M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
- MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

P. OLIVIER
Q. I. RAHMAN

Sur une formule de quadrature pour des fonctions entières

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, nº 3 (1986), p. 517-537

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_517_0>

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol 20, n° 3, 1986, p 517 à 537)

SUR UNE FORMULE DE QUADRATURE POUR DES FONCTIONS ENTIÈRES (*)

par P. OLIVIER (1) et Q. I. RAHMAN (1)

Communiqué par R S VARGA

Resumé — *Soient m un entier impair et* $\sigma > 0$ *De plus, soit* $a_{0\,0} = 1$ *et pour* $m > 1, 0 \leqslant \mu \leqslant m-1$, *soit* $a_{\mu\, m-1} = \frac{1}{\mu!}\psi^{(\mu)}(0)$ *où* $\psi(z) = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1+\frac{z^2}{\mu^2}\right)$ *Nous demontrons que si f est une fonction entière de type exponentiel* $\tau < (m+1)\sigma$ *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma}\sum_{\substack{\mu=0\\ \mu\ pair}}^{m-1}\frac{1}{(2\sigma)^{\mu}}a_{\mu,m-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

pourvu que l'intégrale (prise au sens de Cauchy) a gauche et les $(m+1)/2$ *séries à droite soient convergentes La formule de quadrature reste vraie pour les fonctions entières d'ordre* 1 *et de type* $(m+1)\sigma$ *appartenant à* $L^1(-\infty, +\infty)$

Abstract. — *Let m be an odd integer and* $\sigma > 0$ *Further, let* $a_{0\,0} = 1$ *whereas for* $m > 1$ *and* $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ *let* $a_{\mu\, m-1} = \frac{1}{\mu!}\psi^{(\mu)}(0)$ *where* $\psi(z) = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1+\frac{z^2}{\mu^2}\right)$ *We prove that if f is an entire function of exponential type* $\tau < (m+1)\sigma$, *then*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma}\sum_{\substack{\mu=0\\ \mu\ even}}^{m-1}\frac{1}{(2\sigma)^{\mu}}a_{\mu,m-1}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

provided the integral on the left (taken in the sense of Cauchy) and the $(m+1)/2$ *series on the right are convergent The quadrature formula remains valid for entire functions of order* 1 *type* $(m+1)\sigma$ *belonging to* $L^1(-\infty, +\infty)$

(*) Reçu en novembre 1985

(1) Département de Mathematiques et de Statistique, Université de Montréal, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada

1. INTRODUCTION

1.1. Comme démontré par Gauss, l'intégrale d'un polynôme de degré $< 2n$ sur l'intervalle $[-1, +1]$ est exactement évaluée par les valeurs du polynôme en n points particuliers bien qu'il faille $2n$ points pour déterminer le polynôme lui-même. Ces n points sont les zéros du n-ième polynôme de Legendre. Plus généralement Turán [12] a démontré la formule

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_\nu^{(\mu)} f^{(\mu)}(x_\nu) \tag{1}$$

valide pour tout polynôme f de degré $< (m+1)\,n$ lorsque m est impair et les x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sont les zéros du polynôme $\pi_{n,m+1}$ qui, parmi tous les polynômes p de la forme $x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$, minimise l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |p(x)|^{m+1}\,dx$. Le cas $m = 1$ est compatible avec celui de Gauss car il est connu [10, Théorème 3.1.2] que le polynôme de Legendre minimise l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |p(x)|^2\,dx$ lorsque p est de la forme $x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$. La formule de quadrature plus générale du type

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,w(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu f(x_\nu)$$

faisant intervenir une fonction poids [10, Théorème 3.4.1] peut aussi être étendue de façon analogue. Par exemple [12, Théorème 2] la formule

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_\nu^{(\mu)} f^{(\mu)}\left(\cos\left(\frac{2\nu-1}{2n}\pi\right)\right) \tag{2}$$

est valide pour tout polynôme f de degré $< (m+1)\,n$ avec m impair.

Pour les fonctions entières de type exponentiel, il existe une situation analogue. Selon un théorème d'unicité de F. Carlson [1, Théorème 9.2.1], une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ est complètement déterminée par ses valeurs en tous les entiers ; l'exemple $\sin \pi z$ montre que cela ne peut être étendu au type exponentiel π. Rappelons maintenant la formule classique dite de Poisson de la théorie de l'intégrale de Fourier :

Si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} F(t)\,dt$$

et

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x)\, dx$$

alors (*voir* [11, p. 60] *et aussi* [2])

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\nu) = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(2\pi\nu).$$

Grâce au théorème de Paley et Wiener [1, Théorème 6.8.1] cette formule implique que l'intégrale sur $(-\infty, +\infty)$ d'une fonction entière f de $L^1(-\infty, +\infty)$ de type exponentiel 2π est exactement évaluée par les valeurs de f en tous les entiers. Plus précisément nous avons :

THÉORÈME A : *Soit f une fonction entière de type exponentiel 2π dans $L^1(-\infty, +\infty)$. Nous avons alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f(\nu).$$

Une généralisation de ce théorème, analogue à (1) découle du travail de Kress [9].

THÉORÈME B : *Soit m impair et f une fonction entière de type exponentiel $\tau < (m+1)\pi$ dans $L^1(-\infty, +\infty)$. Nous avons alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\pi)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}(\nu) \tag{3}$$

où $a_{0,0} = 1$ tandis que pour $m > 1$ les $a_{\mu,m-1}$ sont donnés par :

$$\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} a_{\mu,m-1} z^\mu = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2} \left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right). \tag{4}$$

1.2. Remarquons que dans le cas $m = 1$, d'après le Théorème A, la formule (3) reste vraie pour des fonctions entières d'ordre 1 et de type 2π. Il est naturel de se demander si pour un entier impair m quelconque la formule (3) reste vraie aussi pour des fonctions entières d'ordre 1 et de type $(m+1)\pi$. Nous démontrerons que c'est effectivement le cas.

Quant à la portée du Théorème B elle est considérablement diminuée en exigeant l'intégrabilité au sens de Lebesgue puisque cela exclut la possibilité d'évaluer beaucoup d'intégrales familières comme par exemple

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

Par conséquent nous allons chercher les conditions sous lesquelles (3) reste vraie lorsque l'intégrale est prise au « sens de Cauchy », ce qui serait suffisamment général Rappelons que f est dite intégrable au sens de Cauchy sur $(-\infty, +\infty)$ si elle est intégrable sur $(0, X)$ et $(-X, 0)$ pour tout $X > 0$ et si $I_1 = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X f(x)\, dx$ et $I_2 = \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^0 f(x)\, dx$ existent Comme dans [11, § 1 7] nous notons I_1 et I_2 par $\int_0^{\to +\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{\to -\infty}^0 f(x)\, dx$ respectivement et leur somme (appelée l'intégrale de Cauchy de f sur $(-\infty, +\infty)$) par

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx \tag{5}$$

La notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est réservée pour l'intégrale au sens de Lebesgue de f sur $(-\infty, +\infty)$ Il est clair que *si* $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ *alors* (5) *est convergente et*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

La convergence de $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu$ se définit de façon analogue

Nous sommes maintenant prêts pour énoncer nos résultats

THÉORÈME 1 *Soient m un entier impair et $\sigma > 0$ Si f est une fonction entiere de type exponentiel $\tau < (m+1)\sigma$ alors nous avons*

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu\, m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \tag{6}$$

pourvu que l'intégrale et les $(m+1)/2$ séries dans (6) *soient convergentes*

Comme application évaluons $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} \frac{\sin(\sigma x)}{x} dx$. Considérons $\frac{\sin(\sigma z)}{z}$ comme une fonction entière de type exponentiel $< 2\sigma$ et appliquons le Théorème 1 avec $m = 1$. La formule (6) donne alors le résultat :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} \frac{\sin(\sigma x)}{x} dx = \pi .$$

Si $f(z) := \frac{\sin^m(\sigma z)}{z}(1 - \cos(\sigma z))$ alors $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = \binom{m}{(m+1)/2} 2^{-m}.\pi$ pendant que $\sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) = 0$. Ainsi :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx \neq \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right).$$

Donc $\tau = (m + 1)\sigma$ n'est pas acceptable dans le Théorème 1.

Remarquons que la fonction $f(z) := \frac{\sin^m(\sigma z)}{z}(1 - \cos(\sigma z))$ *n'appartient pas à* $L^1(-\infty, +\infty)$. En réalité nous avons :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| f\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2\sigma}\right) \right| = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2}{2\nu - 1} \frac{\sigma}{\pi} >$$

$$> \left\{ \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n}\right) \right\} \frac{\sigma}{\pi}$$

ce qui démontre que $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| f\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2\sigma}\right) \right|$ diverge et donc que, par le Lemme 4, $f \notin L^1(-\infty, +\infty)$. Nous montrerons que la formule (6) a aussi lieu pour les fonctions f d'ordre 1 et de type $(m + 1)\sigma$ qui appartiennent à $L^1(-\infty, +\infty)$. En d'autres termes nous avons

THÉORÈME 2 : *La formule* (6) *est aussi vraie pour toutes les fonctions entières* f *de type exponentiel* $(m + 1)\sigma$ *qui appartiennent à* $L^1(-\infty, +\infty)$.

Dans le cas $m = 3$ et $\sigma = \pi$ grâce aux Théorèmes 1 et 2 nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE : *Si* f *est une fonction entière de type exponentiel* $\tau < 4\pi$ *et si* $f(n) = f''(n) = 0$ *pour* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *alors* $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\, dx = 0$, *lorsque*

cette intégrale existe La même conclusion est vraie pour des fonctions d'ordre 1 *et de type* 4 π *qui appartiennent à* $L^1(-\infty, +\infty)$

Le corollaire met en évidence une situation dans laquelle la connaissance de l'ensemble des valeurs

$$S_1 = \{f(n), f''(n) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \}$$

peut être plus importante que celle de l'ensemble des valeurs

$$S_2 = \{f(n), f'(n) \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \}$$

car pour une fonction entière quelconque f de type exponentiel 4 π appartenant à $L^1(-\infty, +\infty)$, S_1 détermine complètement $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ alors que S_2 ne le fait pas comme l'exemple $f(z) = \left(\frac{\sin(\varepsilon z)}{\varepsilon z}\right)^2 \sin^2(\pi z)$ $(0 < \varepsilon \leqslant \pi)$ le montre Cette remarque fournit une motivation pour l'étude de l'interpolation (0, 2) par des fonctions entières de type exponentiel [4, 5, 6]

2. RÉSULTATS AUXILIAIRES

2.1. Dans le but de démontrer nos résultats nous remarquons qu'il est possible de déduire la formule (3) à partir de (2) par une méthode d'approximation développée par Hormander [8] Notons d'abord que (2) est équivalent à

LEMME 1 *Soit t un polynôme trigonométrique de degré* $< (m + 1)\, n$ *avec m impair et* $n \geqslant 1$ *Nous avons alors*

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2n)^\mu} a_{\mu\, m-1} \sum_{\nu=-n+1}^{n} t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}\right) \tag{7}$$

ou les coefficients $a_{\mu, m-1}$ *sont définis dans le Théorème B*

Démonstration De manière evidente il suffit de démontrer (7) pour les polynômes trigonométriques pairs La formule (2) se traduit facilement en

$$\int_{-\pi}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = 2 \int_{0}^{\pi} t(\theta)\, d\theta = 2 \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=1}^{n} \Lambda_\nu^{(\mu)}\, t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}\right)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=-n+1}^{n} \Lambda_\nu^{(\mu)}\, t^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}\right)$$

valide pour tout polynôme trigonométrique pair $t(\theta) = f(\cos\theta)$ de degré $< (m+1)n$. L'existence d'un polynôme trigonométrique pair :

$$A_{j,k}(\theta) := \sum_{l=0}^{(m+1)n-1} \alpha_l \cos l\theta$$

où $1 \leqslant j \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant m-1$ sont fixées, de degré $< (m+1)n$ tel que

$$A_{j,k}^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) = \delta_{j,\nu}\,\delta_{k,\mu} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n,\ 0 \leqslant \mu \leqslant m-1)$$

est déduite des travaux d'Hermite [7]. En posant $t(\theta) = A_{j,k}(\theta)$ dans les précédentes égalités nous obtenons :

$$\pi\alpha_0 = \int_0^\pi A_{j,k}(\theta)\,d\theta = \Lambda_j^{(k)}.$$

Le calcul de α_0 se fait en additionnant les n égalités :

$$A_{j,k}^{(\mu)}\left(\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) = \delta_{j,\nu}\,\delta_{k,\mu} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant n).$$

Ainsi pour $\mu = 0$ nous avons :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=0}^{(m+1)n-1} \alpha_l \cos\left(l\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) = \delta_{k,0},$$

i.e. :

$$\sum_{l=0}^{(m-1)/2} (-1)^l \alpha_{2nl} = \frac{1}{n}\delta_{k,0}.$$

Dans le cas $m = 1$ cette formule donne $\alpha_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{n}a_{0,0}$ et donc $\Lambda_j^{(0)} = \frac{\pi}{n}a_{0,0}$.
Dans le cas $m > 1$ nous obtenons pour chaque μ pair de 2 à $m-1$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{(m+1)n-1} (-1)^{\mu/2} l^\mu \alpha_l \cos\left(l\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}\right) = \delta_{k,\mu},$$

i.e. :

$$\sum_{l=1}^{(m-1)/2} l^\mu(-1)^l \alpha_{2nl} = \frac{1}{n}(-1)^{\mu/2}\frac{1}{(2n)^\mu}\delta_{k,\mu}.$$

Il s'agit là de $(m+1)/2$ équations, obtenues pour chaque μ pair entre 0 et $m-1$, dont les $(m+1)/2$ inconnues sont $\{(-1)^l \alpha_{2nl}\}_{l=0}^{(m-1)/2}$. Le déterminant

de ce système est égal à :

$$D(0) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Comme il est différent de zéro, la solution du système est unique et en particulier α_0 s'écrit :

$$\alpha_0 := \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\delta_{k,0} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1}{n}(-1)\frac{1}{(2n)^2}\delta_{k,2} & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{n}(-1)^2\frac{1}{(2n)^4}\delta_{k,4} & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n}(-1)^{(m-1)/2}\frac{1}{(2n)^{m-1}}\delta_{k,m-1} & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix} / D(0).$$

Si k est impair entre 0 et $m-1$ alors $\alpha_0 = 0$ et donc $\Lambda_j^{(k)} = 0$ pour j de 1 à n.

Si k $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ est pair alors α_0 s'écrit :

$$\alpha_0 = \frac{1}{D(0)}(-1)^{k/2}\frac{1}{n}\frac{1}{(2n)^k}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ 0 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 2^k & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^k \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

Or $n(2n)^k\,\alpha_0$ peut être considéré comme le coefficient de z^k dans le développement de $\dfrac{D(z)}{D(0)}$ où :

$$D(z) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (-1)\,z^2 & 1 & 2^2 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \\ (-1)^2\,z^4 & 1 & 2^4 & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^4 \\ \vdots & & & & \\ (-1)^{(m-1)/2}\,z^{m-1} & 1 & 2^{m-1} & \dots & \left(\frac{m-1}{2}\right)^{m-1} \end{vmatrix}.$$

En remarquant que $z = \pm\, i\mu$ $(1 \leqslant \mu \leqslant (m-1)/2)$ sont racines de $D(z)$ nous avons :

$$\frac{D(z)}{D(0)} = \prod_{\mu=1}^{(m-1)/2}\left(1 + \frac{z^2}{\mu^2}\right).$$

En raison de (4), nous obtenons alors $\alpha_0 = \frac{1}{n}\frac{1}{(2n)^k} a_{k,m-1}$ et donc

$$\Lambda_j^{(k)} = \frac{\pi}{n}\frac{1}{(2n)^k} a_{k,m-1} \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

2.2. Les deux lemmes qui suivent sont démontrés dans [3].

LEMME 2 : *La convergence de* (5) *pour une fonction entière f de type exponentiel implique que « $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$ » et que « $f(x)$ est bornée sur l'axe réel ».*

LEMME 3 : *Soit :*

$$\varphi(z) := \left(\frac{\sin \pi z}{\pi z}\right)^2 . \tag{8}$$

Si pour une fonction f donnée l'intégrale $\int_0^{\to +\infty} f(x)\,dx$ est convergente alors $\int_0^{\to +\infty} \varphi(hx)\, f(x)\,dx$ converge pour tout $h \in \mathbb{R}$ et :

$$\lim_{h \to 0} \int_0^{\to +\infty} \varphi(hx)\, f(x)\,dx = \int_0^{\to +\infty} f(x)\,dx \tag{9}$$

pourvu que f soit bornée sur $[0, +\infty)$.

Nous aurons besoin à plusieurs reprises d'une certaine inégalité de Plancherel et Pólya qui s'énonce sous la forme

LEMME 4 [1, Théorème 6.7.15] : *Si f est une fonction entière de type exponentiel τ appartenant à $L^1(-\infty, +\infty)$ alors :*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |\, f(\lambda_\nu)\,| \leqslant 2(\pi\delta)^{-1} e^{\tau\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(x)\,|\,dx \tag{10}$$

pour toute suite réelle croissante $\{\lambda_\nu\}$ telle que $\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu \geqslant 2\delta$.

Il nous paraît utile de citer aussi le résultat suivant.

LEMME 5 [1, Théorème 11.3.1] : *Si f est une fonction entière de type exponentiel τ appartenant à $L^1(-\infty, +\infty)$ alors $f' \in L^1(-\infty, +\infty)$ aussi et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, f'(x)\,|\,dx \leqslant \tau \int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(x)\,|\,dx .$$

Ainsi les séries dans (6) sont toutes *nécessairement* convergentes si le membre de gauche existe en tant qu'intégrale de Lebesgue

Le Lemme 6 sera une version généralisée d'un lemme démontré dans [3]

LEMME 6 *Soit* φ *définie comme dans Lemme* 3 *Alors pour tout* $\alpha > 0$ *et tout entier* $k \geqslant 0$ *nous avons*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k)}((\nu+1)\alpha) - \varphi^{(k)}(\nu\alpha) \right| \leqslant (2\pi)^{k+1} \tag{11}$$

Démonstration D'après le théorème fondamental du calcul intégral:

$$\begin{aligned} S := \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k)}((\nu+1)\alpha) - \varphi^{(k)}(\nu\alpha) \right| &= \alpha \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{\nu}^{\nu+1} \varphi^{(k+1)}(\alpha x)\, dx \right| \\ &\leqslant \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k+1)}(\alpha x) \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(k+1)}(x) \right| dx \end{aligned}$$

La fonction entière φ est de type exponentiel 2π et appartient à $L^1(-\infty, +\infty)$. Donc par le Lemme 5 nous avons :

$$S \leqslant (2\pi)^{k+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi(x) \right| dx = (2\pi)^{k+1}$$

2.3. Notons par $\mathscr{R}_\tau$ l'ensemble des fonctions entières f de type exponentiel τ telles que $f(x)$ soit réel et dans $[-1, +1]$ quand x est réel Soit φ définie comme dans le Lemme 3 Pour une fonction quelconque f de $\mathscr{R}_\tau$ et $h > 0$ posons :

$$f_h(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi(hz + \nu)\, f(z + \nu h^{-1}) \tag{12}$$

Comme cela est déjà mentionné dans [8] f_h *est périodique de période* h^{-1} et s'écrit sous la forme

$$f_h(z) = \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu\, e^{2\pi i \nu h z} \quad \left(N = \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n \geqslant \frac{\tau}{2\pi h} \right\} \right)$$

De plus $f_h(z) \to f(z)$ *uniformément sur tout borné du plan complexe* De l'identité :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi(z + \nu) \equiv 1$$

il découle que :

$$-1 \leqslant f_h(x) \leqslant 1 \tag{13}$$

pour tout x réel. Voici maintenant le dernier résultat auxiliaire :

LEMME 7 : *Soit f une fonction dans $\mathscr{R}_\tau$ satisfaisant à :*

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{14}$$

avec $M > 0$. Si f_h est définie comme en (12) *alors il existe une constante M^* ne dépendant que de M, m et τ telle que :*

$$|f_h^{(k)}(x)| < \frac{M^*}{1+x^2} \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant |x| \leqslant \frac{1}{2h}, \quad 0 < h \leqslant 1$$
$$\textit{et} \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1. \tag{15}$$

Démonstration : Une simple application du théorème de Bernstein [1, Théorème 11.1.2] à $(1+z^2)f(z)$ nous donne $|f^{(k)}(x)| \leqslant \dfrac{M(\tau+1)^k}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. De plus $|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant (2\pi)^k$. Donc nous avons

$$\begin{aligned}|f_h^{(k)}(x)| &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{k-j} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} |f^{(j)}(x+\nu h^{-1})\, \varphi^{(k-j)}(hx+\nu)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{k-j} M(\tau+1)^j (2\pi)^{k-j} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+\nu h^{-1})^2}.\end{aligned}$$

Maintenant si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2h}$ alors pour $\nu \geqslant 0$

$$(x+\nu h^{-1})^2 \geqslant x^2 + (\nu h^{-1})^2$$

et pour $\nu \leqslant -1$

$$(x+\nu h^{-1})^2 \geqslant \{x + (|\nu|-1)h^{-1}\}^2,$$

d'où (15) découle facilement pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2h}\right]$. A cause de la symétrie la même estimation est vraie aussi pour $x \in \left[-\dfrac{1}{2h}, 0\right)$.

3. PREUVES DES THÉORÈMES 1 ET 2

3.1. Soit f une fonction entière de type exponentiel $\tau > 0$ telle que (5) soit convergente. Selon le Lemme 2 la fonction f doit être bornée sur l'axe réel. Sans perdre la généralité nous pouvons supposer

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| = 1 .$$

Grâce au Lemme 3 nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx &= \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(hx) f(x)\,dx \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}}^{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}} \varphi(hx) f(x)\,dx \\
&= \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2h}}^{+\frac{1}{2h}} \varphi(hx+\nu) f(x+\nu h^{-1})\,dx \\
&= \lim_{h\to 0} \int_{-\frac{1}{2h}}^{+\frac{1}{2h}} f_h(x)\,dx \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi h} \int_{-\pi}^{+\pi} f_h\left(\frac{x}{2\pi h}\right) dx .
\end{aligned}$$

Dorénavant nous allons supposer que $\dfrac{\tau}{2\pi h}$ *est un entier positif.* Pour $h := \dfrac{\tau}{2\pi} \dfrac{1}{(m+1)n-1}$ la fonction $f_h\left(\dfrac{x}{2\pi h}\right)$ est un polynôme trigonométrique de degré $(m+1)n-1$ et ainsi grâce à la formule (7) :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f_h\left(\frac{x}{2\pi h}\right) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2n)^\mu} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-n+1}^{n} \left(\frac{d^\mu}{dx^\mu} f\left(\frac{x}{2\pi h}\right)\right)_{x=\frac{(2\nu-1)\pi}{2n}} .$$

Nous obtenons ainsi :

$$\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} \frac{(m+1)\pi}{\tau + 4\pi h} \sum_{\substack{\mu=0\\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2}\,\frac{1}{\tau+4\pi h}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-n+1}^{n} f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau+4\pi h}\right). \quad (16)$$

3.2. Supposons maintenant que f satisfait (14). Alors en utilisant les Lemmes 4 et 5 nous déduisons que pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tel que :

$$\sum_{|\nu|>n_1} \left| f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right| < \varepsilon \quad (0 \leqslant \mu \leqslant m-1). \quad (17)$$

D'après le Lemme 7 :

$$\left| f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau+4\pi h}\right)\right| < 4\,M^*\left(\frac{\tau+4\pi h}{(m+1)\pi}\right)^2 \frac{1}{(2\nu-1)^2}$$

pour $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ et pour $-n+1 \leqslant \nu \leqslant n$. Il existe donc un entier $n_2 > n_1$ ne dépendant que de ε et non de h tel que :

$$\left(\sum_{\nu=-n+1}^{-n_2} + \sum_{\nu=n_2}^{n}\right) \left| f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau+4\pi h}\right)\right| < \varepsilon \quad (18)$$

pour $0 < h < h_{1,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. L'inégalité de Bernstein pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique associée à (13) peut être utilisée pour conclure que :

$$\left| \sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \left\{ f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau+4\pi h}\right) - f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right\}\right| < \varepsilon \quad (19)$$

pour $0 < h < h_{2,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. De plus, puisque $f_h(z) \to f(z)$ uniformément sur tout compact du plan complexe lorsque $h \to 0$, nous avons :

$$\left| \sum_{\nu=-n_2}^{n_2} \left\{ f_h^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right) - f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right)\right\}\right| < \varepsilon \quad (20)$$

pour $0 < h < h_{3,\varepsilon}$ et $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. Pour une fonction entière f de type

exponentiel τ satisfaisant à (14) nous avons en vertu de (16)-(20) l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{(m+1)\pi}{\tau} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2\tau}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{2\nu-1}{2}\,\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right),$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{(m+1)\pi}{\tau} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \left(\frac{m+1}{2\tau}\right)^{\mu} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\nu\frac{(m+1)\pi}{\tau}\right).$$

En particulier, si $\tau = (m+1)\sigma$ cette formule devient identique à (6).

3.3. Nous venons de démontrer le Théorème 2 sous la condition supplémentaire (14). Dans la présente section nous la remplacerons par l'appartenance à $L^1(-\infty, +\infty)$ et ainsi obtenir le résultat dans sa pleine généralité.

Définissons la fonction $f_{[h]}$ pour $h > 0$ par :

$$f_{[h]}(z) := \varphi(hz)\, f(z).$$

C'est une fonction entière de type exponentiel $(m+1)\sigma + 2\pi h$ qui satisfait à (14) et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{\left\{2\left(\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}\right)\right\}^{\mu}} a_{\mu,m-1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right). \tag{21}$$

Grâce au théorème de convergence dominée nous avons :

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Il suffit alors de démontrer que le membre de droite de (21) tend vers :

$$\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque h tend vers 0. Dans ce but remarquons d'abord que :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\mu=1} \binom{\mu}{k} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} h^{\mu-k}\, \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right).$$

Chacune des μ sommes intervenant dans le deuxième membre de droite tend vers 0 lorsque h tend vers 0 car par le Lemme 4 nous avons :

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\,\frac{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}{\pi^2}\, e^{(m+1)\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi^{(\mu-k)}(hx)\, f^{(k)}(x) \right| dx$$

$$\leqslant 4\,\frac{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}{\pi^2}\, e^{(m+1)\pi/2} (2\pi)^{\mu-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f^{(k)}(x) \right| dx\,.$$

Il suffit donc de démontrer que :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma+\dfrac{2\pi h}{m+1}}\right)$$

tend vers :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque h tend vers 0 pour $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$. Pour une raison évidente nous n'avons à traiter que le cas $\mu = 0$. Dans ce but fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons un entier $\nu_1 = \nu_1(\varepsilon)$ tel que nous ayons :

$$\sum_{|\nu|>\nu_1} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)\right| < \varepsilon\,. \tag{22}$$

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un entier $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε et non de h tel que :

$$\sum_{|\nu| > \nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}} \right) \right| < 2\varepsilon \tag{23}$$

pour $0 < h < \dfrac{(m+1)\sigma}{2\pi}$. A cette fin remarquons que pour tout entier ν et pour tout $h \in \left(0, \dfrac{(m+1)\sigma}{2\pi}\right)$ il existe un entier $n(\nu, h)$ tel que :

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\nu}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}} - n(\nu, h) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{24}$$

Dans l'ensemble $\{ n(\nu, h) \}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ *un entier peut apparaître au plus deux fois* parce que la distance de $\dfrac{\nu}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}}$ à $\dfrac{\nu+1}{1 + \dfrac{2\pi h}{(m+1)\sigma}}$ est plus grande que $\dfrac{1}{2}$.

Définissons maintenant $\zeta_\nu (-\infty < \nu < +\infty)$ par le plus petit ζ dans $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} - \dfrac{\pi}{2\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{2\sigma}\right]$ tel que :

$$| f(\zeta) | = \max_{\frac{\nu\pi}{\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma} \leqslant x \leqslant \frac{\nu\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{2\sigma}} | f(x) | .$$

Séparons alors la suite $\{ \zeta_\nu \}$ en exactement deux sous-suites $\{ \zeta'_\nu \}$ et $\{ \zeta''_\nu \}$, la première étant constituée des ζ_ν qui appartiennent à $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} - \dfrac{\pi}{2\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{4\sigma}\right]$ et la seconde étant constituée des ζ_ν qui appartiennent à $\left[\dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{4\sigma}; \dfrac{\nu\pi}{\sigma} + \dfrac{\pi}{2\sigma}\right]$.

Remarquons que $\zeta'_{\nu+1} - \zeta'_\nu \geqslant \dfrac{\pi}{4\sigma}$ et $\zeta''_{\nu+1} - \zeta''_\nu \geqslant \dfrac{3\pi}{4\sigma}$ et utilisons le résultat de Plancherel et Pólya de nouveau pour obtenir :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f(\zeta'_\nu) | \leqslant \frac{16\sigma}{\pi^2} e^{(m+1)\pi/8} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | \, dx$$

et :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} | f(\zeta''_\nu) | \leqslant \frac{16\sigma}{3\pi^2} e^{3(m+1)\pi/8} \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | \, dx .$$

Il existe donc un entier $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ tel que :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} | f(\zeta'_\nu) | < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{|\nu|>\nu_2} | f(\zeta''_\nu) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} | f(\zeta_\nu) | < \varepsilon .$$

Cette définition de ν_2 ne dépend pas de h et nous permet d'arriver au résultat. Utilisons (24) pour écrire :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right)\right| \leqslant \sum_{|\nu|>\nu_2} \max_{\frac{n(\nu,h)\pi}{\sigma} - \frac{\pi}{2\sigma} \leqslant x \leqslant \frac{n(\nu,h)\pi}{\sigma} + \frac{\pi}{2\sigma}} | f(x) |$$

$$= \sum_{|\nu|>\nu_2} | f(\zeta_{n(\nu,h)}) | .$$

En rappelant que les éléments de $\{ n(\nu, h) \}_{\nu=-\infty}^{+\infty}$ ne peuvent reparaître qu'une fois nous déduisons :

$$\sum_{|\nu|>\nu_2} \left| f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right)\right| \leqslant 2 \sum_{|\nu|>\nu_2} | f(\zeta_\nu) | < 2\varepsilon .$$

En posant $\nu_0 := \max(\nu_1, \nu_2)$ il est alors possible de trouver $h_{4,\varepsilon} > 0$ tel que pour $0 < h < h_{4,\varepsilon}$ nous ayons :

$$\left| \sum_{|\nu|>\nu_0} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) - \sum_{|\nu|\leqslant\nu_0} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon . \tag{25}$$

Nous déduisons de (22), (23) et (25) pour tout $h \in \left(0, \min\left(h_{4,\varepsilon}, \dfrac{(m+1)\sigma}{2\pi}\right)\right)$ l'inégalité :

$$\left| \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma + \dfrac{2\pi h}{m+1}}\right) - \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < 4\varepsilon$$

qui termine la démonstration du Théorème 2.

3.4. A ce stade il devient possible d'achever la preuve du Théorème 1. L'hypothèse sur f ne sera plus $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ mais sera $\tau < (m+1)\sigma$.

Avec $0 < h < \frac{1}{2\pi}\{(m+1)\sigma - \tau\}$, la fonction entière $f_{[h]}(z) := \varphi(hz) f(z)$ satisfait aux hypothèses du Théorème 2. Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right). \tag{26}$$

En utilisant les Lemmes 2 et 3 nous avons

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{[h]}(x)\,dx = \int_{\to -\infty}^{\to +\infty} f(x)\,dx\,.$$

Il suffit donc de montrer que le membre de droite de (26) tend vers

$$\frac{\pi}{\sigma} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \text{ pair}}}^{m-1} \frac{1}{(2\sigma)^{\mu}} a_{\mu,m-1} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$. Dans ce but nous choisissons le plus petit entier N_ε tel que

$$\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon \tag{27}$$

quel que soit μ de 0 à $m-1$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. Posons

$$s_{N_\varepsilon-1}^{(\mu)} := 0\,, \qquad s_n^{(\mu)} := \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

avec $0 \leqslant \mu \leqslant m-1$ et $n \geqslant N_\varepsilon$. En utilisant (27) nous avons pour tout $n > N_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} \left\{ \frac{d^{\mu-k}}{dx^{\mu-k}} \varphi(hx) \right\}_{x=\frac{\nu\pi}{\sigma}} f^{(k)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k} \left\{ \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{n\pi h}{\sigma}\right) s_n^{(k)} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n-1} \left(\varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right) \right) s_\nu^{(k)} \right\} \right| \\
&< \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k} \left(\left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{n\pi h}{\sigma}\right) \right| + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n-1} \left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right) \right| \right) \right\} \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

En remarquant que $|\varphi(x)| \leqslant 1$ sur l'axe réel et en appliquant le théorème de Bernstein il vient d'abord :

$$\left| \sum_{\nu=N_\varepsilon}^{n} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| <$$

$$< \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k}\left((2\pi)^{\mu-k} + \sum_{\nu \geqslant N_\varepsilon} \left| \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{\nu\pi h}{\sigma}\right) - \varphi^{(\mu-k)}\left(\frac{(\nu+1)\pi h}{\sigma}\right) \right| \right) \right\} \varepsilon$$

puis ensuite à l'aide du Lemme 6 :

$$\left| \sum_{\nu \geqslant N_\varepsilon} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\mu} \binom{\mu}{k} h^{\mu-k}((2\pi)^{\mu-k} + (2\pi)^{\mu-k+1}) \right\} \varepsilon$$

$$= (2\pi + 1)(1 + 2\pi h)^{\mu} \varepsilon .$$

Parce que $\lim_{h \to 0} f_{[h]}(z) = f(z)$ uniformément sur tout compact, il existe un nombre positif $h_{5,\varepsilon}$ tel que :

$$\left| \sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon - 1} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) - \sum_{\nu=0}^{N_\varepsilon - 1} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \right| < \varepsilon$$

pour $0 < h < h_{5,\varepsilon}$. Donc :

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \to \sum_{\nu=0}^{+\infty} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$ et ceci quel que soit μ de 0 à $m - 1$. De manière analogue :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{-1} f_{[h]}^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right) \to \sum_{\nu=-\infty}^{-1} f^{(\mu)}\left(\frac{\nu\pi}{\sigma}\right)$$

lorsque $h \to 0$ et ceci quel que soit μ de 0 à $m - 1$. Ici se termine la preuve du Théorème 1.

REFERENCES

[1] R P BOAS, Jr , *Entire functions,* Academic Press, New York, 1954

[2] R P BOAS, *Summation formulas and band-limited signals,* Tôhoku Math J 24 (1972), 121-125

[3] C FRAPPIER et Q I RAHMAN, *Une formule de quadrature pour les fonctions entières de type exponentiel,* Les Annales des Sciences Mathematiques du Québec 10 (1986), 17-26

[4] R GERVAIS et Q I RAHMAN, *An extension of Carlson's theorem for entire functions of exponential type,* Trans Amer Math Soc 235 (1978), 387-394

[5] R GERVAIS, Q I RAHMAN et G SCHMEISSER, *Approximation by* (0, 2)-*interpolating entire functions of exponential type,* J Math Anal Appl 28 (1981), 184-199

[6] R GERVAIS, *Representation and approximation of functions via* (0, 2)-*interpolation,* J Approximation Theory (a paraître)

[7] Ch HERMITE, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange,* J fur die reine und angewandte Math , 84 (1978), 70-79

[8] L HORMANDER, *Some inequalities for functions of exponential type,* Math Scand 3 (1955), 21-27

[9] R KRESS, *On the general Hermite cardinal interpolation* Math Comp 26 (1972), 925-933

[10] G SZEGO, *Orthogonal polynomials,* Amer Math Soc Colloquium Publications, vol XXIII, Troisieme édition, Amer Math Soc , Providence, Rhode Island, 1967

[11] E C TITCHMARSH, *Introduction to the theory of Fourier integrals,* Deuxième édition, Oxford University Press, Londres, 1948

[12] P TURAN, *On the theory of the mechanical quadrature,* Acta Scientiarum Mathematicarum 12 (1950), 30-37