

HERVÉ GILQUIN

**Une famille de schémas numériques T.V.D. pour  
les lois de conservation hyperboliques**

*M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique*, tome 20, n° 3 (1986), p. 429-460

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1986\\_\\_20\\_3\\_429\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_3_429_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## UNE FAMILLE DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES T.V.D. POUR LES LOIS DE CONSERVATION HYPERBOLIQUES (\*)

par Hervé GILQUIN <sup>(1)</sup>

Communiqué par C BARDOS

*Résumé — Nous définissons une famille de schémas numériques pour approcher les solutions des lois de conservation hyperboliques, cette famille contient le schéma de Godounov et celui de Glimm. Lorsqu'elle est stable ( $L^\infty$  et  $BV$ ), cette famille converge vers la solution entropique. On montre la stabilité dans le cas scalaire*

*Abstract — We define a family of numerical schemes to compute weak solutions of hyperbolic conservation laws, this family involves the Godunov's scheme and the Glimm's scheme. When stable ( $L^\infty$  and  $BV$ ), the sequence of numerical approximation converges to the entropy solution. We prove the stability in the scalar case*

### INTRODUCTION

Notre but est l'approximation numérique des solutions du problème de Cauchy pour les lois de conservation de type hyperbolique qui régissent de nombreux phénomènes physiques, chimiques ou biologiques (dynamique des gaz, chromatographie, migration des bactéries, etc...).

Nous proposons une famille de schémas numériques T.V.D. qui contient les schémas bien connus de Godounov et de Glimm.

Après quelques rappels sur la théorie des solutions faibles dans la section 1 et sur la résolution du problème de Riemann dans la section 2, nous définissons la famille de schémas dans la section 3.

La section 4 contient les principaux résultats de ce travail : dans le cas scalaire, la suite des approximations numériques converge vers la solution faible entropique. Le cas des systèmes est étudié dans la section 5.

(\*) Reçu en janvier 1986

(1) C N R S U A 04740 et Equipe d'Analyse Numérique de l'Université de Saint-Etienne, U E R. Sciences, 23, rue du Docteur Paul Michelon, 42023 Saint-Etienne Cedex 2 (France).

Les sections 6 et 7 sont consacrées à la construction et à l'étude des propriétés particulières de certains schémas issus de la famille définie dans la section 3.

Enfin on présente dans la section 8 des résultats numériques pour l'équation de Burgers et pour le système de la dynamique des gaz.

**1. REVUE DE LA THÉORIE DES SOLUTIONS FAIBLES**

Soit le problème de Cauchy :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(f(w))}{\partial x} &= 0 \\ w(x, t = 0) &= w_0(x) \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Lorsque  $w \in \mathbb{R}^m$  et  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , le système est dit hyperbolique si  $A(w)$ , la matrice jacobienne de  $f$ , a toutes ses valeurs propres réelles. Il est bien connu que les solutions de (1.1) peuvent développer des discontinuités en temps fini même si la condition initiale est très régulière. Pour admettre ces discontinuités, on cherche des solutions faibles qui vérifient (1.1) au sens des distributions; à savoir :

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\varphi_t w + \varphi_x f(w)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) w_0(x) dx = 0. \quad (1.2)$$

Pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ .

Les conditions initiales ne déterminant pas d'une manière unique les solutions faibles de (1.1), les solutions faibles admissibles sont cherchées comme limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, de la solution  $w^\varepsilon$  de l'équation visqueuse :

$$w_t^\varepsilon + f(w^\varepsilon)_x = \varepsilon w_{xx}.$$

Pour les systèmes d'équations, ces solutions faibles admissibles doivent vérifier la condition d'entropie donnée par Lax [8] :

$$U(w)_t + F(w)_x \leq 0 \text{ au sens des distributions.} \quad (1.3)$$

$U$  étant une fonction convexe de  $w$  appelée entropie et vérifiant  $U_w f_w = F_w$  où  $F$  est une fonction appelée flux entropique. Pour un système général l'unicité de la solution faible admissible, appelée solution entropique, n'est pas prouvée.

Dans le cas scalaire, l'unicité de la solution faible admissible est assurée par

l'inégalité entropique due à Kruzkov [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} |w - c| + \frac{\partial}{\partial x} ((f(w) - f(c)) \operatorname{sgn}(w - c)) \leq 0 \tag{1 4}$$

au sens des distributions pour tout réel  $c$

L'inégalité (1 4) n'est autre que (1 3) dans le cas particulier où  $U(w) = |w - c|$

Clairement, une fonction régulière par morceaux  $w$  est une solution faible de (1 1) si et seulement si

- $w$  est solution de (1 1) au sens fort dans les régions où elle est régulière,
- au passage d'une discontinuité  $(s(t), t)$ ,  $w$  vérifie la condition de Rankine et Hugoniot

$$\sigma(t) (w_r - w_l) = f(w_r) - f(w_l) \tag{1 5}$$

avec

$$w_r = w(s(t) + 0, t), \quad w_l = w(s(t) - 0, t) \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \frac{ds}{dt}$$

**2. RÉOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN**

Le problème de Riemann qu'on abrégera  $PR$  est le problème de Cauchy le plus simple

$$w(x, 0) = \left. \begin{array}{l} w_t + f(w)_x = 0 \\ \left\{ \begin{array}{ll} w_l & \text{si } x < 0 \\ w_r & \text{si } x > 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \tag{2 1}$$

La solution de ce problème est la clé fondamentale de la famille de schémas numériques que nous allons définir

Pour ce qui concerne la résolution du problème de Riemann scalaire, voir Leroux [10], Schatzman [15], Kruzkov [6]

Pour le cas des systèmes de  $m$  équations, il est nécessaire d'introduire quelques définitions. Supposons que  $A(w)$ , la matrice Jacobienne de  $f$  possède  $m$  valeurs propres réelles et distinctes  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ , notons alors  $r_1, r_2, \dots, r_m$  les vecteurs propres à droite associés aux  $\lambda_i$ . D'après la théorie de Lax [7], le  $k$ -ième champ caractéristique est dit

- linéairement dégénéré si  $\nabla_w \lambda_k \cdot r_k \equiv 0$ ,
- vraiment non linéaire si  $\nabla_w \lambda_k \cdot r_k \neq 0$ , dans ce cas  $r_k$  est normalisé de sorte que  $\nabla_w \lambda_k \cdot r_k \equiv 1$

Lorsque le champ caractéristique est vraiment non linéaire, on appelle :

—  $k$ -choc de vitesse  $\sigma = \sigma(w_l, w_r)$  une discontinuité de  $w$  se déplaçant à la vitesse  $\sigma$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \lambda_k(w_l) &> \sigma > \lambda_k(w_r) \\ \lambda_i(w_l) &< \sigma < \lambda_j(w_r) \quad \forall i < k, \forall j > k \end{aligned}$$

—  $k$ -onde de détente centrée, une fonction  $w(\xi)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} w'(\xi) &= r_k(w(\xi)) \quad \text{si } \lambda_k(w_l) < \xi < \lambda_k(w_r) \\ w(\xi) &= w_r \quad \text{si } \xi \geq \lambda_k(w_r); \quad w(\xi) = w_l \quad \text{si } \xi \leq \lambda_k(w_l). \end{aligned}$$

Lorsque le champ caractéristique est linéairement dégénéré, on appelle  $k$ -discontinuité de contact, une discontinuité de  $w$  se déplaçant avec la vitesse  $\sigma = \lambda_k(w_l) = \lambda_k(w_r)$ . Dans [7], Lax a construit une solution entropique du problème (2.1) constituée de  $m + 1$  états constants  $w_i$ , comme suit :

—  $w_i$  est relié à  $w_{i-1}$  par une  $i$ -onde de détente centrée ou un  $i$ -choc si le  $i$ -ième champ caractéristique est vraiment non linéaire ou par une  $i$ -discontinuité de contact si le  $i$ -ième champ caractéristique est linéairement dégénéré.

Par exemple, pour le système de la dynamique des gaz, le problème de Riemann s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(P + \rho u^2)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial((P + E) u)}{\partial x} &= 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) &= \begin{cases} w_l = (\rho_l, u_l, P_l) & \text{si } x < 0 \\ w_r = (\rho_r, u_r, P_r) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$\rho$  densité,  $P$  pression,  $u$  vitesse

$E = \rho(e + u^2/2)$  énergie totale,  $e$  énergie interne.

Le système est strictement hyperbolique si  $c^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$ . Les valeurs propres sont alors :

$$\lambda_1(w) = u - c, \quad \lambda_2(w) = u, \quad \lambda_3(w) = u + c.$$

On montre que  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$  sont vraiment non linéaires alors que  $\lambda_2$  est linéairement dégénérée. La solution du problème de Riemann est constituée de 4 états constants  $w_b, w_1, w_2, w_r$  tels que

- $w_1$  est relié à  $w_b$  par un 1-choc ou une 1-détente
- $w_2$  est relié à  $w_1$  par une 2-discontinuité de contact
- $w_r$  est relié à  $w_2$  par un 3-choc ou une 3-détente

Voir une solution possible figure 1.

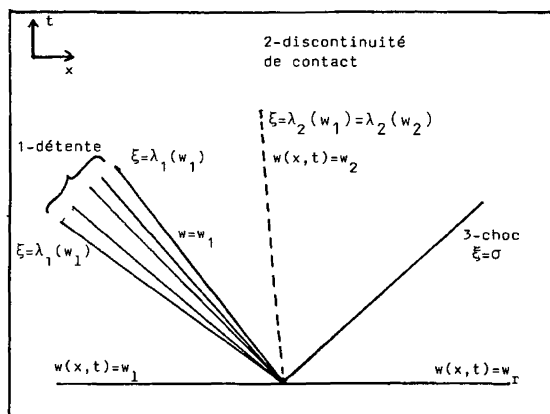


Figure 1. — Un exemple de solution pour le cas  $m = 3$ .

Dans le cas où les champs caractéristiques sont soit vraiment non linéaires, soit linéairement dégénérés, Lax a montré qu'une telle solution était toujours possible si  $|w_l - w_r|$  suffisamment petit. Pour une extension de cette construction à d'autres cas, voir Liu [11]; pour une résolution approchée du PR voir Roe [15], Van Leer [9] et Osher [14].

### 3. UNE FAMILLE DE SCHÉMAS NUMÉRIQUES

Nous présentons maintenant une famille de schémas pour calculer les approximations numériques du problème de Cauchy :

$$\left. \begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0 \\ w(x, 0) &= w_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

On suppose  $f \in C^1(\mathbb{R})$  et  $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{loc}(\mathbb{R})$ .

Soit  $\Delta t$  un pas de temps et  $\Delta x$  un pas d'espace,  $\Delta x$  et  $\Delta t$  constants et vérifiant  $\Delta t = \lambda \Delta x$   $0 < \lambda < \lambda_0$  (condition CFL voir théorème 1) Nous allons construire une famille de solutions approchées constante sur chaque pavé

$$I_j \times ]n \Delta t, (n + 1) \Delta t] \quad \text{avec} \quad I_j = ](j - \frac{1}{2}) \Delta x, (j + \frac{1}{2}) \Delta x[$$

Supposons connue  $\bar{v}_j^{n-1}$  l'approximation au temps  $(n - 1) \Delta t$ , nous allons en déduire  $\bar{v}_j^n$

Commençons par résoudre la collection de problèmes de Riemann locaux

$$\left. \begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0 \\ w(x, (n - 1) \Delta t) &= \begin{cases} \bar{v}_j^{n-1} & \text{si } x \in I_j \\ \bar{v}_{j+1}^{n-1} & \text{si } x \in I_{j+1} \end{cases} \\ t &\in ]t^{n-1}, t^n] \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Notons  $U_{j+1/2}^n$  la solution de ces PR locaux et définissons  $U_j^n$  par

$$U_j^n(x + j \Delta x, t) = \begin{cases} U_{j+1/2}^n(x + j \Delta x, t) & \text{si } x \in [0, \Delta x/2] \\ U_{j-1/2}^n(x + j \Delta x, t) & \text{si } x \in [-\Delta x/2, 0] \end{cases} \quad t \in ]t^{n-1}, t^n]$$

$\Delta t$  fixé de façon à ce que les solutions de deux PR locaux n'interagissent jamais

Soit  $v^n$  une mesure de probabilité sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , l'approximation numérique au temps  $t^n = n \Delta t$  est notée  $\bar{v}_j^n$  et calculée comme suit

$$\bar{v}_j^n = \langle v^n, U_j^n((\cdot + j) \Delta x, n \Delta t) \rangle$$

*Cas particuliers* Si  $v^n$  est une mesure de densité  $k^n$ , on a

$$\int_{-1/2}^{1/2} k^n(z) dz = 1, \quad k^n \geq 0$$

et

$$\begin{aligned} \bar{v}_j^n &= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} k^n\left(\frac{x}{\Delta x}\right) U_j^n(x + j \Delta x, n \Delta t) dx = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} k^n(y) U_j^n((y + j) \Delta x, n \Delta t) dy \end{aligned}$$

La donnée initiale est discrétisée par

$$\bar{v}_j^0 = \langle dx, w_0((\cdot + j) \Delta x) \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w_0(x + j \Delta x) dx$$

Le choix de chaque suite de mesures  $\{v^n\}_n$  détermine un schéma numérique. En prenant  $v^n = dx$  (c'est-à-dire  $k^n \equiv 1$ ), on retrouve le schéma de Godounov ou le schéma de Lax-Friedrichs si le maillage est décalé de  $\Delta x/2$  à chaque pas de temps. Si chaque  $v^n$  est une masse de Dirac  $\delta_{a^n}$ ,  $a^n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , on retrouve le schéma de Glimm.

**4. STABILITÉ ET CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES (CAS SCALAIRE)**

Cette partie contient les principaux résultats de notre travail. Rappelons que

$$\bar{v}_j^n = \langle v^n, U_j^n((\cdot + j)\Delta x, n\Delta t) \rangle,$$

définissons

$$\bar{U}_{j+1/2}^n = U_{j+1/2}^n((j + \frac{1}{2})\Delta x, t) \text{ pour } t \in ](n-1)\Delta t, n\Delta t[$$

et pour

$$y = x + j\Delta x, \quad x \in \left] -\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} \right[ \text{ et } t \in ](n-1)\Delta t, n\Delta t[$$

$$\begin{cases} U^{\Delta x}(y, t) = U_j^n(x + j\Delta x, t) \\ v^{\Delta x}(y, t) = \bar{v}_j^n \end{cases}$$

$U^{\Delta x}$  est solution faible exacte de (3.2) dans chaque bande  $\mathbb{R} \times ](n-1)\Delta t, n\Delta t[$ .

**A. Stabilité**

LEMME 4.1 D'après les propriétés du problème de Riemann, on a

$$\begin{aligned} - \sum_{|j| < J} TV \left| U^{\Delta x}(\cdot + j\Delta x, t) \right|_{[-\Delta x/2, \Delta x/2]} &\leq \sum_{|j| < J+1} TV \left| v^{\Delta x}(\cdot + j\Delta x, n\Delta t) \right|_{[-\Delta x/2, \Delta x/2]} \\ - TV(U^{\Delta x}(\cdot, t)) &\leq TV(v^{\Delta x}(\cdot, n\Delta t)) \quad \forall t \in ]n\Delta t, (n+1)\Delta t[ \end{aligned}$$

La démonstration est évidente par construction de la solution du problème de Riemann scalaire.

LEMME 4.2 Notre famille définit une famille de schémas numériques T V D

Preuve

$$\begin{aligned} TV(v^{\Delta x}(\cdot, n\Delta t)) &= \sum_j |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n| = \\ &= \sum_j | \langle v^n, U_{j+1}^n(\cdot, n\Delta t) \rangle - \langle v^n, U_j^n(\cdot, n\Delta t) \rangle | \end{aligned}$$



et par l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\begin{aligned} TV(v^{\Delta x}(\cdot, n \Delta t)) &\leq \sum_j \langle v^n, |U_{j+1}^n(\cdot, n \Delta t) - U_j^n(\cdot, n \Delta t)| \rangle \\ &\leq \langle v^n, \sum_j |U_{j+1}^n(\cdot, n \Delta t) - U_j^n(\cdot, n \Delta t)| \rangle \\ &\leq \langle v^n, TV(U^{\Delta x}(\cdot, n \Delta t)) \rangle = TV(U^{\Delta x}(\cdot, n \Delta t)) \cdot \langle v^n, 1 \rangle \\ &\leq TV(v^{\Delta x}(\cdot, (n-1) \Delta t)). \end{aligned}$$

LEMME 4.3 : On a :

$$\sum_{|j| < J} |\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n| \leq \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n| \quad (4.2)$$

$$\sum_{|j| < J} |\bar{v}_{j+1}^{n+1} - \bar{v}_j^{n+1}| \leq \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n|. \quad (4.3)$$

*Preuve* : D'après les propriétés de monotonie de la solution du problème de Riemann scalaire, on a :

$$\text{Min}(\bar{U}_{j-1/2}^{n+1}, \bar{v}_j^n, \bar{U}_{j+1/2}^{n+1}) \leq \bar{v}_n^{n+1} \leq \text{Max}(\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}, \bar{v}_j^n, \bar{U}_{j-1/2}^{n+1})$$

et donc :

$$|\bar{v}_n^{n+1} - \bar{v}_j^n| \leq |\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{v}_j^n| + |\bar{v}_j^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1}|,$$

ce qui donne :

$$\sum_{|j| < J} |\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n| \leq \sum_{|j| < J} (|\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{v}_j^n| + |\bar{v}_j^n - \bar{U}_{j-1/2}^{n+1}|).$$

Cependant :

$$\bar{U}_{j+1/2}^{n+1} = \alpha_{j+1/2}^n \bar{v}_j^n + (1 - \alpha_{j+1/2}^n) \bar{v}_{j+1}^n \quad \text{où } \alpha_{j+1/2}^n \in [0, 1]$$

et donc :

$$\begin{aligned} \sum_{|j| < J} |\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n| &\leq \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n|. \\ \sum_{|j| \leq J} |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n| &= \sum_{|j| \leq J} \langle v^n, |U_{j+1}^n(\cdot, n \Delta t) - U_j^n(\cdot, n \Delta t)| \rangle \\ &\leq \left\langle v^n, \sum_{|j| \leq J} |U_{j+1}^n(\cdot, n \Delta t) - U_j^n(\cdot, n \Delta t)| \right\rangle \\ &\leq \left\langle v^n, \sum_{|j| < J} TV \left| \begin{array}{l} (U^{\Delta x}(\cdot + j \Delta x, n \Delta t)) \\ ] - \Delta x/2, \Delta x/2[ \end{array} \right. \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\langle v^n, \sum_{|j| < J+1} TV(v^{\Delta x}(\cdot + j \Delta x, (n-1) \Delta t)) \right\rangle \\ &= \left\langle v^n, \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^{n-1} - \bar{v}_j^{n-1}| \right\rangle \\ &\leq \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^{n-1} - \bar{v}_j^{n-1}| \langle v^n, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $w^{\Delta x}$  l'interpollée de degré 1 de  $v^{\Delta x}$  aux sommets du rectangle  $[j \Delta x, (j+1) \Delta x] \times [n \Delta t, (n+1) \Delta t]$  :

$$\begin{aligned} w^{\Delta x}\left(x + \left(j + \frac{1}{2}\right) \Delta x, t\right) &= \frac{\Delta x - 2x}{2 \Delta x} \left[ \frac{t - n \Delta t}{\Delta t} \bar{v}_j^{n+1} + \frac{(n+1) \Delta t - t}{\Delta t} \bar{v}_j^n \right] + \\ &\quad + \frac{\Delta x + 2x}{2 \Delta x} \left[ \frac{t - n \Delta t}{\Delta t} \bar{v}_{j+1}^{n+1} + \frac{(n+1) \Delta t - t}{\Delta t} \bar{v}_{j+1}^n \right] \end{aligned}$$

pour  $t \in [n \Delta t, (n+1) \Delta t]$  et  $x \in \left[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}\right]$ .

Notons :

$$\Omega = \mathbb{R} \times ]0, T[, \quad \Omega_R = ]-R, R[ \times ]0, T[,$$

$J_R$  le plus petit entier tel que :

$$\Omega_R \subset \{(x, t) / x \in [(J-1/2) \Delta x, (J+1/2) \Delta x]$$

$$\text{et } t \in [n \Delta t, (n+1) \Delta t] \Rightarrow J+n < J_R \}.$$

LEMME 4.4 : Par construction, on a :

$$\|w^{\Delta x}\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v^{\Delta x}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|U^{\Delta x}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

LEMME 4.5 :  $w^{\Delta x}$  est dérivable ; pour tout réel  $R$ , on a :

$$\frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial t} \in L^1(\Omega_R), \quad \frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial x} \in L^1(\Omega_R)$$

et  $\frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial x}$  appartiennent à un borné de  $L^1(\Omega_R)$ .

Preuve :

$$\iint_{\Omega_R} \left| \frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial t} \right| dx dt = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n \Delta t}^{(n+1) \Delta t} \left( \sum_{|j| < J_R - n} A_j^n \right) dt$$

où :

$$\begin{aligned}
 A_j^n &= \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \left| \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{\Delta x - 2x}{2\Delta x} (\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n) + \frac{\Delta x + 2x}{2\Delta x} (\bar{v}_{j+1}^{n+1} - \bar{v}_{j+1}^n) \right] \right| dx \\
 \left| \frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial t} \right|_{L^1(\Omega_R)} &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|j| < J_R - n} \Delta x (|\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n| + |\bar{v}_{j+1}^{n+1} - \bar{v}_{j+1}^n|) \\
 &\leq \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|j| < J_R - n + 1} (|\bar{v}_j^n - \bar{v}_{j+1}^n| + |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_{j+2}^n|) \\
 &\leq 2\Delta x \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{|j| < J_R - n + 2} |\bar{v}_{j+1}^n - \bar{v}_j^n| \\
 &\leq 2\Delta x \frac{T}{\Delta t} \sum_{|j| < J_R + 2} |\bar{v}_{j+1}^0 - \bar{v}_j^0| = K_1(R, T, w_0) \text{ avec } N \Delta t = T.
 \end{aligned}$$

D'une manière analogue, on montre que :

$$\left| \frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial x} \right|_{L^1(\Omega_R)} \leq 2T \sum_{|j| < J_R + 2} |\bar{v}_{j+1}^0 - \bar{v}_j^0| = K_2(R, T, w_0) \text{ avec } N \Delta t = T$$

et, pour  $R$  fixé,  $\frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial w^{\Delta x}}{\partial x}$  appartiennent à un borné de  $L^1(\Omega_R)$ .

Sous la condition CFL  $\lambda_0 \leq \frac{1}{2}$   $\text{Sup}_{|w| \leq |w_0|_{L^1(\mathbb{R})}} |f'(w)|$ , on a :

**THÉORÈME 1 :** Si  $w_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , alors la famille de solutions approchées converge dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  vers  $w \in L^\infty(\Omega) \cap BV_{\text{loc}}(\Omega)$ .

*Preuve :* D'après le lemme 4.3, en utilisant le théorème de Riesz-Tamarkin, on peut appliquer le résultat de Leroux [10], pp. 50-52 et ainsi démontrer le théorème.

**LEMME 4.6 :**  $u^{\Delta x}$  converge dans  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  vers  $w = \lim w^{\Delta x}$ .

*Preuve :*

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_R} |U^{\Delta x}(y, t) - w(y, t)| dy dt &\leq \int_{\Omega_R} (|U^{\Delta x} - v^{\Delta x}| + |v^{\Delta x} - w|) dy dt \\
 \int_{\Omega_R} |U^{\Delta x} - v^{\Delta x}| dy dt &= \sum_{n=1}^N \sum_{|j| < J_R - n - 1} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} |U_j^n - \bar{v}_j^n| dx dt = A
 \end{aligned}$$

mais :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} |U_j^n - \bar{v}_j^n| dx \leq \Delta x (|\bar{U}_{j-1/2}^n - \bar{v}_j^{n-1}| + |\bar{v}_j^{n-1} - \bar{U}_{j+1/2}^n|)$$

et :

$$\begin{aligned}
 A &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{|j| < J_R - n - 1} \Delta x \Delta t (|\bar{U}_{j-1/2}^n - \bar{v}_j^{n-1}| + |\bar{v}_j^{n-1} - \bar{U}_{j+1/2}^n|) \\
 &\leq \Delta x \sum_{n=1}^N \frac{T}{N} \sum_{|j| < J_R - n} |\bar{v}_{j+1}^{n-1} - \bar{v}_j^{n-1}| \leq T \Delta x \sum_{|j| < J_R} |\bar{v}_{j+1}^0 - \bar{v}_j^0| \\
 &\leq T \Delta x TV \left| \begin{array}{l} (w_0) \\ \{x, |x| < R + T/\lambda\} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

**B. Convergence**

Rappelons que  $v^n$  est une mesure de probabilité sur  $[-1/2, +1/2]$   $v^n \in \mathcal{M}_1^+[-1/2, 1/2]$  et supposons qu'il existe une mesure  $\mu$  définie sur  $\mathcal{M}_1^+$ , vérifiant :

$$\int_{\mathcal{M}_1^+} d\mu = 1 \quad \mu \geq 0 \tag{4.4}$$

$$\left\langle \int_{\mathcal{M}_1^+} v \, d\mu(v), u \right\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} u(x) \, dx; \quad dx \text{ mesure de Lebesgue sur } [-1/2, 1/2]. \tag{4.5}$$

Notons alors  $v = (v^n)_n, v \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_1^{+\mathbb{N}}$  et  $\beta = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$  où  $\mu_n = \mu$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

L'existence de la mesure de probabilité  $\mu$  sera discutée dans la section 6.

La démarche de la démonstration qui suit est la même que celle de Glimm [2], nous allons montrer que :

$$\delta(\Delta x, v, \varphi) = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} [\varphi_t U^{\Delta x} + \varphi_x f(U^{\Delta x})] \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) U^{\Delta x}(x, 0) \, dx$$

converge vers 0 dans  $L^2(\mathcal{M})$  pour  $\mu$ -presque toute suite  $\{v^n\}_n$  et pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  lorsque  $\Delta x$  tend vers 0.

On montre facilement que  $\delta(\Delta x, \cdot, \varphi) = \sum_{n=1}^\infty \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n)$  où :

$$\delta(\Delta x, v, \varphi, n) = \sum_{|j| < J_R - n} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(x + j \Delta x, n \Delta t) [U_j^n(x + j \Delta x, n \Delta t) - \bar{v}_j^n] \, dx$$

car  $\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega_R = ]-R, R[ \times ]0, T[$ .

LEMME 4.7 :

$$\begin{aligned} |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n)|_{L^\infty(\mathcal{M})} &\leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} TV \Big| (w_0) \\ &\quad \{x/|x| < R + T/\lambda\} \\ |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n)|_{L^2(\mathcal{M})} &\leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} TV \Big| (w_0) \\ &\quad \{x/|x| < R + T/\lambda\}. \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} |\delta(\Delta x, v, \varphi, n)| &\leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{|j| < J_{R-n-1}} TV \Big| (U^{\Delta x}(\cdot + j \Delta x, n \Delta t)) \\ &\quad [-\Delta x/2, \Delta x/2] \\ &\leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{|j| < J_R} TV \Big| (w_0(\cdot + j \Delta x, n \Delta t)) \\ &\quad [-\Delta x/2, \Delta x/2] \\ &\leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} TV \Big| (w_0) \\ &\quad \{x/|x| < R + T/\lambda\}. \end{aligned}$$

LEMME 4.8 :

$$\begin{aligned} |\langle \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_1), \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_2) \rangle_{L^2(\mathcal{M})}| &\leq \Delta x^3 \cdot \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \times \\ &\quad \times TV \Big| (w_0)^2 \\ &\quad \{x/|x| < R + T/\lambda\} \end{aligned}$$

si  $n_1 \neq n_2$ .

Preuve : Supposons que  $n_2 > n_1$ , par construction des approximations numériques :

$$\varphi(x + j \Delta x, n_1 \Delta t) [U_j^{n_1}(x + j \Delta x, n_1 \Delta t) - \bar{v}_j^{n_1}]$$

ne dépend pas de  $n_2$ . Notons  $\mathcal{M} = \hat{\mathcal{M}}x[\mathcal{M}_1^+]_{n_2}$ ,  $d\beta = d\hat{\mu} \otimes d\mu_{n_2}$  et  $\alpha(\hat{v}) = \delta(\Delta x, v, \varphi, n_1)$  :

$$\begin{aligned} \langle \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_1), \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_2) \rangle_{L^2(\mathcal{M})} &= \int_{\hat{\mathcal{M}}} (\alpha(\hat{v})) \cdot \int_{[\mathcal{M}_1^+]_{n_2}} \left( \sum_{|j| < J_{R-n-1}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) [U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) - \bar{v}_j^{n_2}] dx d\mu_{n_2} \right) d\hat{\mu}. \end{aligned}$$

Considérons :

$$A = \int_{\mathcal{M}_1^+} \left( \sum_{|j| < J_R - n - 1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) \times \right. \\ \left. \times [U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) - \bar{v}_j^{n_2}] dx \right) d\mu_{n_2}.$$

Soit ·

$$\bar{\varphi}(j \Delta x, n \Delta t) = 1/\Delta x \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(x + j \Delta x, n \Delta t) dx$$

alors ·

$$|\bar{\varphi}(j \Delta x, n_2 \Delta t) - \varphi(x + j \Delta x, n_2 \Delta t)| \leq \Delta x \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et :

$$\tilde{A} = \bar{\varphi}(j \Delta x, n_2 \Delta t) \int_{\mathcal{M}_1^+} \left( \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) dx - \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \bar{v}_j^{n_2} dx \right) d\mu_{n_2}$$

$$\tilde{A} = \bar{\varphi}(j \Delta x, n_2 \Delta t) \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) dx - \Delta x \int_{\mathcal{M}_1^+} \langle v^{n_2}, U_j^{n_2} \rangle d\mu_{n_2}$$

et d'après (4.4) et (4.5)  $\tilde{A} = 0$ .

Finalement ·

$$\left| \int_{\mathcal{M}_1^+} d\mu_{n_2} \left( \sum_{|j| < J_R - n_2 - 1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \varphi(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) [U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) - \bar{v}_j^{n_2}] dx \right) \right| \\ \leq \int_{\mathcal{M}_1^+} d\mu_{n_2} \left( \sum_{|j| < J_R - n_2 - 1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} A_j dx \right)$$

avec ·

$$A_j = |\varphi(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) - \bar{\varphi}(j \Delta x, n_2 \Delta t)| \cdot |U_j^{n_2}(x + j \Delta x, n_2 \Delta t) - \bar{v}_j^{n_2}| \\ \leq \Delta x \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{[\mathcal{M}_1^+]_{n_2}} d\mu_{n_2} \cdot \left( \sum_{|j| < J_R - n_2 - 1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} |U_j^{n_2} - \bar{v}_j^{n_2}| dx \right) \\ \leq \Delta x^2 \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} TV \left| (w_0) \right. \\ \left. \left| \{x \mid |x| < R + T/\lambda\} \right. \right.$$

d'autre part :

$$|\alpha(\tilde{v})| \leq \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} TV \left| \begin{array}{l} (w_0) \\ \{x/|x| < R + T/\lambda\} \end{array} \right.$$

Notons  $B = |\langle \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_1), \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_2) \rangle_{L^2(\mathcal{M})}|$ , alors :

$$B \leq \Delta x^2 \|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} TV \left| \begin{array}{l} (w_0) \cdot |\alpha(\tilde{v})| \cdot \int_{\hat{\mathcal{M}}} d\hat{\mu} \\ \{x/|x| < R + T/\lambda\} \end{array} \right.$$

LEMME 4.9 :

$$|\delta(\Delta x, \cdot, \varphi)|_{L^2(\mathcal{M})}^2 \leq K \Delta x \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} TV \left| \begin{array}{l} (w_0)^2 \cdot [\|\varphi_x\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}] \\ \{x/|x| < R + T/\lambda\} \end{array} \right.$$

*Preuve* : Puisque  $\varphi$  est à rapport compact :

$$\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega_R = ]-R, R[ \times ]0, T[$$

et :

$$\begin{aligned} |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi)|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &= \sum_{n=1}^N |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n)|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{n_1 < n_2} \langle \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_1), \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_2) \rangle_{L^2(\mathcal{M})} \end{aligned}$$

où  $N \Delta t = T$ ,  $\Delta t = \lambda \Delta x$ .

La première somme comprend au plus  $K/\Delta x$  termes non nuls et la deuxième  $(K/\Delta x)^2$  termes non nuls avec  $K = T/\lambda$  ne dépendant que de la taille en temps du support de  $\varphi$ , on majore chacun des termes non nuls à l'aide des lemmes 4.7 et 4.8 et on en déduit l'inégalité :

$$\begin{aligned} |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi)|_{L^2(\mathcal{M})}^2 &\leq K/\Delta x |\delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n)|_{L^2(\mathcal{M})}^2 + \\ &\quad + 2 K^2/\Delta x^2 |\langle \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_1), \delta(\Delta x, \cdot, \varphi, n_2) \rangle_{L^2(\mathcal{M})}|. \end{aligned}$$

Pour chaque mesure  $\mu$  vérifiant les propriétés (4.4) et (4.5), on a les deux théorèmes suivants :

**THÉORÈME 2** : Pour  $\mu$ -presque toute suite  $\{v^n\}_n$ , la limite  $w$  de la suite d'approximation numérique  $v^{\Delta x}$  est solution faible de (4.1).

*Preuve* : La preuve est donnée par les lemmes (4.9) et (4.6).

**THÉORÈME 3 :** Pour  $\mu$ -presque toute suite  $\{v^n\}_n$ , la limite  $w$  de la suite d'approximation numérique  $v^{\Delta x}$  est solution entropique de (4.1).

*Preuve :* Soit  $\eta$  une entropie convexe de flux  $q$ . En posant :

$$\delta_1(\Delta x, v, \varphi) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\varphi_t \eta(U^{\Delta x}) + \varphi_x q(U^{\Delta x})) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) q(U^{\Delta x}(x, 0)) dx,$$

avec  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ ,  $\varphi \geq 0$ .

On montre tout d'abord que :

$$\delta(\Delta x, v, \varphi) = \varepsilon_1(\Delta x, v, \varphi) + \varepsilon_2(\Delta x, v, \varphi)$$

avec  $\varepsilon_1(\Delta x, v, \varphi) \leq 0$ ; ensuite en utilisant une démarche analogue à celle des lemmes (4.7), (4.8) et (4.9), on obtient :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\varepsilon_2(\Delta x, v, \varphi)|_{L^2(\mathcal{M})} = 0$$

et en prenant  $\eta(w) = |w - c|$  et  $q$  le flux associé, on retrouve l'inégalité de Kruskov qui donne le théorème.

### C. Condition nécessaire de convergence

En se référant à l'article de T. P. Liu [12] qui montre que le schéma de Glimm converge pour toute suite  $\{a_n\}_n$  équadistribuée, cherchons les propriétés de la suite  $\{v^n\}_n$  qui pourraient permettre une convergence certaine.

Pour cela, étudions le problème (3.1) dans le cas scalaire linéaire, à savoir :

$$\left. \begin{aligned} w_t + cw_x &= 0 \\ -w(x, 0) &= \begin{cases} w_l & \text{si } x < \Delta x/2 \\ w_r & \text{si } x > \Delta x/2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Soit :

$$\theta_t = \langle v^t, \chi_{\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right]}(x) \rangle \quad x \in \left[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}\right]$$

ou encore, si  $v^t$  est une mesure de densité  $k^t$  et si  $c > 0$

$$\theta_t = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{-\Delta x/2 + c \Delta t} k^t\left(\frac{x}{\Delta x}\right) dx;$$



alors on montre que :

$$\bar{v}_m^{n+1} = \theta_n \bar{v}_{m-1}^n + (1 - \theta_n) \bar{v}_m^n$$

et par récurrence que :

$$\bar{v}_m^n = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha \in T_{n-k}^n} \alpha_1 \dots \alpha_n \bar{v}_{m-k}^0$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \{ \theta_i, (1 - \theta_i) \}$  et  $\alpha \in T_{n-k}^n$  signifie que :

$$k = \# \{ i / \alpha_i = \theta_i \}$$

et :

$$n - k = \# \{ i / \alpha_i = (1 - \theta_i) \}$$

dans chaque  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Ce qui donne :

$$\bar{v}_m^n = w_r \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\alpha \in T_{n-k}^n} \alpha_1 \dots \alpha_n + w_l \sum_{k=m}^n \sum_{\alpha \in T_{n-k}^n} \alpha_1 \dots \alpha_n.$$

**LEMME 4.10 :** Posons  $\beta^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k$  et supposons que :

$$\lim \text{Sup } \beta^n = c^+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \lim \text{Inf} = c^- \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

alors :

$$\lim \bar{v}_m^n = w_1 \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \lim \text{Sup} \frac{m \Delta x}{n \Delta t} < c^-$$

et :

$$\lim \bar{v}_m^n = w_r \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad \lim \text{Inf} \frac{m \Delta x}{n \Delta t} > c^+.$$

*Preuve :* Posons :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\alpha \in T_{n-k}^n} \alpha_1 \dots \alpha_n = \sum_{k=0}^{m-1} L_{n,n-k}.$$

A chaque étape  $k$ , considérons les variables aléatoires 2 à 2 indépendantes  $X_k$ , à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , de lois de probabilités respectives  $P(X_k = 1) = \theta_k$ ,  $P(X_k = 0) = 1 - \theta_k$ . Soit :

$$X = \sum_{k=1}^n X_k;$$

on a :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n E(X_k) \quad \text{et} \quad \sigma(X)^2 = \sum_{k=1}^n \sigma(X_k)^2$$

alors,  $\sum_{k=0}^{m-1} L_{n,n-k}$  est exactement  $P(X \leq m - 1)$  et en posant  $\frac{m}{n} = \frac{y}{t} \frac{\Delta t}{\Delta x}$  on obtient :

$$m - \sum_{k=1}^n \theta_k = n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{y}{t} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k \right).$$

Si  $y/t < c^-$ , en faisant tendre  $n$  vers l'infini sous l'hypothèse que  $\lim \text{Sup} \frac{m \Delta x}{n \Delta t} < c^-$ .

On arrive à :

$$\frac{m - \sum_{k=1}^n \theta_k}{\sigma(x)} = -\alpha_0 = \frac{n \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{y}{t} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta_k \right)}{\sigma(x)} < 0$$

dès que  $n > n_0$ .

Puisque :

$$P(X \leq m - 1) \leq P\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} < -\alpha_0\right) \leq P\left(\left|\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right| > \alpha_0\right),$$

l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev donne :

$$P(X \leq m - 1) \leq \frac{1}{\alpha_0^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \theta_k(1 - \theta_k)}{n^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{y}{t} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \theta_k\right)^2} \quad \text{si } n > n_0$$

où :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \theta_k(1 - \theta_k) < \frac{1}{n}$$

et :

$$n^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left(\frac{y}{t} - \frac{1}{n} \frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{k=1}^n \theta_k\right)^2 > 0 \quad \text{si } n > n_0$$

et la démonstration est terminée car :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Sup} P(X \leq m - 1) = 0$$

et de ce fait  $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(X \leq m - 1) = 0$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(X > m) = 1$

ce qui donne le lemme pour  $y/t < c^-$  et on opère de façon analogue pour  $y/t > c^+$

**PROPOSITION 4 1** *La suite  $\alpha^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v^k$  converge vaguement vers la mesure de Lebesgue  $dx$  si et seulement si pour tout réel  $c$ , la suite d'approximations numériques converge vers la solution du problème (4 6)*

*Preuve* La condition suffisante est donnée par le lemme 4 10, on a alors  $c^+ = c^- = c$

Réciproquement, on peut extraire de  $\alpha^n$  une sous-suite vaguement convergente Dans ce cas

$$\lim \text{Inf } \beta^n = c^-$$

et

$$\lim \text{Sup } \beta^n = c^+$$

coincident

Si le schéma converge, les inégalités du lemme (4 10) donnent  $c^+ = c^- = c$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = c \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

D'après la construction de  $\beta_n$ , si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout réel  $c$ , alors la sous-suite extraite de  $\alpha^n$  converge vaguement vers la mesure de Lebesgue  $dx$  Enfin la limite étant unique, c'est toute la suite  $\alpha^n$  qui converge vers  $dx$

Pour le schéma de Godounov, cette condition est trivialement vérifiée Dans le cas du schéma de Glimm, elle correspond à l'équidistribution de la suite  $\{a_n\}_n$  (voir Liu [12])

Pour conclure, il est raisonnable d'espérer que la convergence a lieu pour toutes les suites de mesures  $v^n$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v^k = dx$$

mais la démonstration semble très difficile

5. CONSISTANCE DANS LE CAS DES SYSTÈMES

Pour les systèmes, on ne sait en général pas montrer la stabilité de la variation totale en  $x$  de l'approximation numérique. On supposera donc :

— la stabilité en variation totale

$$VT(v^{\Delta x}(\cdot, t)) \leq M \quad t \in ]n \Delta t, (n + 1) \Delta t] \text{ pour tout } n \quad (5.1)$$

$M$  indépendant de  $n, \Delta t$  et  $v = \{ v^n \}_n$

— la stabilité en norme  $L^\infty$

$$\| v^{\Delta x} \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \quad (5.2)$$

$C$  indépendant de  $n, \Delta t$  et  $v = \{ v^n \}_n$

— la résolution du problème de Riemann lipschitzienne

$$\begin{aligned} | U_j^{n+1}(x + j \Delta x, t) - \bar{v}_j^n | &\leq K(| \bar{v}_{j-1}^n - \bar{v}_j^n | + | \bar{v}_j^n - \bar{v}_{j+1}^n |) \\ \forall x \in \left] -\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2} \right[ , \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}, \forall t \in ]n \Delta t, (n + 1) \Delta t] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sous ces hypothèses, on montre :

LEMME 5.1.

$$| v^{\Delta x}(\cdot, m \Delta t) - v^{\Delta x}(\cdot, n \Delta t) |_{L^1} \leq C_1 | m - n | \Delta t \quad (5.4)$$

$$\sum_j | U_j^n(x + j \Delta x, t) - \bar{v}_j^n | \leq C_2. \quad (5.5)$$

*Preuve :*

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} | \bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_j^n | dx &= \Delta x | \langle v^{n+1}, U_j^{n+1}(x + j \Delta x, (n + 1) \Delta t) \rangle - \bar{v}_j^n | \\ &\leq \Delta x \sup_{1-\Delta x/2, \Delta x/2} | U_j^{n+1}(x + j \Delta x, (n + 1) \Delta t) - \bar{v}_j^n | \\ &\leq \Delta x K(| \bar{v}_{j-1}^n - \bar{v}_j^n | + | \bar{v}_j^n - \bar{v}_{j+1}^n |) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} | v^{\Delta x}(\cdot, m \Delta t) - v^{\Delta x}(\cdot, n \Delta t) |_{L^1} &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} | \bar{v}_j^{k+1} - \bar{v}_j^k | dx \\ &\leq 2 KM | m - n | \Delta x = 2 KM \lambda | m - n | \Delta t \\ | U_j^n(x + j \Delta x, t) - \bar{v}_j^n | &\leq | U_j^n(x + j \Delta x, t) - \bar{v}_j^{n-1} | + | \bar{v}_j^{n-1} - \bar{v}_j^n | \\ &\leq 2 K(| \bar{v}_{j-1}^{n-1} - \bar{v}_j^{n-1} | + | \bar{v}_j^{n-1} - \bar{v}_{j+1}^{n-1} |) \end{aligned}$$

et donc :

$$\sum_{|j| < J} |U_j^n(x + j \Delta x, t) - \bar{v}_j^n| \leq 4 K \sum_{|j| < J+1} |\bar{v}_{j+1}^{n-1} - \bar{v}_j^n| \leq 4 KM.$$

**THÉORÈME 4 :** *Supposons la résolution du problème de Riemann lipschitzienne (5.3), la suite d'approximations numérique  $v^{\Delta x}$  uniformément bornée (5.2) et sa variation totale en  $x$  uniformément bornée (5.1) ; alors pour  $\mu$ -presque toute suite  $\{v^n\}_n$ ,  $v^{\Delta x}(\cdot, t)$  converge dans  $L^1(\mathbb{R})$  vers  $w(\cdot, t)$  solution entropique de (1.1).*

*Preuve :* Grâce à (5.1) et (5.2), il est possible de trouver une sous-suite notée encore  $v^{\Delta x}$  et une fonction  $w$  telle que

$$v^{\Delta x}(\cdot, t) \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} w(\cdot, t) \tag{5.6}$$

par la méthode de la diagonale, on peut encore extraire une sous-suite telle que (5.6) soit vérifié pour tout  $t$  rationnel. Ensuite, grâce à (5.4), la convergence (5.6) peut être étendue à tout réel positif ou nul  $t$ . Pour plus de détails voir Harten-Lax [5] et Schatzman [15].

Enfin, les théorèmes 2 et 3 de la section précédente sont encore vrais grâce à (5.1) et à l'estimation (5.5).

**6. CONSTRUCTION DE QUELQUES MESURES  $\mu$**

a) En prenant  $\mu = \delta_{v=a_x}(\delta \text{ dirac})$ , les propriétés (4.4) et (4.5) sont trivialement vérifiées et on retrouve le résultat de convergence du schéma de Godounov [3].

b) Soient  $\mathcal{N} = \{ \delta_a, a \in [-1/2, 1/2] \}$  et  $f : \mathcal{N} \rightarrow [-1/2, 1/2]$  définie par  $f(\delta_a) = a$ , définissons  $\mu$  par

$$\mu = f^*(dx)$$

et prolongeons  $\mu$  à  $\mathcal{M}_1^+$  par

$$\forall A \subset \mathcal{M}_1^+, A \text{ borélien, } \mu(A) = \mu(A \cap \mathcal{N})$$

les propriétés (4.4) et (4.5) sont vérifiées par  $\mu$  et on retrouve la convergence du schéma de Glimm [2].

c) Soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des mesures de densité  $\frac{1}{b-a} \chi_{[a,b]}$  avec  $-1/2 \leq a < b \leq 1/2$  et  $\chi_{[a,b]}(x) = 1$  si  $x \in [a, b]$ .

Trouver une mesure sur  $\mathcal{N}$  qui vérifie les propriétés (4.4) et (4.5) revient à chercher une fonction  $g(a, b)$  qui vérifie :

$$\iint_{-1/2 \leq a < b \leq 1/2} g(a, b) da db = 1 \quad g(a, b) \geq 0 \quad (6.1)$$

$$\iint_{-1/2 \leq a < b \leq 1/2} \left( \frac{g(a, b)}{b - a} \int_a^b U(t) dt \right) da db = \int_{-1/2}^{1/2} U(t) dt. \quad (6.2)$$

Une telle fonction  $g$  doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} \iiint_{-1/2 \leq a < t < b \leq 1/2} \frac{g(a, b)}{b - a} U(t) dt da db &= \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left( U(t) \int_{-1/2}^t \int_t^{1/2} \frac{g(a, b)}{(b - a)} da db \right) dt \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} U(t) dt \end{aligned}$$

et donc :

$$\int_{-1/2}^t \int_t^{1/2} \frac{g(a, b)}{b - a} da db = 1 \quad \text{pour tout } -1/2 \leq t \leq 1/2.$$

**LEMME 6.1** : Soit  $h$  une fonction impaire croissante vérifiant  $h(-1/2) = -\infty$  et donc  $h(+1/2) = +\infty$  alors

$$g(a, b) = (b - a) h'(a) e^{h(a)} h'(-b) e^{h(-b)} \text{ convient.}$$

*Preuve :*

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^t \int_t^{1/2} \frac{g(a, b)}{b - a} da db &= \int_{-1/2}^t \int_t^{1/2} h'(a) e^{h(a)} h'(-b) e^{h(-b)} da db \\ &= - [e^{h(t)} - e^{h(-1/2)}] [e^{h(-1/2)} - e^{h(-t)}] = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^b (b - a) h'(-b) e^{h(-b)} h'(a) e^{h(a)} da db &= \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} h'(-b) e^{h(-b)} \int_{-1/2}^b (b - a) h'(a) e^{h(a)} da db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1/2}^{1/2} h'(-b) e^{h(-b)} \left( b e^{h(b)} - [x e^{h(x)}]_{-1/2}^b + \int_{-1/2}^b e^{h(a)} da \right) db \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^b h'(-b) e^{h(-b)} e^{h(a)} da db \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{h(a)} \int_{-1/2}^a h'(-b) e^{h(-b)} db da = \int_{-1/2}^{1/2} e^{h(a)} e^{h(-a)} da = 1
 \end{aligned}$$

7. UNE FAMILLE D'ALGORITHMES

Nous montrons maintenant comment construire l'algorithme lorsque  $v^n$  est une mesure de densité  $k^n$ . Pour simplifier les notations, on fixe l'intervalle de temps et on omet l'indice  $n$  pour la fonction  $k$ .

Rappelons que  $U_j^{n+1}(y, t)$  est définie par

$$U_j^{n+1}(x + j \Delta x, t) = \begin{cases} U_{j+1/2}^{n+1}(x + j \Delta x, t) & \text{si } x \in [0, \Delta x/2] \\ U_{j-1/2}^{n+1}(x + j \Delta x, t) & \text{si } x \in [-\Delta x/2, 0] \end{cases} \quad t \in ]t^n, t^{n+1}].$$

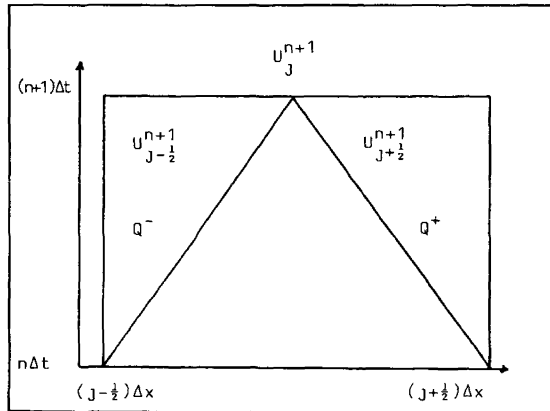


Figure 2. — Une maille du plan  $(x, t)$ .

Sur  $Q^-$ ,  $U_{j-1/2}^{n+1}$  est la solution de faible  $w_t + f(w)_x = 0$ , on a donc :

$$\begin{aligned}
 0 = \iint_{Q^-} (w_t + f(w)_x) k dx dt &= - \iint_{Q^-} (k_t w + k_x f(w)) dx dt + \\
 &+ \int_{\Gamma^-} (w, f(w)) \cdot \vec{n} k d\Gamma
 \end{aligned}$$

Posons :

$$k = k\left(\frac{x + \Delta x/2}{t - n \Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{2 \Delta t}{\Delta x}$$

$$k_t = -\frac{x + \Delta x/2}{(t - n \Delta t)^2} \frac{\Delta t}{\Delta x} k' \quad \text{et} \quad k_x = \frac{1}{t - n \Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} k'$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q^-} (k_t w + k_x f(w)) dx dt &= \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{n \Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{-\Delta x/2+t/\sigma} \frac{1}{(t - n \Delta t)} k' f(w(x + j \Delta x, t)) dx dt \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \int_{n \Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{-\Delta x/2+t/\sigma} \frac{x + \Delta x/2}{(t - n \Delta t)^2} k' w(x + j \Delta x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Cependant, sur  $Q^-$  :

$$w = U_{j-1/2}^{n+1}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{x + \Delta x/2}{t - n \Delta t} \quad \text{et} \quad (t - n \Delta t) d\xi dt = dx dt.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \iint_{Q^-} (k_t w + k_x f(w)) dx dt &= \\ &= \frac{\Delta t^2}{\Delta x} \int_0^{1/\sigma} k' \left(\frac{\xi \sigma - 1}{2}\right) [f(U_{j-1/2}^{n+1}(\xi)) - \xi U_{j-1/2}^{n+1}(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

il reste

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (w, f(w)) \cdot \vec{n} k d\Gamma &= -\frac{\Delta x}{2} k(0^-) \bar{v}_j^n + \Delta t k(0^-) f(\bar{v}_j^n) \\ &\quad - \int_0^{-\Delta x/2} k(x/\Delta x) U_{j-1/2}^{n+1}(x + j \Delta x, (n + 1) \Delta t) dx \\ &\quad - \Delta t \cdot k(-1/2) f(\bar{U}_{j-1/2}^{n+1}). \end{aligned}$$

En opérant de même sur  $Q^+$ , on obtient finalement

$$\bar{v}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} k(x/\Delta x) U_j^{n+1}(x + j \Delta x, (n + 1) \Delta t) dx$$



$$\begin{aligned} \bar{v}_j^{n+1} = & \left[ \frac{k(0^-) + k(0^+)}{2} \right] \bar{v}_j^n - \frac{\sigma}{2} [k(0^-) - k(0^+)] f(\bar{v}_j^n) \\ & - \frac{\sigma}{2} [k(1/2) f(\bar{U}_{j+1/2}^{n+1}) - k(-1/2) f(\bar{U}_{j-1/2}^{n+1})] \\ & + \frac{\sigma^2}{4} \int_{-1/\sigma}^{0} k' \left( \frac{\xi\sigma + 1}{2} \right) (f(U_{j+1/2}^{n+1}(\xi)) - \xi U_{j+1/2}^{n+1}(\xi)) d\xi \\ & + \frac{\sigma^2}{4} \int_0^{1/\sigma} k' \left( \frac{\xi\sigma - 1}{2} \right) (f(U_{j-1/2}^{n+1}(\xi)) - \xi U_{j-1/2}^{n+1}(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

On rappelle que si  $w$  est la solution d'un problème de Riemann,  $f(w(\xi)) - \xi w(\xi)$  est continue, même en présence de chocs.

Lorsque  $k = \frac{1}{b-a} \chi_{[a,b]}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq a < b \leq \frac{1}{2}$ , cette expression se simplifie et les intégrales se calculent facilement en fonction des sauts de  $k$  en  $a$  et  $b$  et des valeurs de :

$$- \quad U_{j+1/2} \text{ en } \xi_a = \frac{2a-1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ si } a \in [0, 1/2]$$

$$\text{et} \quad \xi_b = \frac{2b-1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ si } b \in [0, 1/2]$$

$$- \quad U_{j-1/2} \text{ en } \xi_a = \frac{2a+1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ si } a \in [-1/2, 0]$$

$$\text{et} \quad \xi_b = \frac{2b+1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ si } b \in [-1/2, 0].$$

— Une propriété d'exactitude de certains schémas.

Définissons la suite  $\{k^n\}_n$  par :

$$k^n = M \chi \left[ -\frac{1}{2} + \frac{l(n)}{M}, -\frac{1}{2} + \frac{l(n)+1}{M} \right] \quad \text{où } M \in \mathbb{N}^* \text{ et } 0 \leq l(n) < M.$$

On peut par exemple choisir  $l(n)$  égal au reste de la division entière de  $n$  par  $M$ . La suite  $\{v^n\}_n$  de mesures  $v^n$  de densité  $k^n$  vérifie alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v^k = dx.$$

Considerons le problème scalaire

$$\left. \begin{aligned} w_t + f(w)_x &= 0 \\ w(x, 0) &= \begin{cases} w_r & \text{si } x > \frac{\Delta x}{2} \\ w_l & \text{si } x < \frac{\Delta x}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Notons  $\bar{U}_j^M = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} w(x + j \Delta x, M \Delta t) dx$  où  $w$  est la solution exacte de (7.1) au temps  $M \Delta t$

Sous l'hypothèse CFL  $\lambda_0 \leq \frac{1}{2} \sup_{|w| \leq \max(|w_l|, |w_r|)} |f'(w)|$ , on a

**PROPOSITION 7.1** *Si  $f'$  est croissante sur  $[w_l, w_r]$  et si  $\{l(n)/n = 1, \dots, M\}$  est exactement l'ensemble d'entiers  $\{0, \dots, M - 1\}$ , alors, au temps  $M \Delta t$ , l'approximation numérique  $\bar{v}_j^M$  est la valeur moyenne de la solution exacte de (7.1) sur l'intervalle  $[(j - \frac{1}{2}) \Delta x, (j + \frac{1}{2}) \Delta x]$*

*Preuve* Il existe un unique  $J$  vérifiant  $1 \leq J < [M/2] + 1$  et tel que  $(J - 1/2) \frac{\Delta x}{M \Delta t} \leq f'(w_r) < (J + 1/2) \frac{\Delta x}{M \Delta t}$  et il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_j^M}{\partial w_r} &= 0 \quad \forall j < J, & \frac{\partial \bar{U}_j^M}{\partial w_r} &= 1 \quad \forall j \geq J \\ \frac{\partial \bar{U}_J^M}{\partial w_r} &= J + 1/2 + M \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(w_r) \end{aligned}$$

L'égalité  $\frac{\partial \bar{v}_j^M}{\partial w_r} = \frac{\partial \bar{U}_j^M}{\partial w_r}$  pour tout  $j$  est alors montrée par récurrence, l'hypothèse de récurrence étant la suivante

— si  $\{n \leq m/l(n) = J\} = \emptyset$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_j^m}{\partial w_r} &= 0 \quad \forall j \leq K \quad \text{où } K = \# \{n/l(n) < J\} \\ \frac{\partial \bar{v}_j^m}{\partial w_r} &= 1 \quad \text{et } \bar{v}_j^m = w_r \quad \forall j > K \end{aligned}$$

— si  $\{n \leq m/l(n) = J\} \neq \emptyset$ , alors :

$$\frac{\partial \bar{v}_j^m}{\partial w_r} = 0 \quad \forall j \leq K \quad \text{où} \quad K = \# \{n/l(n) < J\}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j^m}{\partial w_r} = 1 \quad \text{et} \quad \bar{v}_j^m = w_r \quad \forall j > K, \quad j \neq K + 1$$

$$\frac{\partial \bar{v}_{K+1}^m}{\partial w_r} = J + 1/2 - \frac{M \Delta t}{\Delta x} f'(w_r)$$

avec :

$$(J - 1/2) \frac{\Delta x}{M \Delta t} \leq f'(\bar{v}_{K+1}^M) \leq f'(w_r) < (J + 1/2) \frac{\Delta x}{M \Delta t}.$$

Il est facile mais long de vérifier que l'hypothèse de récurrence est vraie pour  $m = 1$  ; pour la même raison, nous laissons le soin au lecteur de vérifier que si l'hypothèse est vraie au rang  $m$ , alors est vraie au rang  $m + 1$  avec  $m + 1 \leq M$ .

Pour  $w_l$  fixé  $\bar{v}_j^M$  et  $\bar{U}_j^M$  sont des fonctions de  $w_r$  seul qui sont égales pour  $w_r = w_l$  ; la récurrence montre donc que  $\bar{v}_j^M = \bar{U}_j^M$  pour tout  $j$ .

## 8. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

a) Nous présentons quelques résultats numériques pour l'équation de Burgers :

$$\begin{cases} w_t + \left(\frac{w^2}{2}\right)_x = 0 \\ w_0(x) = \begin{cases} w_l & \text{si } x < 0 \\ w_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Pour les figures 3a, 3b, 3c, la donnée initiale est  $w_l = 10$  et  $w_r = 0$  ; la solution exacte est un choc qui se déplace à la vitesse  $\sigma = 5$ .

Pour les figures 4a, 4b, 4c, la donnée initiale est  $w_l = -5$  et  $w_r = 10$  ; la solution exacte est une onde de détente.

Les solutions approchées sont calculées avec les schémas décrits dans la section 7 ( $k^n = M\chi \left[ -\frac{1}{2} + \frac{l(n)}{M}, -\frac{1}{2} + \frac{l(n)+1}{M} \right]$ ).

Pour les figures 3a et 4a,  $M = 1$  ; c'est le schéma de Godounov.  $M = 10$  pour les figures 3b et 4b et 100 pour les figures 3c et 4c. On remarque que pour  $M = 100$ , la proposition (7.1) est vérifiée : sur chaque maille, la solution approchée est la valeur moyenne de la solution exacte (voir fig. 4c). Dans tous les cas, le choc est bien représenté.

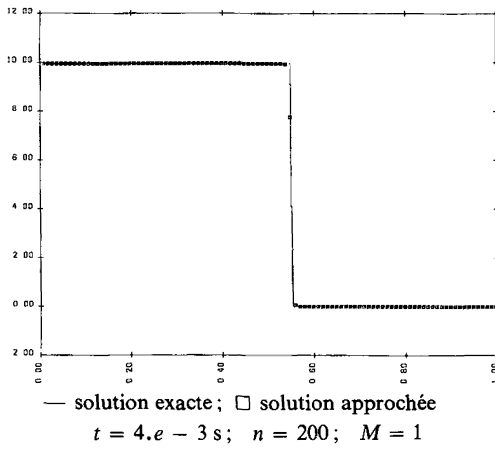


Figure 3a.

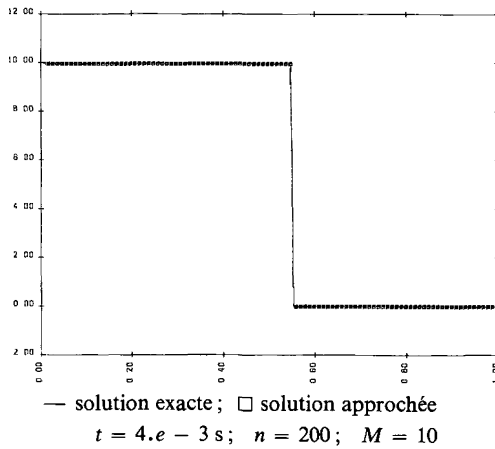


Figure 3b.

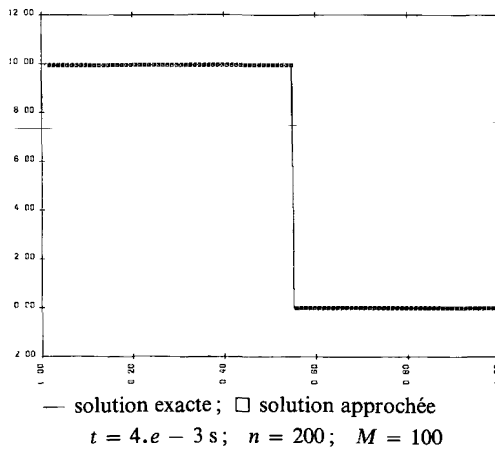


Figure 3c.

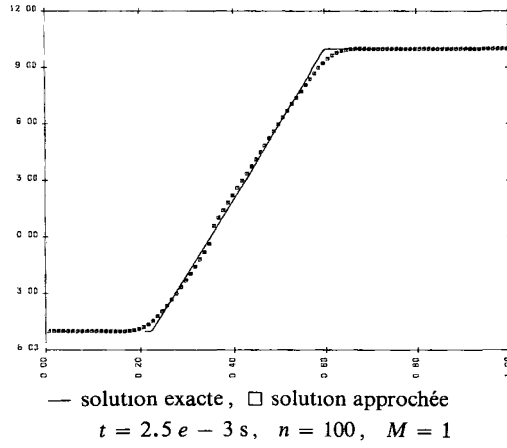


Figure 4a.

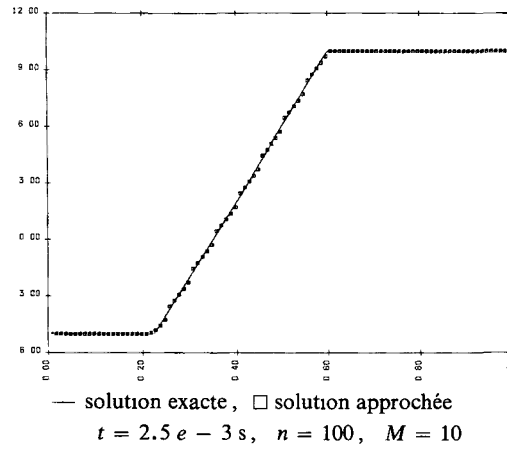


Figure 4b.

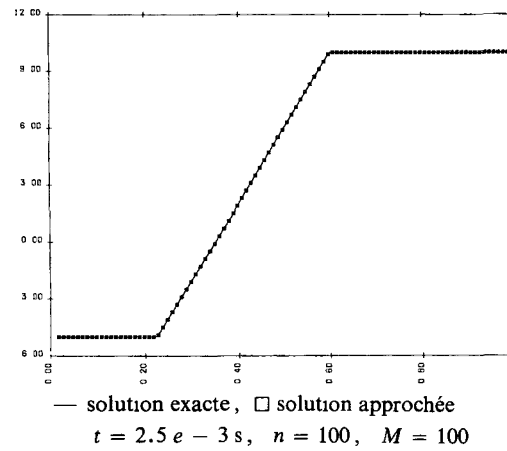


Figure 4c.

b) Nous présentons maintenant quelques résultats numériques pour le système de la dynamique des gaz :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial F(w)}{\partial x} = 0 \\ w_0(x) = \begin{cases} w_l & \text{si } x < 0 \\ w_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

avec  $w = (\rho, \rho u, E)$  et  $F(w) = (\rho u, P + \rho u^2, (P + E) u)$ ,  $P$  pression,  $\rho$  densité,  $u$  vitesse,  $E = \rho \left( e + \frac{u^2}{2} \right)$ ,  $e$  énergie interne,  $e = P/(\gamma - 1) \rho$ .

Nous donnons les résultats obtenus avec  $M = 1$  (schéma de Godounov) sur les figures 5a, 5b, 5c et 5d et avec  $M = 10$  sur les figures 6a, 6b, 6c et 6d pour le problème du tube à choc de Sod [16]. La donnée initiale est :

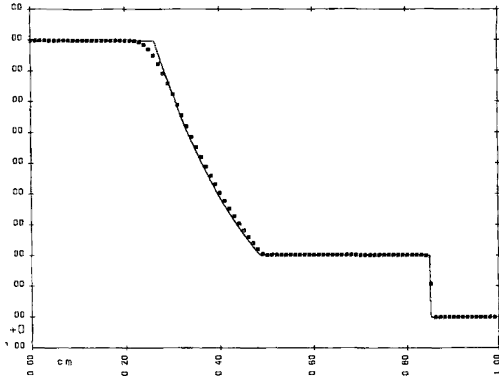
$$\rho_l = 1\,000, \rho_r = 125, P_l = 10, P_r = 1, u_l = u_r = 0;$$

les unités sont les unités MKSA.

On remarque une bien meilleure représentation de la discontinuité de contact pour le cas  $M = 10$  (voir fig. 6b et 6d).

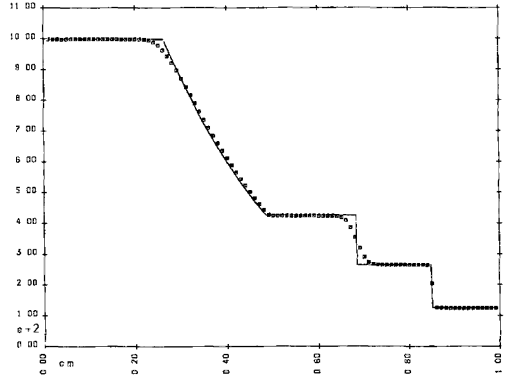
### Remerciements

L'auteur tient à remercier D. Serre pour ses encouragements et précieux conseils.



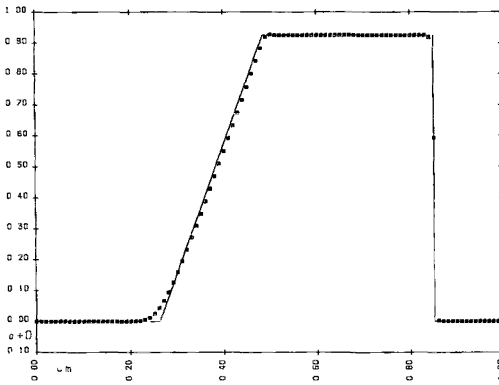
Pression au temps  $t = 2.e - 2$  s ;  $n = 439$  ;  $M = 1$   
 — solution exacte ; □ solution approchée

Figure 5a.



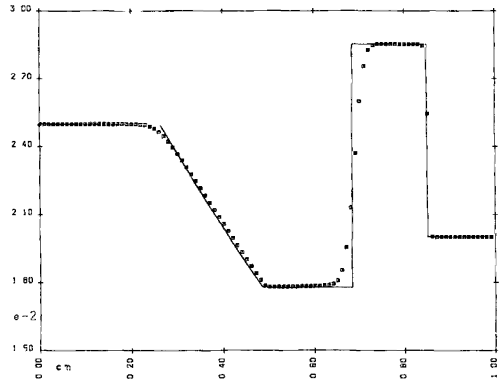
Densité au temps  $t = 2.e - 2$  s ;  $n = 439$  ;  $M = 1$   
 — solution exacte ; □ solution approchée

Figure 5b.



Vitesse au temps  $t = 2.e - 2$  s ;  $n = 439$  ;  $M = 1$   
 — solution exacte ; □ solution approchée

Figure 5c.



Energie au temps  $t = 2.e - 2$  s ;  $n = 439$  ;  $M = 1$   
 — solution exacte ; □ solution approchée

Figure 5d.

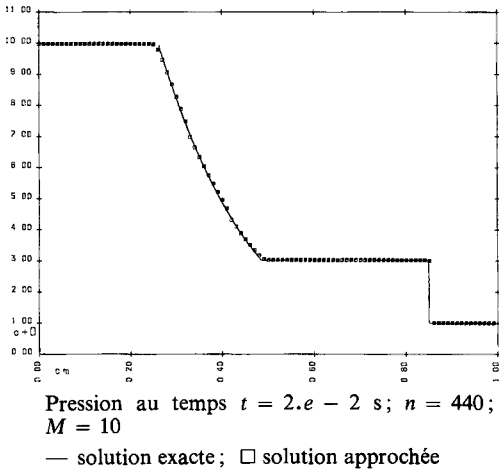


Figure 6a.

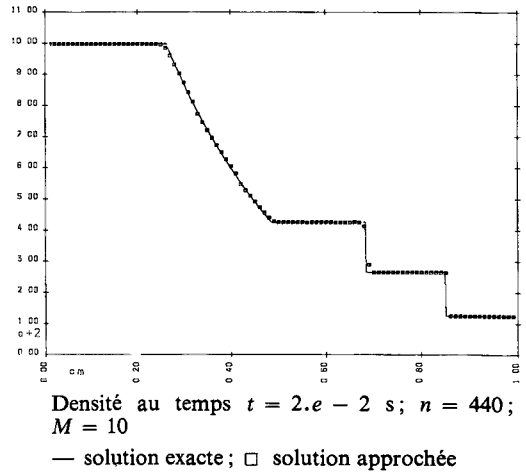


Figure 6b.

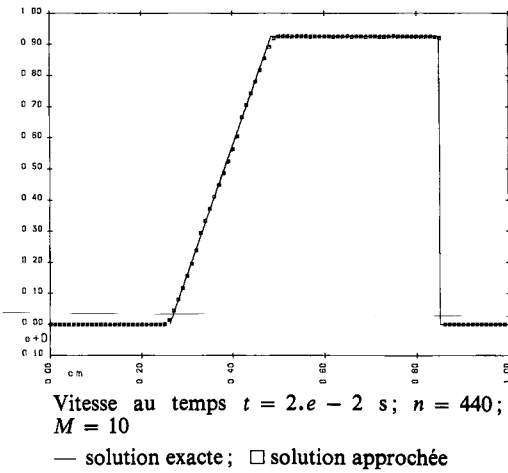


Figure 6c.

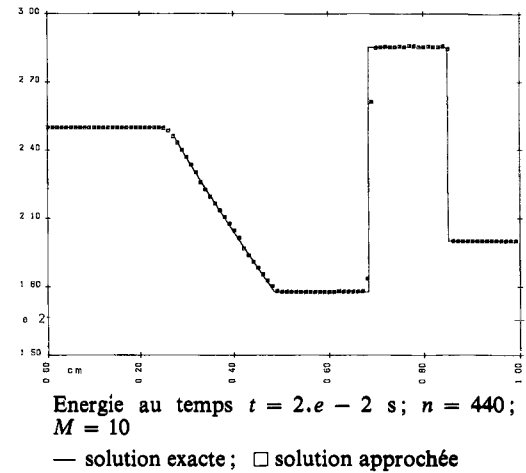


Figure 6d.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A J CHORIN, *Random choice solution of hyperbolic systems of equations*, Comm Pure Appl Math 18 (1965), pp 695-715
- [2] J GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Communications on pure and applied mathematics 18 (1965), pp 697-715
- [3] S K GODOUNOV, *A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*, Mat Sb 47 (1959), pp 271-290
- [4] S K GODOUNOV et Coll , *Resolution numerique des problemes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Mir, Moscou 1979
- [5] A HARTEN and P D LAX, *A random choice finite-difference scheme for hyperbolic conservation laws*, SIAM J Numer Anal 18 (1981), pp 289-315
- [6] S N KRUKOV, *First order quasi-linear equations in several independent variables*, Math URSS Sb , 10 (1970), pp 217-243
- [7] P D LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, SIAM Regional Conference Series in Applied Mathematics 11, 1973
- [8] P D LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws*, II Comm Pure Appl Math, 10 (1957), pp 537-566
- [9] B VAN LEER, *On the relation between the upwind differencing schemes of Godounov, Enquist-Osher, and Roe*, SIAM J Sci Stat Comp 5 (1984), pp 1-20
- [10] A Y LEROUX, *These de Docteur es-Sciences Mathematiques*, Universite de Rennes (1979)
- [11] T P LIU, *Admissible solutions of hyperbolic conservation laws*, Memoire of the AMS, Vol 30, No 240, 1981
- [12] T P LIU, *The deterministic version of the Glimm scheme*, Comm Math Phys , 57 (1977), pp 135-148
- [13] S OSHER, *Riemann solvers, the entropy condition, and difference approximations*, SIAM J Numer Anal 21 (1984), pp 217-235
- [14] S OSHER and F SOLOMON, *Upwind schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, Math Comp , 38 (1981), pp 357-372
- [14] P L ROE, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, J Comp Phys 43 (1981), pp 357-372
- [15] M SCHATZMAN, *Introduction a l'analyse des systemes hyperboliques de lois de conservation non-lineaire*, Publication de l'Equipe d'Analyse Numerique Lyon-Saint-Etienne (1985) No 37
- [16] G A SOD, *A survey of several difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, J Comput Phys , 27 (1978), pp 1-31