégénéré**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modéli-
sation mathématique et analyse numérique, tome 21, n° 1 (1987),
p. 27-61*

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1987__21_1_27_0

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



**ESTIMATION D'ERREUR OPTIMALE
 ET DE TYPE SUPERCONVERGENCE
 DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS
 POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES, DÉGÉNÉRÉ (*)**

Mohamed EL HATRI (1)

Communique par P G CIARLET

Résumé — Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude de l'erreur de la méthode des éléments finis avec intégration numérique pour un problème aux limites elliptique bidimensionnel dégénéré

La solution approchée de ce problème est obtenue en utilisant des éléments finis triangulaires linéaires et quadratiques. On obtient une estimation d'erreur optimale dans W_2^1 -norme avec poids, d'ordre $O(h^k)$, $k = 1, 2$. Aux milieux des côtes des éléments linéaires, on a une estimation d'erreur de type superconvergence de gradient dans la norme discrète avec poids de L_2 , d'ordre $O(h^2 | \ln h |)$

Abstract — In this work, we analyse the error of finite elements methods for a degenerated two-dimensional elliptic boundary value problem

Using the linear and quadratic triangular finite element with numerical integration, we obtain an optimal error estimate in weighted W_2^1 -norm of order $O(h^k)$, $k = 1, 2$. At the midpoints of sides of linear finite element, we have superconvergence of gradient of order $O(h^2 | \ln h |)$, in discret weighted L_2 -norm

INTRODUCTION

Dans la théorie de la méthode des éléments finis [MEF], l'estimation de l'erreur constitue le moment le plus important.

On constate deux types d'estimation d'erreur :

a) *Estimation optimale* :

$$\| u - u_h \|_X = O(h^{k-s}), \quad k - s, \quad k, s = 0, 1, \dots \quad (A)$$

où X^s est un espace de Banach muni de la norme $\| \cdot \|_{X^s}$, u est solution exacte,

(*) Reçu en novembre 1983, révisé en juin 1985

(1) Bulg. Acad. of Sci. Inst. of Math. Depart. of Mathematical modeling Il G. Bončev Bl. 8 1113 Sofia Bulgarian.

Université Sidi Mohamed Ben Abdallah, Ecole Supérieure de Technologie, route d'Immouzer, B.P. 2427, Fes, Maroc

u_h -solution approchée dont la restriction sur chaque élément fini est un polynôme de degré $k - 1$, h -grandeur caractérisant la discrétisation du domaine de définition. Ici la solution u appartient à l'espace de Banach X^k , où $X^k \hookrightarrow X^s$ [avec le symbole « \hookrightarrow » on note l'injection continue].

b) *Estimation de type superconvergence :*

$$\| u - u_h \|_{h,s} = O(h^{k-s+\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0 \quad (\text{B})$$

$$\| u - \tilde{u}_h \|_{X^s} = O(h^{k-s+\nu}), \quad \nu > 0 \quad (\text{B}')$$

où $\| \cdot \|_{h,s}$ est une norme discrète, analogue de la norme $\| \cdot \|_X$, \tilde{u}_h est une moyennisation de la solution approchée u_h . Ici la solution u appartient à l'espace $X^{k+1(\varepsilon)}$ dans le cas (B) et à l'espace $X^{k+1(\nu)}$ dans le cas (B'), $l(\varepsilon)$ et $l(\nu)$ appartiennent à N et dépendent respectivement de ε et de ν . La norme discrète $\| \cdot \|_{h,s}$ est définie dans des points appelés points de superconvergence. En pratique les espaces X^s sont de type de Sobolev, mais ils peuvent être et d'autres espaces fonctionnels.

Pour les équations elliptiques non dégénérées de 2^e ordre, la théorie de l'estimation de l'erreur de type (A) est construite vers le milieu des années 70, voir [4]. Cependant, il existe encore des problèmes non résolus en ce qui concerne l'estimation de type superconvergence, estimation de type optimale pour les équations dégénérées, estimation de l'erreur de la MEF avec concentration de la matrice de « mass » et d'autre.

Dans cet article notre but est d'analyser l'erreur de la MEF avec intégration numérique pour un problème aux limites elliptique dégénéré de 2^e ordre. Ici, on utilise les éléments finis triangulaires linéaires et quadratiques. La formule quadrature utilisée est définie dans les noeuds de la triangulation, ce qui nous permet d'obtenir une concentration de la matrice de « mass » lors de la résolution numérique des équations paraboliques dégénérées, voir [3].

La méthode classique pour obtenir une estimation optimale de l'erreur de la MEF pour les équations dégénérées est d'utiliser ce qu'on appelle fonctions de base singulières, voir [9]. Cette méthode est non désirée, car elle mène à des difficultés non négligeables lors de la réalisation numérique. Dans cet article on montre qu'on peut obtenir une estimation optimale et de type superconvergence pour un problème aux limites dégénérées sans faire recourir à ces fonctions de base et ceci grâce aux résultats obtenus récemment dans la théorie des espaces avec poids [de type de Sobolev], voir [8] et que nous développons aussi [en partie] dans cet article, voir paragraphe 1.

Dans le paragraphe 4 on obtient une estimation optimale d'ordre $O(h^k)$, $k = 1, 2$, dans W_2^1 -norme avec poids. Dans le paragraphe 6 on obtient une

estimation de type superconvergence de gradient [type (B)] dans la norme discrète avec poids de L_2 , définie aux points milieux des côtés des éléments finis linéaires, d'ordre $O(h^2 |\ln h|)$. Pour l'estimation de type superconvergence pour les équations non dégénérées, nous renvoyons le lecteur à l'article [7] où on peut trouver la littérature nécessaire.

1. NOTATIONS ET FORMULATION DU PROBLÈME

Dans l'espace euclidien \mathbb{R}^2 , par $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, ..., on note les points de cet espace. Les éléments de la base canonique de \mathbb{R}^2 seront notés par $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. Avec $\Gamma_i, i = 0, 1, 2$ on note :

$$\Gamma_i = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_i = 0, 0 < x_j < C, i \neq j, j = 1, 2 \},$$

$$i = 1, 2, \quad \Gamma_0 = \{ (0, 0) \}.$$

Par Ω on note un polygone convexe dans \mathbb{R}_+^2 , dont la frontière $\partial\Omega$ contient $\bar{\Gamma}_i, i = 1, 2$, voir figure 1.1. Sans perdre en généralité, on suppose que $\text{mes}(\Omega) = 1$.

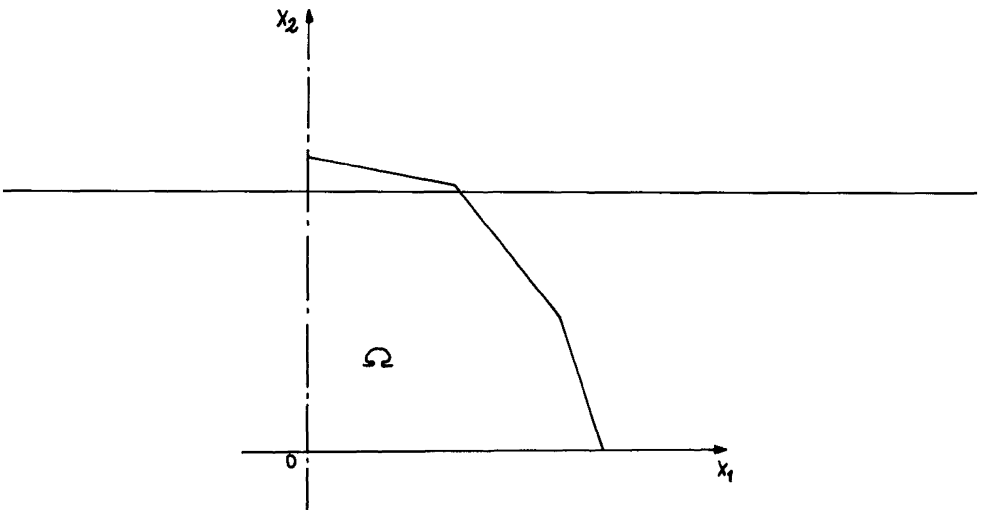


Figure 1.1.

En bref on va donner un rappel de quelques résultats en calcul différentiel. On considère deux espaces linéaires normés X et Y et une fonction $v : A \rightarrow Y, A \subset X$. Si v est k -fois différentiable dans le point $x \in A$, alors avec $D^k v(x)$ ou tout simplement $Dv(x)$, si $k = 1$, on note la k -ième dérivée [au sens de

Frechet] de v . Cet élément appartient à $\mathcal{L}_k(X, Y)$ avec la norme :

$$\| D^k v(x) \| = \sup_{\substack{\|h_i\| \leq 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \| D^k v(x) (h_1, h_2, \dots, h_k) \| .$$

En particulier si $X = \mathbb{R}^2$ et $Y = \mathbb{R}$, les dérivées partielles de v sont notées par :

$$\partial_i v(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = Dv(x) (e_i), \quad \partial_{ij} v(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = D^2 v(x) (e_1, e_2), \dots$$

Le gradient de $v(x)$ est le vecteur dans \mathbb{R}^2 , dont les composantes sont les dérivées partielles $Dv(x) e_i$, $i = 1, 2$. On utilise aussi les notations :

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_i \in \mathbb{N} (\alpha_i \geq 0).$$

S'il n'y a pas confusion on note tout simplement ∂^α .

On considère le problème aux limites dégénéré suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \partial_i (a_i(x) x_1 \partial_i u(x)) &= x_1 f(x), \quad x \in \Omega. \\ u|_{\Gamma'} &= 0, \quad \Gamma' = \partial\Omega \setminus \Gamma_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

On suppose que sont vérifiées les conditions suivantes :

$$\exists C = \text{Cte}, \quad \exists C' = \text{Cte} : 0 < C \leq a_i(x) \leq C', \quad i = 1, 2, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad (1.2)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0} \left(x_1 a_1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution généralisée du problème (1.1), nous allons construire un espace de Sobolev avec poids. Ceci fera l'objet du paragraphe qui suit.

2. ESPACE DE SOBOLEV AVEC POIDS

On définit les fonctions poids suivantes :

$$\text{dist}(x, \Gamma_i) = d_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 0, 1, 2.$$

S'il n'y a pas confusion on écrit tout simplement $d(x)$.

On note par $\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\theta \in \mathbb{R}$, l'espace des fonctions continues muni de la norme :

$$\| \tilde{v} \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} d(x)^{p\theta} | \tilde{v}(x) |^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{vrai sup}_{x \in \Omega} d(x)^\theta | \tilde{v}(x) |, & p = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Si $\theta = 0$, on écrit $\tilde{L}_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Remarquons que l'intégrale en haut est au sens de Riemann et que les espaces $\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)$ ne sont pas complets par rapport à la norme (2.1).

Par $\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)$, $1 \leq p \leq \infty$, on note l'espace des fonctions l fois continûment différentiables dans Ω muni de la norme :

$$\| \tilde{v} \|_{\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \| \partial^\alpha \tilde{v} \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)}^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq l} \text{vrai sup}_{x \in \Omega} d(x)^\theta | \partial^\alpha \tilde{v}(x) |, & p = \infty. \end{cases} \quad (2.2)$$

Si $\theta = 0$, on écrit tout simplement $\tilde{W}_p^l(\Omega)$. Les espaces $\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)$, $1 \leq p \leq \infty$ ne sont pas complets par rapport à la norme (2.2).

Nous allons donner la représentation intégrale des fonctions appartenant à l'espace $\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)$, en utilisant la même méthode introduite dans [5].

Soit $B(x^0, \rho/2)$ une boule ouverte de centre x^0 et de rayon $\rho/2$, entièrement incluse dans l'ensemble :

$$B^\delta = \{ (y_1, y_2) \in \Omega : 0 < \delta \leq y_i, i = 1, 2, \delta \in \mathbb{R} \}.$$

Soit ϕ une fonction indéfiniment continûment différentiable dans $B(x^0, \rho/2)$, nulle sur et au voisinage de la frontière de $B(x^0, \rho/2)$ et telle que $\phi \geq 0$ et $\int \phi(x) dx = 1$. Soient $x \in \Omega \setminus B^\delta$ et $y \in B(x^0, \rho/2)$. Appliquons la formule intégrale de Taylor à $\tilde{v} \in \tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)$:

$$\tilde{v}(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{(x - y)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \tilde{v}(y) + l \sum_{|\alpha| = l} \frac{(x - y)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 S^{l-1} \partial^\alpha \tilde{v}(x + s(y - x)) ds. \quad (2.3)$$

Multiplions (2.3) par $y_i^\theta \phi(y)$, $i = 1, 2$, $\theta \geq 0$ et intégrons en y :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x) = \kappa^{-1} \left\{ \sum_{|\alpha| < l} \int_B y_i^\theta \phi(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \tilde{v}(y) dy + \right. \\ \left. + l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_B y_i^\theta \phi(y) (x-y)^\alpha \int_0^1 s^{l-1} \partial^\alpha \tilde{v}(x + s(y-x)) ds dy \right\} \end{aligned}$$

où $\kappa = \int_B y_i^\theta \phi(y) \geq \delta^\theta$. En utilisant le théorème de Fubini et le changement de variable $z = x + s(y-x)$, on trouve :

$$\begin{aligned} & \int_B y_i^\theta \phi(y) (x-y)^\alpha \int_0^1 s^{l-1} \partial^\alpha \tilde{v}(x + s(y-x)) ds dy \\ &= \int_0^1 \int_B y_i^\theta \phi(y) (x-y)^\alpha s^{l-1} \partial^\alpha \tilde{v}(x + s(y-x)) dy ds \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega(x)} (s^{-1}(z_i - x_i) + x_i)^\theta \phi(x + s^{-1}(z-x)) (x-z)^\alpha s^{-3} \partial^\alpha \tilde{v}(z) dz ds \\ &= \int_{\Omega(x)} K_\alpha(x, z) \partial^\alpha \tilde{v}(z) dz. \end{aligned}$$

où $\Omega(x)$ - cône de sommet le point x , formé par la boule $B(x^0, \rho/2)$ et les points situés entre $B(x^0, \rho/2)$ et le sommet x , limités par les tangentes à $B(x^0, \rho/2)$ issues de x ,

$$K_\alpha(x, z) = \frac{l}{\alpha!} (x-z)^\alpha \int_0^1 (s^{-1}|z_i - x_i| + x_i)^\theta \phi(x + s^{-1}(z-x)) s^{-3} ds.$$

L'utilisation du théorème de Fubini est justifiée par le fait que :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (s^{-1}(z_i - x_i) + x_i)^\theta \phi(x + s^{-1}(z-x)) s^{-3} ds = \\ &= \int_{\frac{|z-x|}{\rho}}^1 (s^{-1}(z_i - x_i) + x_i)^\theta \phi(x + s^{-1}(z-x)) s^{-3} ds \\ &\leq \|\phi\|_{\tilde{L}^\infty(B)} \cdot \frac{\rho^{1+\theta}}{2+\rho} \cdot \frac{z_i^\theta}{|x-z|^{2+\theta}}, \quad \forall z \in \Omega(x), \quad \theta \geq 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

On obtient la représentation intégrale suivante :

$$\tilde{v}(x) = \kappa^{-1} \{ \mathcal{Q}^l \tilde{v}(x) + \mathcal{R}^l \tilde{v}(x) \} \tag{2.5}$$

où

$$\mathcal{Q}^l \tilde{v}(x) = \sum_{|\alpha| < l} \int_B y_i^\alpha \phi(y) \frac{(x-y)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \tilde{v}(y) dy,$$

$$\mathcal{R}^l \tilde{v}(x) = \sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega(x)} K_\alpha(x, y) \partial^\alpha \tilde{v}(y) dy.$$

Remarque 2.1 : $\text{Supp } K_\alpha(x, \cdot) \subset \Omega(x)$. D'autre part on a :

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \Omega(x).$$

Remarque 2.2 : En utilisant la définition de $K_\alpha(x, y)$ et en procédant de la même manière comme pour obtenir (2.4), on obtient :

$$| \partial^\beta_x \partial^\gamma_y K_\alpha(x, y) | \leq \text{Cte} |x - y|^{-2-\theta+l} (d_i(x))^\theta, \quad i = 0, 1, 2,$$

où $l = |\alpha| - |\beta| - |\gamma|, \quad \theta \geq 0.$

Nous allons donner un résultat concernant la continuité des opérateurs intégraux dans $\tilde{L}_s(\Omega, d(x), r), r \in \mathbb{R}, s \in [1, \infty]$.

COROLLAIRE 2.1 : On considère l'opérateur intégral :

$$(U\tilde{w})(x) = \int_\Omega d(y)^\theta \frac{\tilde{w}(y)}{|x-y|^\sigma} dy, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

et soient $p, q \in [1, \infty], \varepsilon \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}$, tels que :

$$1/q - 1/q + \frac{\varepsilon - \sigma + 2}{2} > 0, \quad -\varepsilon q < 1. \tag{2.6}$$

Alors, l'opérateur U est continu de $\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)$ dans $\tilde{L}_q(\Omega, d(x), \varepsilon)$.

On montre ce corollaire de la même manière comme pour montrer la continuité des opérateurs intégraux de ce type dans les espaces $\tilde{L}_p(\Omega)$, voir [6, p. 432].

THÉORÈME 2.1 : Soient $p, q \in [1, \infty], \theta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R}$. En outre, on suppose que les conditions (2.6) soient réalisées avec $\sigma = 1 + \theta$. Alors on a les injections

continues :

$$\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta) \hookrightarrow \tilde{L}_q(\Omega, d(x), \varepsilon), \quad (2.7)$$

$$\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}), \quad p > \frac{2}{l-\theta}, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Démonstration

a) Dans la représentation (2.5) on prend $l = 1$ et $x_i < \delta$, $i = 1, 2$. Alors d'après (2.4), on a :

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x)| &\leq C(\phi, \delta) \left\{ \int_B y_i^\theta |\tilde{v}| dy + \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega(x)} \frac{y_i^\theta}{|x-y|^{1+\theta}} |\partial^\alpha \tilde{v}(y)| dy \right\} \\ &\leq C'(\phi, \delta) \left\{ \int_\Omega y_i^\theta |\tilde{v}(y)| dy + \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \frac{y_i^\theta}{|x-y|^{1+\theta}} |\partial^\alpha \tilde{v}(y)| dy \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$[x_i < y_i, \forall y \in \Omega(x)]$. Comme $y_i \leq |y|$, de (2.9) on obtient également :

$$|\tilde{v}(x)| \leq C \left\{ \int_\Omega |y|^\theta |\tilde{v}| dy + \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \frac{|y|^\theta}{|x-y|^{1+\theta}} |\partial^\alpha \tilde{v}(y)| dy \right\}. \quad (2.10)$$

En multipliant (2.9) et (2.10), respectivement par x_i^ε et $|x|^\varepsilon$ et en utilisant le corollaire 2.1, on obtient (2.9). D'après (2.9), on a

$$\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta) \hookrightarrow \tilde{L}_\infty(\Omega), \quad p > \frac{2}{1-\theta}$$

ce qui montre (2.10) pour $l = 1$. D'autre part, en utilisant le lemme classique de Sobolev [6, p. 457] dans les espaces $\tilde{W}_p^l(\Omega)$ et (2.7) on obtient :

$$\max_{\bar{\Omega}} |\tilde{v}(x)| \leq \text{Cte} \|\tilde{v}\|_{\tilde{W}_q^{l-1}(\Omega)} \leq \text{Cte} \|\tilde{v}\|_{\tilde{W}_p^l(\Omega, d(x), \theta)}$$

si $q > \frac{2}{l-1}$ et $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1-\theta}{2} > 0$, $l \geq 2$, c'est-à-dire :

$$\frac{l-1}{2} - \frac{1}{p} + \frac{1-\theta}{2} = \frac{l-\theta}{2} - \frac{1}{p} > \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1-\theta}{2} > 0.$$

Ce qui finit la démonstration de (2.8) quand $x_i < \delta$, $i = 1, 2$.

b) Si $x_i \geq \delta$, $i = 1, 2$; alors les espaces $\tilde{W}_p^l(\mathcal{O}, d(x), \theta)$ coïncident avec les espaces $\tilde{W}_p^l(\mathcal{O})$ où \mathcal{O} est un ouvert borné tel que $\text{dist}(\mathcal{O}, \Gamma_1) > 0$. C.Q.F.D.

Notre but maintenant est de construire les complétés des espaces $\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, $1 \leq p \leq \infty$, en utilisant le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.2 : *Soit \tilde{X} un espace métrique non complet et désignons par \mathcal{E} l'espace de toutes les suites de Cauchy $\tilde{v} = \{ \tilde{v}_n \}$ d'éléments de \tilde{X} . Sur cet espace on définit une relation d'équivalence par :*

$$\tilde{v} \sim \tilde{w} \quad \text{si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(\tilde{v}_n, \tilde{w}_n) \quad [\tilde{\rho}\text{-métrique dans } \tilde{X}].$$

On note par X l'espace des classes d'équivalence notée v :

$$X = \mathcal{E} / \sim .$$

Alors,

a) X est un espace métrique par rapport à la distance :

$$\rho(v, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\rho}(\tilde{v}_n, \tilde{w}_n), \quad \{ \tilde{v}_n \} \in v, \{ \tilde{w}_n \} \in w .$$

b) \tilde{X} est plongé isométriquement dans X .

c) \tilde{X} est dense dans X .

d) X est complet.

La démonstration de ce corollaire on peut la trouver par exemple dans [6, p. 33]. Notre but maintenant est de construire concrètement les complétés de $\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, en utilisant le corollaire 2.2 et plus précisément dans quel sens on définira les dérivées dans ces complétés.

On note par $L_p(\Omega, d(x), \theta)$ le complété de $\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)$, dans le sens du corollaire 2.2 par rapport à la norme :

$$\| v \|_{L_p(\Omega, d(x), \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \tilde{v}_n \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

Par définition on pose :

$$\| v \|_{L_p(\Omega, d(x), \theta)} = \left(\int_{\Omega} d(x)^{p\theta} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

où l'intégral à droite dans (2.11) est au sens de Lebesgue et $L_p(\Omega, d(x), \theta)$ sera l'espace des fonctions approchables par les fonctions appartenant à $\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \theta)$ par rapport à (2.11). Dans le cas où $\theta = 0$, on écrira tout simplement $L_p(\Omega)$.

Par $W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, on note le complété de $\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)$ [au sens du

corollaire 2.2] par rapport à la norme :

$$\| v \|_{W_p^1(\Omega, d(x), \theta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \| \tilde{v}_n \|_{\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

PROPOSITION 2.1 : Soient $p, q \in [1, \infty]$ et $v \in W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$ et on suppose que les conditions (2.6) soient réalisées avec $\sigma = 1 + \theta$ et $-1 < \varepsilon < \infty$. Alors, $v \in L_q(\Omega, d(x), \varepsilon)$ et $\exists C = \text{Cte} > 0$ telle que :

$$\| v \|_{L_q(\Omega, d(x), \varepsilon)} \leq C \| v \|_{W_p^1(\Omega, d(x), \theta)}. \quad (2.12)$$

Démonstration : Soit $\{ v_n \} \in v(x)$. Alors, d'après (2.9), on a :

$$\| \tilde{w}_n - \tilde{v}_n \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \varepsilon)} \leq C \| \tilde{w}_n - \tilde{v}_n \|_{\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

où $\{ \tilde{w}_n \} \sim \{ v_n \}$. Par conséquent on a :

$$\| \tilde{w}_n - v_n \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \varepsilon)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Alors d'après le corollaire 2.2, on a $v \in L_p(\Omega)$. D'autre part, en passant à la limite dans :

$$\| \tilde{v}_n \|_{\tilde{L}_p(\Omega, d(x), \varepsilon)} \leq C \| \tilde{v}_n \|_{\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)}$$

et en utilisant la définition des normes dans $L_p(\Omega)$ et $W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, on obtient (2.12). C.Q.F.D.

PROPOSITION 2.2 : Soient $v \in W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, $1 \leq p \leq \infty$, $v^{(\alpha)} \in L_p(\Omega, d(x), \theta)$ et supposons qu'il existe $\tilde{v}_n \in \tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, telle que :

$$\int_{\Omega} d(x)^{\theta} | \tilde{v}_n(x) - v(x) | dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \int_{\Omega} d(x)^{\theta} | \partial^{\alpha} \tilde{v}_n(x) - v^{(\alpha)}(x) | dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.13)$$

$|\alpha| = 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Alors, on a :

$$\int_{\Omega_1} \partial^{\alpha} ((d(x))^{\theta} \varphi(x)) v(x) dx = - \int_{\Omega_1} d(x)^{\theta} v^{(\alpha)}(x) \varphi(x) dx \quad (2.14)$$

pour toute fonction φ continûment différentiable, nulle sur et au voisinage de $\partial\Omega_1$, $\Omega_1 \subset \Omega$ - arbitraire.

Démonstration : Soient $d(x) = x_1$ et $\{ \tilde{v}_n \} \in \tilde{W}_p^1(\Omega, x_1, \theta)$. Alors d'après la

formule de Green, on a :

$$\theta \int_{\Omega_1} x_1^{\theta-1} \tilde{v}_n(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_1} x_1^\theta \tilde{v}_n(x) \partial_1 \varphi(x) dx = - \int_{\Omega_1} x_1^\theta \partial_1 \tilde{v}_n(x) \varphi(x) dx \tag{2.15}$$

φ est la même fonction qu'auparavant.

D'après la proposition 2.1 [avec $\varepsilon = \theta - 1$], on a :

$$\int_{\Omega} x_1^{\theta-1} |v - \tilde{v}_n| dx \leq \text{Cte} \|v - \tilde{v}_n\|_{W_p^1(\Omega, x_1, \theta)}.$$

Prenons $\{\tilde{v}_n(x)\} \in v(x)$. Alors $\|v - \tilde{v}_n\|_{W_p^1(\Omega, x_1, \theta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et par conséquence on a :

$$\int_{\Omega} x_1^{\theta-1} (v - \tilde{v}_n) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.16}$$

Ainsi en passant à la limite dans (2.15) et en utilisant (2.13) et (2.16), on obtient (2.14). D'une façon analogue on montre le cas où $\alpha = (0, 1)$, ainsi que le cas $d(x) = x_2$ et $d(x) = |x|$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 2.3 : Soient $v \in W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$ et $v^{(\alpha)} \in L_p(\Omega, d(x), \theta)$ telles que (2.14) soit réalisée. Alors, on a (2.13).

Démonstration : Soit $\{\tilde{v}_n\} \in W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$ une suite de Cauchy. On a :

$$\begin{aligned} \theta \int_{\Omega_1} x_1^{\theta-1} (\tilde{v}_n(x) - v(x)) \varphi(x) dx + \int_{\Omega_1} x_1^\theta (\tilde{v}_n(x) - v(x)) \partial_1 \varphi(x) dx = \\ = - \int_{\Omega_1} x_1^\theta (\partial_1 \tilde{v}_n(x) - v^{(1,0)}(x)) \varphi(x) dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Prenons $\{\tilde{v}_n\} \in v(x)$ et désignons par $w^{(1,0)}(x)$ la classe dont le représentant est $\partial_1 \tilde{v}_n(x)$. Alors en passant à la limite dans (2.17), on obtient :

$$\int_{\Omega_1} x_1^\theta (w^{(1,0)} - v^{(1,0)})(x) \varphi(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où $W^{(1,0)} = v^{(1,0)}$, c'est-à-dire $\partial_1 \tilde{v}_n(x)$ est représentant de $v^{(1,0)}$. Par consé-

quence $\int_{\Omega_1} x_1^\theta |\partial_1 \tilde{v}_n - v^{(1,0)}| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Lorsque $\alpha = (0, 1)$, on procède de la même manière, également et lorsque $d(x) = x_2$ et $d(x) = |x|$.

C.Q.F.D.

Dans la suite on notera :

$$v^{(\alpha)} = \partial^\alpha v, \quad |\alpha| = 1,$$

qu'on appellera dérivée généralisée [ou dérivée distributionnelle]. On introduit d'une façon analogue les dérivées généralisées d'ordre supérieur.

Maintenant on est en mesure de définir le complété de $\tilde{W}_p^1(\Omega, d(x), \theta)$.

DÉFINITION 2.1 : Soit $p \geq 1$. La fonction v appartient à $W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$, $l \in \mathbb{N}$ [$l \geq 0$], si et seulement si, existe une suite $\{\tilde{v}_n\}$, telle que :

a) $\{\tilde{v}_n\} \in W_p^1(\Omega, d(x), \theta)$,

b) $|v - \tilde{v}_n|_{L_p(\Omega, d(x), \theta)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

c) La suite $\{\partial^\alpha \tilde{v}_n\}$ est convergente dans $L_p(\Omega, d(x), \theta)$, pour tout α , $|\alpha| \leq l$.

Ainsi, du théorème 2.1 et de la définition 2.1 découle le théorème d'immersion suivant :

THÉORÈME 2.2 : Soient $p, q \in [1, \infty]$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. En outre, on suppose que :

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon - \theta + 1}{2} > 0, \quad -\varepsilon q < 1.$$

Alors, on a les injections continues suivantes :

$$W_p^1(\Omega, d(x), \theta) \hookrightarrow L_q(\Omega, d(x), \varepsilon) \tag{2.18}$$

$$W_p^1(\Omega, d(x), \theta) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}), \quad p > \frac{2}{l - \theta}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Dans le cas où $\theta = 1/p$, on écrit tout simplement $W_p^1(\Omega, d(x))$. Le produit scalaire dans $L_2(\Omega, d(x))$ sera noté par :

$$(v, w) = \int_{\Omega} d(x) v(x) w(x) dx.$$

Par $|v|_{W_p^1(\Omega, d(x), \theta)}$ on note les semi-normes :

$$|v|_{W_p^1(\Omega, d(x), \theta)} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} d(x)^{p\theta} |\partial^\alpha v(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

3. APPROXIMATION POLYNOMIALE DANS LES ESPACES $W_p^l(\Omega, d(x), \theta)$

Le lemme de Bramble-Hilbert [1, 2] joue un rôle fondamental dans l'estimation d'erreur de la MEF avec intégration numérique. Récemment Dupont et Scott, en utilisant une méthode constructive basée sur la représentation intégrale de Sobolev, ont généralisé ce lemme, mais toujours dans les espaces classiques de Sobolev. En suivant cette même méthode où on utilise la représentation intégrale (2.5), les remarques 2.1 et 2.2 et le corollaire 2.1, on montre aisément le résultat de Dupont et Scott dans les espaces $W_p^l(\Omega, d(x), \theta)$.

THÉORÈME 3.1 : *Soit $\{P_j\}_{j=1}^k$ un ensemble de polynômes homogènes de degré, l_1, l_2, \dots, l_k , respectivement. On suppose que ces polynômes n'ont pas de racines communes différentes de zéro [$k \geq 2$]. Définissons l'ensemble :*

$$\mathcal{X} = \{ v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) : P_j(\partial) v = 0, j = 1, \dots, k \}.$$

Alors, on a :

- i) $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}_r, r \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_r$ - ensemble des polynômes de degré r .
- ii) Si pour $p_j, q \in [1, \infty], m \in \mathbb{N}, m \leq l_j$, on a

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p_j} + \frac{l_j - m}{2} > 0.$$

Alors :

$$\inf_{Q \in \mathcal{X}} \| v - Q \|_{W_q^m(\Omega, d(x), \theta)} \leq \text{Cte} \prod_{j=1}^k \| P_j(\partial) v \|_{L_{p_j}(\Omega, d(x), \theta)}.$$

CONSÉQUENCE 3.1 : *Soit L une fonctionnelle continue sur $W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)$, $p \in [1, \infty], \theta \in \mathbb{R}$, telle que :*

$$L(p) = 0, \quad \forall p \in P_k(\Omega)$$

où $P_k(\Omega)$ est l'espace des polynômes de degré k . Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$, telle que :

$$| L(v) | \leq C(\Omega) \| L \| * \| v \|_{W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)}, \quad \forall v \in W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)$$

où $\| \cdot \| *$ - norme de l'espace dual de $W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)$.

Démonstration : On a :

$$| L(v) | = | L(v - p) | \leq \| L \| * \| v - p \|_{W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)}.$$

Par conséquence :

$$\begin{aligned}
 |L(v)| &\leq \|L\|^* \inf_{p \in P_k(\Omega)} \|v - p\|_{W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)} \\
 &\leq C \|L\|^* \left(\inf_{p \in P_k(\Omega)} \|v - p\|_{W_p^k(\Omega, d(x), \theta)} + |v|_{W_p^{k+1}(\Omega, d(x), \theta)} \right).
 \end{aligned}$$

Appliquons maintenant le théorème 3.1 avec $\mathcal{X} = P_k(\Omega)$. On obtient la conséquence 3.1. C.Q.F.D.

4. ESPACE APPROCHÉ ET ESTIMATION D'ERREUR D'INTERPOLATION

Soit h un nombre réel positif destiné à tendre vers zéro. On lui associe une triangulation notée T_h vérifiant les conditions suivantes :

- a) Les éléments de T_h , notés K , sont des triangles de diamètre inférieur à h .
- b) La réunion des triangles de T_h couvre $\bar{\Omega}$.

Un exemple d'une telle triangulation est donné sur la figure 4.1. On sup-

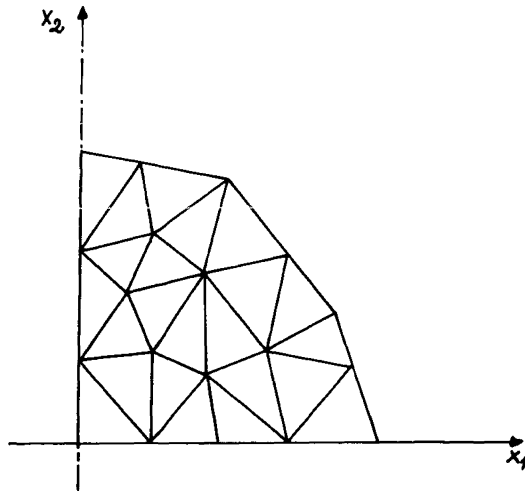


Figure 4.1.

pose que la famille $(T_h)_h$ de triangulation ainsi constituée est régulière au sens suivant : il existe une constante $C > 0$, ne dépendant pas de h , telle que :

$$\forall h, \quad \forall K \in T_h; \quad h_K / \rho_K \leq C$$

où h_K et ρ_K désignent respectivement le diamètre de K et le diamètre de la plus grande boule contenue dans K . Il existe alors une constante $C_0 > 0$

indépendante de h telle que la mesure de tous les angles de T_h soit minorée par C_0 .

On introduit le sous-espace fini :

$$S_h^k = \{ v \in C^0(\bar{\Omega}); v|_K = p \in P_k(K), v|_{\Gamma'} = 0 \}, \quad k = 1, 2.$$

Pour $k = 1$, on choisit comme degré de liberté les valeurs aux sommets de K . Pour $k = 2$, on choisit comme degré de liberté les valeurs aux sommets et aux milieux des côtés de K . Dans le premier cas, les éléments finis K sont appelés triangles linéaires. Dans le deuxième cas, ils sont appelés triangles quadratiques. Dans la suite on notera par $T_h^k, k = 1, 2$, l'ensemble des éléments finis triangulaires, respectivement linéaires et quadratiques.

La dimension de $S_h^k, k = 1, 2$ est égale au nombre $M(h)$ des noeuds de $T_h^k, k = 1, 2$ qui ne sont pas situés sur Γ' . On vérifie immédiatement qu'on a :

$$S_h^k \subset W_2^1(\Omega, x_1) = \{ v \in W_2^1(\Omega, x_1), v|_{\Gamma'} = 0 \}.$$

Soit $Z = \{ w \in C^0(\bar{\Omega}); w|_{\Gamma'} = 0 \}$. Nous définissons un opérateur $\Pi_h : Z \rightarrow S_h^k$ de la façon suivante : si $w \in Z, \Pi_h(w)$ est la fonction de S_h^k qui coïncide avec w en tout noeud de T_h^k . Π_h est appelé opérateur d'interpolation de Lagrange.

Soit $K \in T_h^k$ et Σ_K -ensemble des noeuds de K tel que Σ_K soit $P_k(K)$ -unisolvant, voir [4, p. 78]. On définit alors un opérateur d'interpolation local :

$$\Pi_K : C^0(K) \rightarrow P_k(K)$$

tel que

$$(\Pi_K w)(b_{i,K}) = w(b_{i,K}), \quad \forall b_{i,K} \in \Sigma_K.$$

On a en outre :

$$\Pi_K w|_K = \Pi_K w.$$

Dans la suite par \hat{K} on note le triangle de référence :

$$\hat{K} = \{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2; \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1, \hat{x}_i \geq 0, i = 1, 2 \}$$

et par $F_K : \hat{K} \rightarrow F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K \in K$, l'unique application affine qui envoie \hat{K} sur K , où B_K est une matrice carrée inversible, b_K est un vecteur dans \mathbb{R}^2 .

Nous allons utiliser les correspondances suivantes :

$$\hat{x} \in \hat{K} \rightarrow x = F_K(\hat{x}) \in K$$

$$(\hat{v} : \hat{K} \rightarrow R) \rightarrow (v = \hat{v} \circ F_K^{-1} : K \rightarrow R)$$

entre les points $\hat{x} \in \hat{K}$ et $x \in K$ et entre les fonctions définies sur \hat{K} et K . Notons qu'on a :

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x), \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}, \quad \forall x \in K.$$

Par $\hat{\Pi}_{\hat{K}}$ on notera l'opérateur d'interpolation local dans \hat{K} .

Dans la suite par M on notera toute constante ne dépendant pas de h_K [et de h].

D'après la régularité de $K \in T_h^k$, on obtient aisément la

PROPOSITION 4.1 : *On suppose que K est un élément fini régulier. Alors, pour tout $x \in K$ et pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$, on a :*

$$M |\hat{x}| h_K \leq x_1 \leq M h_K |\hat{x}|, \quad K \cap \bar{\Gamma}_1 = 1 \text{ sommet de } K \quad (4.1)$$

$$M \hat{x}_1 h_K \leq x_1 \leq M h_K \hat{x}_1, \quad K \cap \bar{\Gamma}_1 = 1 \text{ côté de } K \quad (4.2)$$

$$\left(\sup_K (x_1) / \inf_K (x_1) \right) \leq M, \quad K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset. \quad (4.3)$$

On considère les fonctions poids suivantes :

$$\hat{d}_i(\hat{x}) = \hat{x}_i, \quad i = 1, 2; \quad \hat{d}_0(\hat{x}) = |\hat{x}|, \quad \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \hat{K}.$$

S'il n'y a pas confusion on écrira tout simplement $\hat{d}(\hat{x})$.

Dans la suite on utilisera les résultats suivants :

$$\|B_K\| \leq h_K / \hat{\rho}_{\hat{K}}, \quad \|B_K^{-1}\| \leq \hat{h}_{\hat{K}} / \rho_K, \quad |\det(B_K)| = \text{mes}(K) / \text{mes}(\hat{K}), \quad (4.4)$$

$$M h_K^2 \leq \text{mes}(K) \leq M h_K^2$$

voir [4, p. 120-122].

En suivant la démonstration du théorème 3.1.5 [4, p. 122] et en utilisant la proposition 4.1, on montre facilement le :

THÉORÈME 4.1 : *On suppose qu'on a les injections suivantes :*

$$W_p^{k+1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow C^0(\hat{K}), \quad k = 1, 2, \quad p \in [1, \infty], \quad \theta \geq 0$$

$$W_p^{k+1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow W_q^m(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad p, q \in [1, \infty], \quad \theta \geq 0$$

$$P_k(\hat{K}) \subset W_q^m(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Alors on a :

$$|v - \Pi_K v|_{W_q^{k+1}(K, x_1, \theta)} \leq M (\text{mes}(K))^{1/q-1/p} h_K^{k+1-m} |v|_{W_p^{k+1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \quad \forall v \in W_p^{k+1}(K, x_1, \theta), \quad \forall K \in T_h^k, \quad k = 1, 2. \quad (4.5)$$

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes. D'abord, on montre (4.5) pour les éléments K dont l'intersection avec $\bar{\Gamma}_1$ est non vide. Dans ce cas

intervient le théorème 3.1 avec $\theta \neq 0$, ainsi que (4.1) et (4.2). Ensuite pour les éléments K ayant une intersection vide avec $\bar{\Gamma}_1$. Dans ce cas on procède absolument de la même manière comme pour la démonstration du théorème 3.1.5 [4, p. 122], en utilisant (4.3).

5. FORMULATION DU PROBLÈME DISCRET. ESTIMATION DE L'ERREUR DE LA MEF

Par $a(\cdot, \cdot)$ on note la forme bilinéaire :

$$a(v, w) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} x_1 a_i(x) \partial_i w(x) \partial_i v(x) dx .$$

DÉFINITION 5.1 : On appelle solution généralisée du problème (1.3), la fonction $u \in W_2^1(\Omega, x_1)$, telle que :

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega, x_1) . \tag{5.1}$$

Soit $f \in L_2(\Omega, x_1)$, $a_i \in L_{\infty}(\Omega)$, $i = 1, 2$. Alors :

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|u\|_{W_2^1(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}, \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega, x_1)$$

$$|(f, v)| \leq M \|f\|_{W_2^1(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}, \quad \forall f \in W_2^1(\Omega, x), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega, x)$$

D'autre part :

$$a(v, v) \geq C_0 |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}^2, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega, x_1) .$$

Alors, d'après le lemme de Lax-Milgram, il existe une solution unique $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, x_1)$ qui vérifie le problème (5.1).

La solution approchée par la méthode de Galerkin du problème (5.1) est la solution finie u_h appartenant à $S_h^k, k = 1, 2$ telle que :

$$a(u_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in S_h^k, \quad k = 1, 2 . \tag{5.2}$$

Soit I_K la formule quadrature suivante :

$$I_K(w) = \sum_{i=1}^L \omega_{i,K} w(b_{i,K})$$

où $\omega_{i,K} = \int_K x_1 \varphi_{i,K}(x) dx$, $\varphi_{i,K}(x)$ -fonction de base relatives à K , voir [4, p. 79], L -nombre des nœuds de Σ_K .

D'après la transformation F_K , on a :

$$\omega_{i,K} = \det(B_K) \omega_{i,\hat{K}}, \quad \omega_{i,\hat{K}} = \int_{\hat{K}} x_1(\hat{x}) \hat{\varphi}_{i,\hat{K}}(\hat{x}) d\hat{x}$$

$x_1(\hat{x}) = F_K(\hat{x}_1)$, $\hat{b}_{i,\hat{K}} = F_K^{-1}(b_{i,K}) \in \hat{K}$, $\hat{\varphi}_{i,\hat{K}}(\hat{x})$ -fonctions de base relatives à \hat{K} .

On utilisera aussi les notations :

$$E_K(w) = \int_K x_1 w(x) dx - I_K(w)$$

$$E_{\hat{K}}(\hat{w}) = \int_{\hat{K}} x_1(\hat{x}) \hat{w}(\hat{x}) d\hat{x} - I_{\hat{K}}(\hat{w})$$

où

$$I_{\hat{K}}(\hat{w}) = \sum_{l=1}^L \int_{\hat{K}} x_1(\hat{x}) \hat{\phi}_{l,\hat{K}}(\hat{x}) d\hat{x} \cdot \hat{w}(b_{l,K}).$$

Approchons $a(u_h, v)$ et (f, v) par la formule I_K . On obtient le problème discret suivant :

$$a_h(u_h, v) = (f, v)_h, \quad \forall v \in S_h^k, \quad k = 1, 2, \quad (5.3)$$

où

$$a_h(w, v) = \sum_{K \in T_h^k} \sum_{l=1}^L \omega_{l,K} \left(\sum_{i=1}^2 a_i(x) \partial_i w|_K \partial_i v|_K \right) (b_{l,K})$$

$$(f, v)_h = \sum_{K \in T_h^k} \sum_{l=1}^L \omega_{l,K} (fv|_K) (b_{l,K}).$$

Remarquons qu'on a $E_K(p) = 0, \forall p \in P_k(K), k = 1, 2$. Par conséquence, on obtient :

$$a_h(v, v) \geq M |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}^2, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega, x_1). \quad (5.4)$$

D'après le lemme de Strang [4, p. 186] on a :

$$|u - u_h|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \leq M \left(\inf_{v \in S_h^k} \left\{ |u - v|_{W_2^1(\Omega, x_1)} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sup_{w \in S_h^k} \frac{|a(v, w) - a_h(v, w)|}{|w|_{W_2^1(\Omega, w_1)}} \right\} + \sup_{w \in S_h^k} \frac{|(f, w) - (f, w)_h|}{|w|_{W_2^1(\Omega, x_1)}} \right). \quad (5.5)$$

Notre but maintenant est de majorer le 2^e membre de (5.5).

De (4.5) on obtient :

$$|v - \Pi_h v|_{W_2^1(\Omega, x_1)} = \left(\sum_{\substack{K \in T_h^k \\ K \cap \Gamma_1 \neq \emptyset}} |v - \Pi_K v|_{W_2^1(K, x_1)}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{K \in T_h^k \\ K \cap \Gamma_1 = \emptyset}} |v - \Pi_K v|_{W_2^1(K, x_1)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq Mh^k |v|_{W_2^{k+1}(\Omega, x_1)}, \quad \forall v \in W_2^{k+1}(\Omega, x_1), \quad k = 1, 2. \quad (5.6)$$

où $h = \max(h_K)$.

D'où :

$$\begin{aligned} \inf_{v \in S_h^k} |u - v|_{W^{\frac{1}{2}}(\Omega, x_1)} &\leq |u - \Pi_h u|_{W^{\frac{1}{2}}(\Omega, x_1)} \\ &\leq Mh^k |u|_{W_h^{k+1}(\Omega, x_1)}, \quad \forall u \in W_2^{k+1}(\Omega, x_1), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il nous reste donc à majorer le 2^e et le 3^e terme du second membre de (5.5).

Nous allons d'abord donner le résultat évident suivant :

$$|\hat{p}|_{W^{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \leq M |\hat{p}|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{K}). \tag{5.8}$$

LEMME 5.1 : On suppose que la famille $(T_h)_h$ est régulière. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w)| &\leq Mh^k \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_{\infty}^k(\Omega)} \|u\|_{W_2^{k+1}(\Omega, x_1)} |w|_{W^{\frac{1}{2}}(\Omega, x_1)} \\ \forall a_i \in W_{\infty}^k(\Omega), \quad \forall u \in W_2^{k+1}(\Omega, x_1), \quad \forall w \in S_h^k, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Démonstration : Tout d'abord nous montrons :

$$|E_K(a \partial_i p' \partial_i p)| \leq Mh_K^k \|a\|_{W_{\infty}^k(K)} \|p\|_{W_2^k(K, x_1)} |p|_{W^{\frac{1}{2}}(K, x_1)} \tag{5.9}$$

a) $K \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset$. D'après la transformation F_K , on a :

$$E_K(aww) = \det(B_K) E_{\hat{K}}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})$$

où

$$\hat{a} \in W_{\infty}^k(\hat{K}), \quad \hat{v} \in P_{k-1}(\hat{K}), \quad \hat{w} \in P_{k-1}(\hat{K}).$$

Utilisons les injections continues $W^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, $W_2^{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \hookrightarrow L_2(\hat{K})$ [voir (2.18) et (2.19)], l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie et (5.8). On obtient :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{\phi}\hat{w})| &\leq M \sup_K(x_1) \|\hat{\phi}\|_{W_{\infty}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{w}\|_{L_2(\hat{K})} \leq \\ &\leq M \sup_K(x_1) \|\hat{\phi}\|_{W_{\infty}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{w}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{w} \in P_{k-1}(\hat{K}), \quad \theta \geq 0 \end{aligned}$$

De cette manière, nous avons montré que la forme linéaire :

$$\hat{\phi} \in W_{\infty}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \rightarrow E_{\hat{K}}(\hat{\phi}\hat{w})$$

est continue. D'autre part on a $E_{\hat{K}}(\hat{\phi}\hat{w}) = 0, \forall \hat{\phi} \in P_{k-1}(\hat{K})$. Par conséquence, d'après la conséquence 3.1, on a :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\phi}\hat{w})| \leq M \sup_K(x_1) |\hat{\phi}|_{W_{\infty}^k(\hat{K}, \hat{a}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{w}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{a}(\hat{x}))}. \quad (5.10)$$

Prenons $\hat{\phi} = \hat{a}\hat{v}$. Alors d'après la formule de Leibnitz et l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie, on trouve :

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|_{W_{\infty}^k(\hat{K}, \hat{a}(\hat{x}), \theta)} &\leq M \sum_{j=0}^{k-1} |\hat{a}|_{W_{\infty}^{k-j}(\hat{K})} |\hat{v}|_{W_{\infty}^j(\hat{K}, \hat{a}(\hat{x}), \theta)} \\ &\leq M \sum_{j=0}^{k-1} |\hat{a}|_{W_{\infty}^{k-j}(\hat{K})} |\hat{v}|_{W_{\frac{1}{2}}^j(\hat{K}, \hat{a}(\hat{x}), \theta)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

De la transformation F_K et des inégalités (4.1), (4.2) et (4.4), en déduit :

$$\begin{cases} |\hat{a}|_{W_{\infty}^{k-j}(\hat{K})} \leq (h_K)^{k-j} |a|_{W_{\infty}^{k-j}(K)} \\ |\hat{v}|_{W_{\frac{1}{2}}^j(\hat{K}, \hat{x}_1)} \leq M(h_K)^{j-1/2} |\det(B_K)|^{-1/2} |v|_{W_{\frac{1}{2}}^j(K, x_1)} \\ \|\hat{w}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{x}_1)} \leq M(h_K)^{-1/2} |\det(B_K)|^{-1/2} \|w\|_{L_2(K, x_1)}. \end{cases} \quad (5.12)$$

Ainsi, portons les inégalités (5.12) dans (5.11), ensuite le résultat obtenu dans (5.10), on trouve :

$$\begin{aligned} |E_K(avw)| &\leq M \sup_K(x_1) |\det(B_K)| \sum_{j=0}^{k-1} |\hat{a}|_{W_{\infty}^{k-j}(\hat{K})} |\hat{v}|_{W_{\frac{1}{2}}^j(\hat{K}, \hat{x}_1)} \|\hat{w}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{x}_1)} \\ &\leq M(h_K)^k \|a\|_{W_{\infty}^k(K)} \|v\|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(K, x_1)} \|w\|_{L_2(K, x_1)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Posons dans (5.13) $v = \partial_i p'$ et $w = \partial_i p$, on obtient (5.9).

b) $K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Dans ce cas on procède de la même manière comme dans a) avec $\theta = 0$, ensuite on applique (4.3). On obtient :

$$\begin{aligned} |E_K(a \partial_i p' \partial_i p)| &\leq M \sup_K(x_1) (h_K)^k \|a\|_{W_{\infty}^k(K)} \|p'\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K)} |p|_{W_{\frac{1}{2}}^1(K)} \\ &\leq M(h_K)^k \left(\sup_K(x_1) / \inf_K(x_1) \right) \|a\|_{W_{\infty}^k(K)} \|p'\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} \times \\ &\quad \times |p|_{W_{\frac{1}{2}}^1(K, x_1)} \\ &\leq M(h_K)^k \|a\|_{W_{\infty}^k(K)} \|p'\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} |p|_{W_{\frac{1}{2}}^1(K, x_1)} \\ \forall a \in W_{\infty}^k(K), \quad \forall p' \in P_K(K), \quad \forall p \in P_K(K), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Alors, en posant $a = a_i, i = 1, 2, p' = \Pi_h u|_K, p = w|_K$ et en utilisant (5.13) et (5.14), on obtient :

$$\begin{aligned} |a(\Pi_h u, w) - a_h(\Pi_h u, w)| &\leq \sum_{K \in T_h^k} \sum_{i=1}^2 |E_K(a_i \partial_i(\Pi_h u)|_K \partial_i(w|_K))| \\ &\leq M \sum_{K \in T_h^k} (h_K)^k \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_{\infty}^k(K)} \|\Pi_K u\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} \|w\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} \\ &\leq M h^k \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_{\infty}^k(\Omega)} \left(\sum_{K \in T_h^k} \|\Pi_K u\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)}^2 \right)^{1/2} \|w\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\Omega, x_1)}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De (4.5) et (5.6), on déduit :

$$\|\Pi_K u\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} \leq \|u - \Pi_K u\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} + \|u\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(K, x_1)} \leq M \|u\|_{W_{\frac{1}{2}}^{k+1}(K, x_1)}.$$

Portons l'inégalité en haut dans (5.15), on obtient le lemme 5.1. C.Q.F.D.

LEMME 5.2 : *On suppose que la famille $(T_h)_h$ est régulière et soit $q \in [1, \infty]$, tel que $q > \frac{2}{k - 1/2}, k = 1, 2$. Alors, on a :*

$$\begin{aligned} |(f, w) - (f, w)_h| &\leq M h^k \|f\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\Omega, x_1, 1/2)} \|w\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\Omega, x_1)} \\ &\quad \forall f \in W_{\frac{1}{2}}^k(\Omega, x_1, 1/2), \quad \forall w \in S_h^k, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Démonstration : Tout d'abord examinons $E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{q})$, où $\hat{f} \in W_q^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \hat{p} \in P_K(\hat{K})$. On a :

$$E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{p}) = E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{\Pi}\hat{p}) + E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))$$

où $\hat{\Pi} : L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \rightarrow P_1(\hat{K})$, un opérateur orthogonal.

Majorons $E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{\Pi}\hat{p})$.

D'après $W_q^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, on déduit :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{w})| \leq M \sup_K(x_1) \|\hat{w}\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)}, \quad \forall \hat{w} \in W_q^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}, |\hat{x}|.$$

D'autre part on a $E_{\hat{K}}(\hat{w}) = 0, \forall \hat{w} \in P_{k-1}(\hat{K})$. Alors, d'après la conséquence 3.1, on obtient :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{w})| \leq M \sup_K(x_1) \|\hat{w}\|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)}, \quad \forall \hat{w} \in W_q^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \theta \geq 0.$$

Dans l'inégalité en haut prenons $\hat{w} = \hat{f}\hat{\Pi}\hat{p}$, ensuite utilisons l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie, l'injection continue

$$W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \hookrightarrow L_2(\hat{K})$$

et (5.8), on trouve :

$$\begin{aligned}
|E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{\Pi}\hat{p})| &\leq M \sup_K (x_1) |\hat{f}\hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \leq \\
&\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{L_{\infty}(\hat{K})} + \\
&\quad + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} |\hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\infty}^1(\hat{K})}) \\
&\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{L_2(\hat{K})} + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} |\hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K})}) \\
&\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{\Pi}\hat{p}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} |\hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, d)})
\end{aligned} \tag{5.16}$$

En outre, on a :

$$|\hat{\Pi}\hat{p}|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \leq \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|. \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
|\hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} &\leq |\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} + |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \leq \\
&\leq M |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Dans (5.18), on a utilisé (4.5) et (5.8).

Portons les inégalités (5.17) et (5.18) dans (5.16), on trouve :

$$\begin{aligned}
|E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{\Pi}\hat{p})| &\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} + \\
&\quad + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))})
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Majorons maintenant $E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))$.

D'après les injections continues (2.18) et (2.19), il s'ensuit qu'il existe $q_1 \in [1, \infty]$, tel que :

$$W_{\frac{1}{2}}^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \quad W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow C^0(\hat{K}), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|.$$

Par conséquence, on obtient :

$$\begin{aligned}
|E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))| &\leq M \sup_K (x_1) \|\hat{f}\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}\|_{L_2(\hat{K})} \\
&\leq M \sup_K (x_1) \|\hat{f}\|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \\
\forall \hat{f} \in W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \forall \hat{p} \in P_2(\hat{K}), \quad \hat{d}(\hat{x}) &= \hat{x}_1, |\hat{x}|.
\end{aligned}$$

D'autre part $E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p})) = 0, \forall \hat{f} \in P_0(\hat{K}), \forall \hat{p} \in P_2(\hat{K})$. Alors d'après la conséquence 3.1, on obtient :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))| \leq M \sup_K (x_1) |\hat{f}|_{W_{q_1}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}.$$

De plus, d'après l'injection $W_q^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta) \hookrightarrow L_{q_1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)$, on a :

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_{L_{q_1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} &\leq M(\|\hat{g}\|_{L_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} + |\hat{g}|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}) \\ \forall \hat{g} \in W_q^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \hat{d}(\hat{x}) &= \hat{x}_1, |\hat{x}|. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p}))| &\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{q_1}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}) |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \\ \forall \hat{f} \in W_q^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \forall \hat{p} \in P_2(\hat{K}), \quad \hat{d}(\hat{x}) &= \hat{x}_1, |\hat{x}|. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Remarquons que si $\hat{p} \in P_1(\hat{K})$, on a $E_{\hat{K}}(\hat{f}(\hat{p} - \hat{\Pi}\hat{p})) = 0$.

Ainsi, d'après (5.19) et (5.20), on obtient :

$$\begin{aligned} |E_K(\hat{f}\hat{p})| &\leq M \sup_K (x_1) (|\hat{f}|_{W_{q_1}^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} + \\ &\quad + (|\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^{k-1}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} + |\hat{f}|_{W_{\frac{1}{2}}^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}) |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}) \\ \forall \hat{f} \in W_q^k(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta), \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{K}), \quad \forall K \in T_h^k, \quad k &= 1, 2, \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|. \end{aligned} \quad (5.21)$$

a) Supposons $K \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset$. Alors, d'après F_K (4.1) et (4.2), on a :

$$\begin{aligned} |\hat{f}|_{W_{q_1}^j(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}), \theta)} &\leq M(h_K)^{-\theta} \|B_K\|^j |\det(B_K)|^{-1/q} |f|_{W_{q_1}^j(K, x_1, \theta)} \\ |\hat{p}|_{W_{\frac{1}{2}}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} &\leq M(h_K)^{-1/2} \|B_K\|^j (\det(B_K))^{-1/2} |p|_{W_{\frac{1}{2}}(K, x_1)}. \end{aligned}$$

Par conséquence en portant les inégalités en haut dans (5.21) on obtient :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{p})| &\leq M \sup_K (x_1) (h_K)^{-\theta-1/2} \|B_K\|^k |\det(B_K)|^{-1/q-1/2} \|f\|_{W_{q_1}(K, x_1, \theta)} \times \\ &\quad \times \|p\|_{W_{\frac{1}{2}}(K, x_1)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |E_K(\hat{f}\hat{p})| &= |\det(B_K) E_{\hat{K}}(\hat{f}\hat{p})| \\ &\leq M h_K^{1/2-\theta+k} |\det(B_K)|^{1/2-1/q} \|f\|_{W_{q_1}(K, x_1, \theta)} \|p\|_{W_{\frac{1}{2}}(K, x_1)} \\ &\leq M h_K^k (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \|f\|_{W_{q_1}^1(K, x_1, 1/2)} \|p\|_{W_{\frac{1}{2}}(K, x_1)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

b) $K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Dans ce cas on procède de la même manière comme avant, mais avec $\theta = 0$ [on utilise (4.3)]. On trouve :

$$\begin{aligned} |E_K(fp)| &\leq M(h_K)^k \left(\sup_K(x_1) / \inf_K f(x_1) \right) (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \times \\ &\quad \times \|f\|_{W_q^k(K, x_1, 1/2)} \|P\|_{W_2^1(K, x_1)} \\ &\leq M(h_K)^k (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \|f\|_{W_q^k(K, x_1, 1/2)} \|P\|_{W_2^1(K, x_1)} \\ &\quad \forall f \in W_q^k(K, x_1, 1/2), \quad \forall P \in P_k(K). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Alors, de (5.22) et (5.23) on déduit :

$$\begin{aligned} |(f, w) - (f, w)_h| &\leq \left| \sum_{\substack{K \in T_h^k \\ K \cap \Gamma_1 \neq \emptyset}} E_K(fw|_K) \right| + \left| \sum_{\substack{K \in T_h^k \\ K \cap \Gamma_1 = \emptyset}} E_K(fw|_K) \right| \\ &\leq Mh^k \sum_{K \in T_h^k} (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \|f\|_{W_q^k(K, x_1, 1/2)} \|P\|_{W_2^1(K, x_1)} \\ &\leq Mh^k \|f\|_{W_q^k(\Omega, x_1, 1/2)} \|w\|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \\ &\leq Mh^k \|f\|_{W_q^k(\Omega, x_1, 1/2)} \|w\|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \\ &\quad \forall f \in W_q^k(\Omega, x_1, 1/2), \quad \forall w \in S_h^k, \quad k = 1, 2. \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

Maintenant il nous suffit de combiner les résultats des lemmes 5.1, lemme 5.2 et (5.7) pour obtenir le :

THÉORÈME 5.1 : *On suppose que la famille $(T_h)_h$ est régulière. En outre si la solution généralisée $u \in \tilde{W}_2^1(\Omega, x_1)$ du problème (5.1) appartient à l'espace $W_2^{k+1}(\Omega, x_1)$, $a_i \in W_\infty^k(\Omega)$ et $f \in W_q^k(\Omega, x_1, 1/2)$ où $q > \frac{2}{k-1/2}$, $k = 1, 2$. Alors, on a :*

$$|u - u_h|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \leq Mh^k \left\{ \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_\infty^k(\Omega)} \|u\|_{W_2^{k+1}(\Omega, x_1)} + |u|_{W_2^{k+1}(\Omega, x_1)} + |f|_{W_q^k(\Omega, x_1, 1/2)} \right\}.$$

6. SUPERCONVERGENCE

Dans ce paragraphe on suppose que Ω est de forme :

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x_i < 1, \quad i = 1, 2 \}.$$

On recouvre $\bar{\Omega}$ par une triangulation uniforme, notée T_h , dont les éléments

[notés K] sont des triangles droits de sommet $b_{1,K} = (x_{1i_1}, x_{2i_2})$, $b_{2,K} = (x_{1i_1+1}, x_{2i_2})$, $b_{3,K} = (x_{1i_1}, x_{2i_2+1})$ où $x_{si_s} = i_s h_s$, $i_s = 0, 1, \dots, N_s$, $h_s = 1/N_s$, $N_s \in \mathbb{N}$. Un exemple d'une telle triangulation est donné sur la figure 6.1. On suppose qu'on a :

$$(\max (h_1, h_2)/\min (h_1, h_2)) \leq M. \tag{6.1}$$

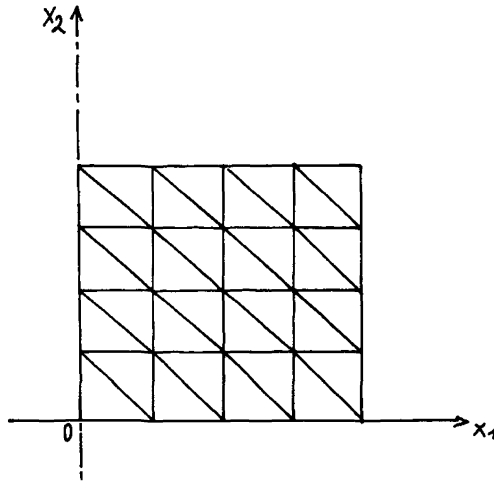


Figure 6.1.

A T_h on associe l'espace fini :

$$S_h = \{ v \in C^0(\overline{\Omega}); v|_K \in P_1(K), v|_{\Gamma'} = 0 \}$$

de degré de liberté les sommets de K , $K \in T_h$. La dimension de S_h est égale au nombre des nœuds de T_h qui ne sont pas situés sur Γ' .

Soit $w \in C^1(\overline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, x_1)$. On définit la norme discrète suivante :

$$\| w \|_{h,\Omega}^* = \left\{ \sum_{K \in T_h} \sum_{1 \leq i < k \leq 3} (x_1^{1/2} Dw(x) (b_{k,K} - b_{i,K}))^2 (b_{i,k}^*) \right\}^{1/2}$$

où
$$b_{i,k}^* = \frac{b_{i,K} + b_{k,K}}{2}.$$

THÉORÈME 6.1 : *Il existe une constante $M > 0$, telle que :*

$$\| u - \Pi_h u \|_{h,\Omega}^* \leq Mh^2 | u |_{W_2^3(\Omega, x_1)}, \quad \forall u \in W_2^3(\Omega, x_1). \tag{6.2}$$

Démonstration : Vu le choix spécial de T_h , la transformation F_K est plus

simple. La matrice B_K et le vecteur b_K sont de la forme :

$$B_K = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad b_K = \begin{pmatrix} l_1 h_1 \\ l_2 h_2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que :

$$Dw(x) (b_{k,K} - b_{i,K}) = D\hat{w}(\hat{x}) (\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}})$$

où $\hat{b}_{i,\hat{K}}$ sont les sommets de triangle de référence \hat{K} . On considère la fonctionnelle linéaire suivante :

$$L(\hat{u}) = D(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{u}) (\hat{b}_{i,k}) (\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}}), \quad \hat{b}_{i,k} = \frac{\hat{b}_{i,\hat{K}} + \hat{b}_{k,\hat{K}}}{2}.$$

a) $K \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset$ [$i_1 = 0$]. D'après $W_2^3(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \hookrightarrow C^1(\hat{K})$, on a :

$$|L(\hat{u})| \leq M \|\hat{u}\|_{W_2^3(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{u} \in W_2^3(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|.$$

D'autre part $L\hat{u} = 0, \forall \hat{u} \in P_2(\hat{K})$. En effet :

$$D\hat{\lambda}_j(\hat{x}) (\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}}) = \delta_{jk} - \hat{\lambda}_j(\hat{b}_{i,\hat{K}}) \quad (6.3)$$

où les fonctions $\hat{\lambda}_j(\hat{x})$ sont les coordonnées barycentriques de \hat{K} par rapport aux sommets $\{\hat{b}_{i,\hat{K}}\}_{i=1}^3$, voir [4, p. 65]. Soit $\hat{u} \in P_2(\hat{K})$, $\hat{u}(\hat{x}) = \sum_{|\alpha| \leq 2} C_\alpha \hat{x}^\alpha$. Si $\hat{b}_{1,\hat{K}} = (0, 0)$, $\hat{b}_{2,\hat{K}} = (1, 0)$ et $\hat{b}_{3,\hat{K}} = (0, 1)$, alors on a $\hat{\lambda}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2$, $\hat{\lambda}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1$, $\hat{\lambda}_3(\hat{x}) = \hat{x}_2$. Par conséquence, d'après (6.3), on déduit :

$$\begin{aligned} D(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{u}) (\hat{x}) (\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}}) &= C_{(1,1)}(\hat{\lambda}_2(\hat{x}) (\delta_{3k} - \hat{\lambda}_3(\hat{b}_{i,\hat{K}})) + \\ &+ \hat{\lambda}_3(\hat{x}) (\delta_{2k} - \hat{\lambda}_2(\hat{b}_{i,\hat{K}})) + C_{(2,0)}(\delta_{2k} - \hat{\lambda}_2(\hat{b}_{i,\hat{K}})) (2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}) - 1) \\ &+ C_{(0,2)}(\delta_{3k} - \hat{\lambda}_3(\hat{b}_{i,\hat{K}})) (2 \hat{\lambda}_3(\hat{x}) - 1) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$[\hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{u} = \hat{u}, \forall \hat{u} \in P_1(\hat{K})]$. D'autre part on a $\hat{b}_{2,1} = (1/2, 0)$, $\hat{b}_{3,2} = (1/2, 1/2)$, $\hat{b}_{3,1} = (0, 1/2)$. Alors de ceci et de (6.4) on vérifie aisément que $L\hat{u} = 0, \forall \hat{u} \in P_2(\hat{K})$. Ainsi, d'après la conséquence 3.1, on obtient :

$$|L(\hat{u})| \leq M \|\hat{u}\|_{W_2^3(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{u} \in W_2^3(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|.$$

D'où :

$$\begin{aligned} |L(\hat{u})| &\leq M \|B_K\|^3 |\det(B_K)|^{-1/2} h_1^{-1/2} \|u\|_{W_2^3(K, x_1)} \\ &\leq M h^2 h_1^{-1/2} \|u\|_{W_2^3(K, x_1)}, \quad \forall u \in W_2^3(K, x_1) \end{aligned} \quad (6.5)$$

où $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$.

b) $K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ [$i_1 \geq 1$]. Dans ce cas on procède de la même manière comme dans a) mais avec $\hat{d}(\hat{x}) = 1$. On obtient :

$$|L(\hat{u})| \leq M \left(\inf_K(x_1) \right)^{-1/2} \|B_K\|^3 |\det(B_K)|^{-1/2} |u|_{W_2^3(K, x_1)},$$

$$\forall u \in W_2^3(K, x_1). \tag{6.6}$$

Alors en combinant (6.5) et (6.6) et en utilisant (4.1)-(4.3), on trouve :

$$\|u - \Pi_h u\|_{h, \Omega}^* \leq M \left\{ \left(\sum_{\substack{K \in T_h \\ K \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset}} h_1 \sum_{1 \leq i < k \leq 3} (D(\hat{u} - \hat{\Pi}_K(\hat{u}))(\hat{b}_{i,k})(\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}}))^2 \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \left(\sum_{\substack{K \in T_h \\ K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset}} \sup_K(x_1) \sum_{1 \leq i < k \leq 3} (D(\hat{u} - \hat{\Pi}_K \hat{u})(\hat{b}_{i,k})(\hat{b}_{k,\hat{K}} - \hat{b}_{i,\hat{K}}))^2 \right)^{1/2} \right\}$$

$$\leq Mh^2 |u|_{W_2^3(\Omega, x_1)}, \quad \forall u \in W_2^3(\Omega, x_1). \tag{C.Q.F.D.}$$

LEMME 6.1 : *Il existe une constante $M > 0$, telle que :*

$$|a(u, v) - a_h(u, v)| \leq Mh^2 \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_\infty^2(\Omega)} \|u\|_{W_2^3(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)},$$

$$\forall a_i \in W_\infty^2(\Omega), \quad \forall u \in W_2^3(\Omega, x_1), \quad \forall v \in S_h. \tag{6.7}$$

Démonstration :

a) $K \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Posons $\hat{\sigma} = \overline{\hat{a}_i(\hat{\partial}_i u)}$, $\hat{\phi} = (\hat{\partial}_i v|_K) \in P_0(\hat{K})$ et majorons \bar{a} forme linéaire :

$$\hat{\sigma} \in W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \rightarrow E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi}), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|, (\hat{x} \in \hat{K}).$$

D'après l'injection continue $W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie et l'inégalité :

$$\int_{\hat{K}} (\hat{\phi})^2 d\hat{x} \leq M \int_{\hat{K}} \hat{d}(\hat{x}) (\hat{\phi}(\hat{x}))^2 d\hat{x}, \quad \forall \hat{\phi} \in P_0(\hat{K})$$

on obtient :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi})| \leq M \sup_K(x_1) \|\hat{\sigma}\|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \|\hat{\phi}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}.$$

D'autre part, $E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi}) = 0, \forall \hat{\sigma} \in P_1(\hat{K})$. Alors, d'après la conséquence 3.1, on

obtient

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi})| \leq M \sup_K(x_1) |\hat{\sigma}|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \|\hat{\phi}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}.$$

D'où, en appliquant (4.1), (4.2) et (6.1) à l'inégalité en haut, on déduit :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi})| &\leq M \sup_K(x_1) \|B_K\|^2 |\det(B_K)|^{-1} (h_1)^{-1} |\sigma|_{W_2^2(K, x_1)} \|\phi\|_{L_2(K, x_1)} \\ &\leq Mh^2 |\det(B_K)|^{-1} |\sigma|_{W_2^2(K, x_1)} \|\phi\|_{L_2(K, x_1)}, \quad \forall \sigma \in W_2^2(K, x_2). \end{aligned} \quad (6.8)$$

b) $K \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Dans ce cas on procède de la même manière comme dans a) pour estimer $E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi})$, mais avec $\hat{d}(\hat{x}) = 1$. On obtient :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{\sigma}\hat{\phi})| &\leq M \sup_K(x_1) |\hat{\sigma}|_{W_2^2(\hat{K})} \|\hat{\phi}\|_{L_2(\hat{K})} \\ &\leq M \sup_K(x_1) \left(\inf_K(x_1)\right)^{-1} \|B_K\|^2 |\det(B_K)|^{-1} |\sigma|_{W_2^2(K, x_1)} \|\phi\|_{L_2(K, x_1)} \\ &\leq Mh^2 |\det(B_K)|^{-1} |\sigma|_{W_2^2(K, x_1)} \|\phi\|_{L_2(K, x_1)} \\ &\quad \forall \phi \in P_0(K), \quad \forall \sigma \in W_2^2(K, x_1). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ici on a utilisé aussi (4.3).

Ainsi d'après (6.8) et (6.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{K \in T_h} E_K \left(\sum_{i=1}^2 a_i \partial_i u \partial_i v|_K \right) \right| &\leq \left| \sum_{\substack{K \in T_h \\ i_1=0}} \det(B_K) E_{\hat{K}} \left(\sum_{i=1}^2 \hat{a}_i(\partial_i u) \hat{(\partial_i v|_K)} \right) \right| + \\ &\quad + \left| \sum_{\substack{K \in T_h \\ i_1 \geq 1}} \det(B_K) E_{\hat{K}} \left(\sum_{i=1}^2 \hat{a}_i(\partial_i u) \hat{(\partial_i v|_K)} \right) \right| \\ &\leq Mh^2 \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_\infty^2(\Omega)} \|u\|_{W_2^2(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \\ &\quad \forall a_i \in W_\infty^2(\Omega), \quad \forall u \in W_2^3(\Omega, x_1), \quad \forall v \in S_h. \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

LEMME 6.2 : *Il existe une constante $M > 0$, telle que :*

$$\begin{aligned} |(f, v) - (f, v)| &\leq Mh^2 \|f\|_{W_2^2(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}, \\ \forall f \in W_2^2(\Omega, x_1), \quad \forall v \in S_h. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Démonstration :

a) $K \cap \bar{\Gamma}_1 \neq \emptyset$. Posons $\hat{\psi} = f\hat{p}$ et majorons la forme linéaire

$$\hat{\psi} \in W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \rightarrow E_{\hat{K}}(\hat{\psi}), \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|.$$

D'après l'injection continue $W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})) \hookrightarrow C^0(\hat{K})$, on a :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| \leq M \sup_K (x_1) \|\hat{\psi}\|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}| [\hat{x} \in \hat{K}].$$

D'autre part $E_{\hat{K}}(\hat{\psi}) = 0, \forall \hat{\psi} \in P_1(\hat{K})$. Alors, d'après la conséquence 3.1, on obtient :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| \leq M \sup_K (x_1) |\hat{\psi}|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \forall \hat{\psi} \in W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x})).$$

Utilisons la formule de Leibnitz et l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie pour majorer $|\hat{\psi}|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}$. On trouve :

$$|\hat{\psi}|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \leq M \sum_{j=0}^1 |f|_{W_2^{2-j}(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} |\hat{p}|_{W_2^j(\hat{K})}.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K})} &\leq M \|\hat{p}\|_{W_2^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}| \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{K}), \\ |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{K})} &\leq M |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))}, \quad \hat{d}(\hat{x}) = \hat{x}_1, |\hat{x}|, \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{K}), \end{aligned}$$

Par conséquence, en utilisant (4.1), (4.2) et (6.1), on déduit :

$$\begin{aligned} |E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| &\leq M \sup_K (x_1) \{ |f|_{W_2^2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} + \\ &\quad + |f|_{W_2^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{K}, \hat{d}(\hat{x}))} \} \\ &\leq M \sup_K (x_1) \|B_K\|^2 |\det(B_K)|^{-1} h^{-1} \|f\|_{W_2^2(K, x_1)} \|p\|_{W_2^1(K, x_1)} \\ &\leq Mh^2 |\det(B_K)|^{-1} \|f\|_{W_2^2(K, x_1)} \|p\|_{W_2^1(K, x_1)} \\ &\quad \forall f \in W_2^2(K, x_1), \quad \forall p \in P_1(K). \end{aligned} \tag{6.11}$$

b) $\hat{K} \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$. Dans ce cas on prend $\hat{d}(\hat{x}) = 1$, dans $E_{\hat{K}}(\hat{\psi})$ et on procède de la même manière comme dans a). On trouve :

$$|E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| \leq \sup_K (x_1) \{ |f|_{W_2^2(\hat{K})} \|\hat{p}\|_{L_2(\hat{K})} + |f|_{W_2^1(\hat{K})} |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{K})} \}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \sup_K (x_1) \left(\inf_K (x_1) \right)^{-1} \|B_K\|^2 |\det(B_K)|^{-1} \|f\|_{W_2^2(K, x_1)} \|p\|_{W_2^1(K, x_1)} \\
&\leq Mh^2 |\det(B_K)|^{-1} \|f\|_{W_2^2(K, x_1)} \|p\|_{W_2^1(K, x_1)} \\
&\quad \forall f \in W_2^2(K, x_1), \quad \forall p \in P_1(K), \quad \forall K \in T_h. \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé aussi (4.3).

Ainsi de (6.11) et (6.12) on déduit :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{K \in T_h} E_K(fv|_K) \right| &\leq \sum_{\substack{K \in T_h \\ i_1=0}} |\det(B_K) E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| + \sum_{\substack{K \in T_h \\ i_1 \geq 1}} |\det(B_K) E_{\hat{K}}(\hat{\psi})| \\
&\leq Mh^2 \|f\|_{W_2^2(\Omega, x_1)} \|v\|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \\
&\leq Mh^2 \|f\|_{W_2^2(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)} \\
&\quad \forall f \in W_2^2(\Omega, x_1), \quad \forall v \in S_h. \tag{C.Q.F.D.}
\end{aligned}$$

PROPOSITION 6.1 : Soit $u \in W_2^1(\Omega, x_1)$. Alors, il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$\int_{\Omega_0} (u(x))^2 dx \leq Mh |\ln h| \|u\|_{W_2^1(\Omega, x_1)}^2 \tag{6.13}$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \frac{1}{x_1} (u(x))^2 dx \leq M |\ln h|^2 \|u\|_{W_2^1(\Omega, x_1)}^2 \tag{6.14}$$

où $\Omega_0 = \{(x_1, x_2) \in \Omega : 0 < x_1 < 2h_1, x_2 > 0\}$.

Démonstration : Nous allons montrer uniquement (6.14). D'une manière analogue on montre (6.13).

Soit $w \in C^1(\Omega)$. Alors, en vertu de l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_1} |w(x)|^2 &= \frac{1}{x_1} \left| - \int_{x_1}^1 \frac{\partial w}{\partial t}(t, x_2) dt + w(1, x_2) \right|^2 \\
&\leq -2((\ln(x_1))/x_1) \int_0^1 x_1 \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 + \frac{2}{x_1} |w(1, x_2)|^2
\end{aligned}$$

Intégrons l'inégalité en haut en $(x_1, x_2) \in \Omega \setminus \Omega_0$ et appliquons l'inégalité :

$$\int_{\Gamma'} x_1 |w(x)|^2 d\Gamma' \leq M \|w\|_{W_2^1(\Omega, x_1)}^2, \quad \forall w \in W_2^1(\Omega, x_1).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \Omega_0} (1/x_1) |w(x)|^2 dx &\leq -2 \int_{2h_1}^1 \frac{\ln(x_1)}{x_1} dx_1 \int_{\Omega} x_1 \left| \frac{\partial w(x)}{\partial x_1} \right|^2 dx + \\ &\quad + 2 \int_{2h_1}^1 \frac{1}{x_1} dx_1 \cdot \int_0^1 |w(1, x_2)|^2 dx_2 \\ &\leq M |\ln h|^2 \|w\|_{W_{\frac{1}{2}}^2(\Omega, x_1)}^2. \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration, il nous reste qu'à utiliser la densité de $\tilde{W}_{\frac{1}{2}}^1(\Omega, x_1)$ dans $W_{\frac{1}{2}}^1(\Omega, x_1)$. C.Q.F.D.

La proposition en haut joue un rôle fondamental dans la démonstration du lemme qui suit.

LEMME 6.3 : Il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$\begin{aligned} |a(u - \Pi_h u, v)| &\leq M h^2 |\ln h| \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_{\infty}^2(\Omega)} \|u\|_{W_{\frac{3}{2}}^3(\Omega, x_1)} |v|_{W_{\frac{1}{2}}^2(\Omega, x_1)} \\ \forall u \in W_{\frac{3}{2}}^3(\Omega, x_1), \quad \forall a_i \in W_{\infty}^2(\Omega), \quad \forall v \in S_h. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Démonstration : Puisque $v|_{\Gamma'} = 0$, alors la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a(w, v) &= \sum_{S^1} \int_{S^1} x_1 a_1 \partial_1 w \partial_1 v dx + \sum_{S^2} \int_{S^2} x_1 a_2 \partial_2 w \partial_2 v dx \\ &\quad + \sum_{K \in T_h^0} \int_K x_1 a_2 \partial_2 w \partial_2 v dx \end{aligned}$$

où S^α est l'ensemble de deux triangles adjacents dont le côté commun est parallèle à l'axe Ox_α , $\alpha = 1, 2$ [voir fig. 6.2], T_h^0 -ensemble des éléments de T_h dont un côté se trouve sur $\bar{\Gamma}_1$.

Soient \hat{S}^α , $\alpha = 1, 2$, deux parallélogrammes de référence dans R^2 de sommets respectivement $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, -1)$ et $(0, 0), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0)$, voir figure 6.2. Il existe une application affine F_S de la forme :

$$F_S : \hat{x} \in \hat{S}^\alpha \rightarrow F_{S^\alpha}(\hat{x}) = B_{S^\alpha} \hat{x} + b_{S^\alpha} \in S^\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

$$B_{S^\alpha} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}, \quad b_{S^\alpha} = \begin{pmatrix} i_1 h_1 \\ i_2 h_2 \end{pmatrix}$$

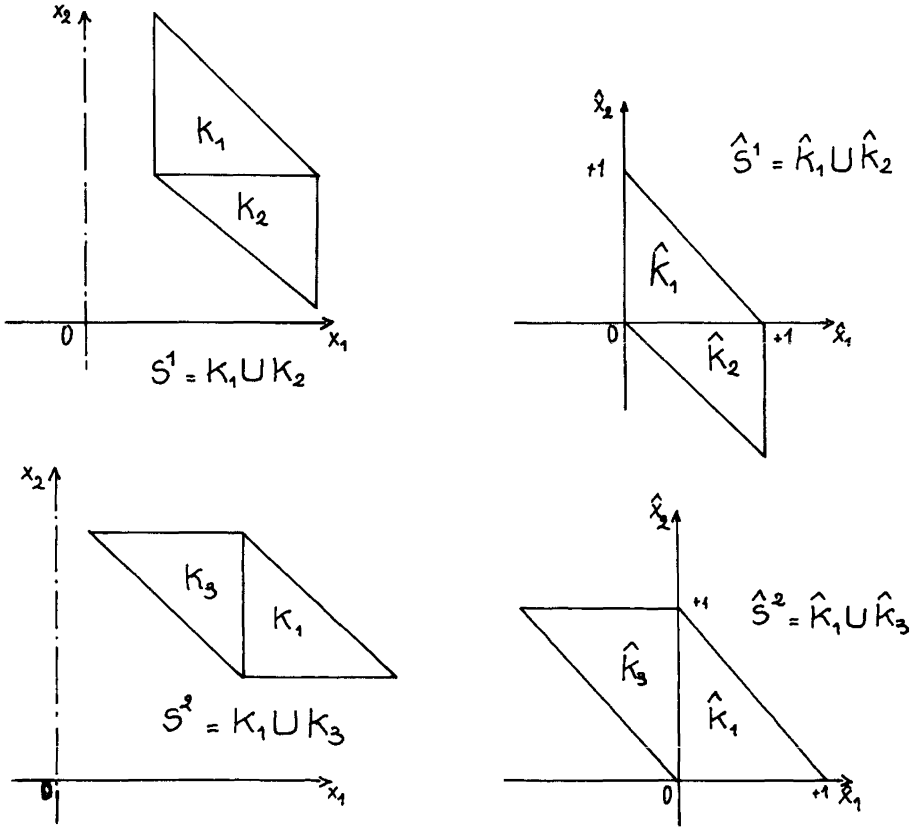


Figure 6.2.

telle que $F_{S^\alpha}(\hat{S}^\alpha) = S^\alpha$. Alors, on a :

$$\int_{S^\alpha} x_1 \partial_\alpha w \partial_\alpha v |_{S^\alpha} dx = h_1 \int_{\hat{S}^\alpha} (\hat{x}_1 + i_1) \partial_\alpha \hat{w} \partial_\alpha \hat{p} d\hat{x} \cdot \det(B_{S^\alpha}) h_\alpha^{-2}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$\int_{K \in T_h^0} x_1 \partial_2 w \partial_2 v |_K dx = h_1 \int_{\hat{K}} (\hat{x}_1 + i_1) \partial_\alpha \hat{w} \partial_\alpha \hat{p} d\hat{x}.$$

Majorons

$$\int_{\hat{S}^\alpha} (\hat{x}_1 + i_1) \partial_\alpha \hat{w} \partial_\alpha \hat{p} d\hat{x}, \quad \alpha = 1, 2.$$

On montre aisément qu'il existe des constantes ϵ_α et ϵ'_α , ne dépendant pas de i_1

et de i_2 et telles que, les fonctionnelles linéaires :

$$L_\alpha(\hat{u}) = \int_{\hat{S}^\alpha} (\hat{x}_1 + i_1) \partial_\alpha(\hat{u} - \hat{\Pi}_K \hat{u}) \partial_\alpha \hat{p} \, d\hat{x} + \varepsilon_\alpha \int_{\hat{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_\alpha^2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_\alpha} \, d\hat{x} + \varepsilon'_\alpha \int_{\hat{S}^\alpha} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_\alpha} \, d\hat{x}, \quad \alpha = 1, 2,$$

s'annulent pour $\hat{u} \in P_2(\hat{S}^\alpha)$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} |L_\alpha(\hat{u})| &\leq M(1 + i_1) \|\hat{u}\|_{W_2^3(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1)} |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1)}, \\ \forall \hat{u} \in W_2^3(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1), \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{S}^\alpha), \quad \alpha &= 1, 2. \end{aligned}$$

Alors, d'après la conséquence 3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} |L_\alpha(\hat{u})| &\leq M(1 + i_1) |\hat{u}|_{W_2^3(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1)} |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1)} \\ \forall \hat{u} \in W_2^3(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1), \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{S}^\alpha), \quad \alpha &= 1, 2. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Du théorème 4.1, on déduit :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\hat{K}} \hat{x}_1 \partial_2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{u}) \partial_2 \hat{p} \, d\hat{x} \right| &\leq M |\hat{u}|_{W_2^2(\hat{K})} |\hat{p}|_{W_2^1(\hat{K}, x_1)} \\ \forall \hat{u} \in W_2^2(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{K}), \quad \hat{K} &= F_K^{-1}(K), \quad K \in T_h^0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Puisque $a \in W_\infty^2(\Omega)$, alors on peut écrire :

$$\hat{a}_\alpha(\hat{x}) = \hat{a}_\alpha^0 + 0(h), \quad \hat{a}_\alpha^0 = \hat{a}_\alpha(0, 0).$$

Par conséquence on obtient :

$$\begin{aligned} a(u - \Pi_h u, v) &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{S^\alpha} \hat{a}_\alpha^0 \det(B_{S^\alpha}) h_\alpha^{-2} h_1 (L_\alpha(\hat{u}) - H_\alpha(\hat{u})) + \\ &+ \sum_{\substack{K \in T_h^0 \\ \{i_1=0\}}} \det(B^K) h_2^{-2} h_1 \int_{\hat{K}} \hat{x}_1 \hat{a}_2 \partial_2(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{K}} \hat{u}) \partial_2 \hat{p} \, d\hat{x} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{S^\alpha} \det(B_{S^\alpha}) h_\alpha^{-2} h_1 \int_{\hat{S}^\alpha} (\hat{x}_1 + i_1) 0(h) \partial_\alpha(\hat{u} - \hat{\Pi}_{\hat{S}^\alpha} \hat{u}) \partial_\alpha \hat{p} \, d\hat{x} \end{aligned} \tag{6.18}$$

où

$$H_\alpha(\hat{u}) = \int_{\hat{S}^\alpha} \left(\varepsilon_\alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_\alpha^2} + \varepsilon'_\alpha \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}_1 \partial \hat{x}_2} \right) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}_\alpha} \, d\hat{x}, \quad \hat{\Pi}_{\hat{S}^\alpha} \hat{u} = \widehat{\Pi_h u}|_{S^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

D'autre part, on a :

$$\|\hat{w}\|_{W_2^3(\hat{S}^\alpha, \hat{x}_1, \theta)} \leq M \begin{cases} \|B_{S^\alpha}\|^s |\det(B_{S^\alpha})|^{-1/2} h_1^{-\theta} |w|_{W_2^s(S^\alpha, x_1)}, & i_1 = 0 \\ \frac{1}{(i_1 h_1)^\theta} \|B_{S^\alpha}\|^s |\det(B_{S^\alpha})|^{-1/2} |w|_{W_2^s(S^\alpha, x_1)}, & i_1 \geq 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

De-(6.13) et (6.14), on déduit :

$$h \left| \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{S^\alpha} H_\alpha(\hat{u}) \right| \leq M h^2 \cdot |\ln h| \|u\|_{W_2^3(\Omega, x_1)} |v|_{W_2^1(\Omega, x_1)}. \quad (6.20)$$

Ainsi, de (6.16)-(6.20), on obtient (6.15).

C.Q.F.D.

Des lemme 6.1-lemme 6.3, on déduit le résultat principal de ce paragraphe :

6.1 : Soit $(T_h)_h$ une famille uniforme vérifiant (6.1). Alors, il existe une constante $M > 0$, telle que :

$$\forall u \in W_2^3(\Omega, x_1), \quad \forall f \in W_2^2(\Omega, x_1), \quad \forall a_i \in W_\infty^2(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

on a :

$$\|u - u_h\|_{h, \Omega}^* \leq M h^2 |\ln h| \left\{ \sum_{i=1}^2 \|a_i\|_{W_\infty^2(\Omega)} \|u\|_{W_2^3(\Omega, x_1)} + \right. \\ \left. + |u|_{W_2^3(\Omega, x_1)} + \|f\|_{W_2^2(\Omega, x_1)} \right\}.$$

Remarque 6.1 : Le résultat du théorème 6.1 peut être amélioré par rapport à la norme discrète suivante :

$$\|w\|_{h, \Omega}^* = \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x_{S^\alpha}^* \in S^\alpha} \text{mes}(S^\alpha) \left(x_1^{1/2} \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right)^2 (x_{S^\alpha}^*) + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{x_K^* \in K \\ K \in T_h^k}} \text{mes}(K) \left(x_1^{1/2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 (x_K^*) \right\}^{1/2}$$

où

$$x_G^* = (x_{1,G}^*, x_{2,G}^*), \quad x_{\alpha,G}^* = \frac{\int_G x_1 x_\alpha dx}{\int_G x_1 dx}$$

On obtient une estimation de type superconvergence de gradient d'ordre $0(h^2)$. Ce résultat sera publié ailleurs.

Remerciement.

Je remercie le Professeur R. D. Lazarov pour l'aide morale qu'il m'a apportée pour obtenir les résultats de cet article.

REFERENCES

- [1] J. H. BRAMBLE, S. R. HILBERT, *Estimation of linear functional on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*. SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970).
- [2] J. H. BRAMBLE, S. R. HILBERT, *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation*. Numer. Math. 16 (1971).
- [3] L. CERMAK, M. ZLAMAL, *Transformation of dependant variables and the finite element method of nonlinear evolution equation*. Inter. J. for Numer. Meth. in Enging. 15 (1980) 1.
- [4] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*. North-Holland, 1976.
- [5] T. DUPONT, R. SCOTT, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*. Math. Comp. 34 (1980) 150.
- [6] L. V. KANTOROVICH G. P. AKILOV, *Analyse fonctionnelle*. Izd. Nayka, 1981, tome 1 [en français].
- [7] M. KRIZEK, P. NEITANMAKI, *Superconvergence phenomenon in finite element method arising from averaging gradients*. Numer. Math. 43 (1984).
- [8] A. KUFNER, *Weighted Sobolev spaces*. Teubner-Texte Zur Mathematik, Band 31, Leipzig, 1980.
- [9] L. A. OGANESSIAN, L. A. ROUKHOVETZ, *Variational-difference method of solving elliptic problems*. Erevan, 1979, pp. 252-281 [en russe].