M2AN. MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS - MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

PHILIPPE DESTUYNDER
CHARBEL THEODORY

Homogénéisation de structures minces en béton armé

M2AN. Mathematical modelling and numerical analysis - Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 20, nº 1 (1986), p. 47-74

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1986__20_1_47_0>

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

(Vol. 20, n° 1, 1986, p. 47 à 74)

HOMOGÉNÉISATION DE STRUCTURES MINCES EN BÉTON ARMÉ (*)

par Philippe DESTUYNDER (¹) et Charbel THEODORY (²)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Une approche, pour modéliser le comportement élastique du béton armé, est proposée dans cette note. On utilise la méthode des développements asymptotiques conjointement avec les méthodes d'homogénéisation. Les formules obtenues seront appliquées à différents types de ferraillages et on en déduira quelques règles pratiques.*

Abstract. — *A formulation for modelling the elastic behaviour of a reinforced concrete plate is given in this paper. The asymptotic expansion technique is used, jointly with homogenization procedures. Applications to various kind of reinforcement are then discussed, from which practical rules are deduced.*

PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

Le béton est un matériau essentiel en génie civil. Mais on sait que ses mauvaises propriétés de résistance à la traction nécessite l'utilisation d'armatures en fer dont la mission est de renforcer les régions sollicitées à la traction. Le matériau composite ainsi fabriqué a, en première approximation, un comportement globalement élastique à condition toutefois que les zones de traction soient très limitées en volume et en intensité. Bien entendu, les caractéristiques mécaniques de ce milieu dépendent de la façon dont les ferraillages sont disposés, mais aussi du diamètre des fers utilisés. Nous verrons également que les liaisons entre fers (soudés ou épinglés, voire libres) jouent un rôle important dans la caractérisation des propriétés du béton armé.

Dans le calcul des structures élancées (par exemple les réfrigérants atmosphériques des centrales électriques), on choisit, en général, une modélisation isotrope (à l'aide d'un module de Young et d'un coefficient de Poisson). En outre, la rigidité est la même pour le comportement membranaire ou en flexion

(*) Reçu en octobre 1984.
(¹) Ecole Centrale de Paris, 92290 Chatenay Malabry.
(²) DER, EDF Stagiaire de Thèse DAFECO, 92140 Clamart.

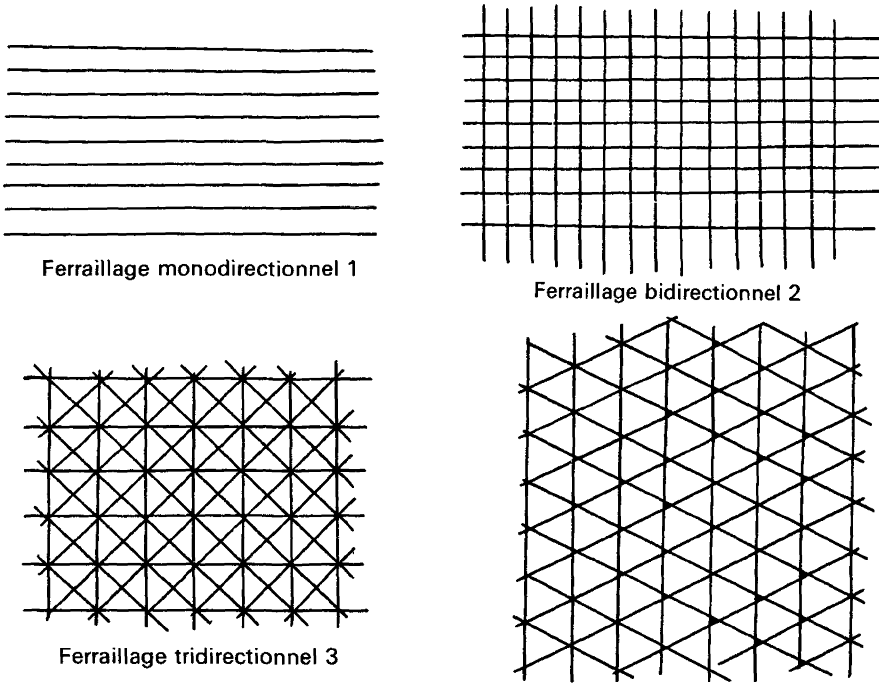
(au coefficient d'inertie près), alors que le décentrage des plans de ferraillage influe de manière essentielle sur la rigidité de flexion [1].

L'objet de cet article est de présenter une approche mathématique pour modéliser le comportement d'une coque en béton armé et de discuter les différences entre l'approche classique mentionnée plus haut et les résultats obtenus.

Nous examinerons plusieurs cas de ferraillages et nous donnerons dans chaque cas des rigidités équivalentes. L'outil d'analyse est la méthode des développements asymptotiques avec plusieurs petits paramètres. Nous prolongeons ainsi des études antérieures sur les plaques et les coques [2, 3], et dans un esprit différent, les travaux de D. Caillerie sur l'équation de la diffusion [4]. La méthode est d'ailleurs étudiée plus en détail dans le cas des composites par Th. Nevers [5]. D'autres détails de calculs qui ne sont pas donnés ici se trouvent dans [6].

I. DESCRIPTION DES STRUCTURES ÉTUDIÉES

L'essentiel des phénomènes que nous abordons peuvent être modélisés à partir d'une plaque mince. C'est pourquoi nous nous limiterons à cette situa-



Ferraillage monodirectionnel 1

Ferraillage bidirectionnel 2

Ferraillage tridirectionnel 3

Ferraillage isotrope 4

Figure 1.

tion. Les plans de ferraillages sont disposés parallèlement à la surface moyenne. La maille de base du ferraillage sera l'une de celles représentées sur la figure 1 (on justifiera en cours de texte la terminologie utilisée sur les légendes).

Les dimensions de la maille de référence (de l'ordre de l'épaisseur), ne permettent pas, pour un calcul de structures, de modéliser exactement les parties en béton et celles en fer. C'est pourquoi, suivant la voie tracée par d'autres [7, 8, 9], nous utiliserons une technique d'homogénéisation. Les constituants, c'est-à-dire le fer et le béton, sont supposés séparément homogènes, élastiques et isotropes. Nous ne discuterons pas de la validité de ces hypothèses car ce n'est pas l'objet de notre étude.

II. SYNOPSIS DE LA DÉMARCHE SUIVIE

Afin de guider le lecteur à travers les dédales de nos calculs, nous donnons ici l'idée directrice de la méthode employée.

Nous partons du modèle tridimensionnel de l'élasticité linéaire pour une plaque. L'épaisseur de la plaque étant considérée comme un petit paramètre (devant les autres dimensions), on transforme, par une affinité suivant l'épaisseur, le modèle initial, en un problème équivalent, mais posé cette fois sur une plaque dont l'épaisseur est unitaire.

Pour analyser simultanément la dépendance du modèle tridimensionnel vis-à-vis d'une part, de l'épaisseur et, d'autre part, de la taille des mailles de base du ferraillage, on introduit une variable locale, servant à décrire le comportement à l'intérieur d'une maille. Ceci conduit, suivant la procédure d'homogénéisation, à transformer le problème initial en un problème à plusieurs échelles faisant explicitement apparaître comme petit paramètre la taille de la maille du ferraillage.

Enfin le modèle limite est obtenu par un développement asymptotique, considérant les deux petits paramètres comme équivalents.

On retrouve ainsi des modèles usuels, mais avec des coefficients de rigidité déduits d'un problème d'homogénéisation (ou de plusieurs). On discutera en particulier sur les résultats obtenus l'influence des liaisons des fers (soudages ou ligatures).

III. LE MODÈLE TRIDIMENSIONNEL D'UNE PLAQUE EN BÉTON ARMÉ

La plaque que nous considérons occupe dans l'espace l'ouvert cylindrique

$$\Omega^{\varepsilon} = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$$

où ω est la surface moyenne de la plaque et $2\,\varepsilon$ son épaisseur. Les nappes de fers (nous supposerons qu'il y en a deux) sont à la cote $\pm\, z$ suivant l'épaisseur.

On supposera, pour simplifier, que les fers sont de section carrée de côté a. Chaque milieu, pris séparément (béton ou acier), est supposé isotrope. Ainsi, si σ_{ij} désigne la contrainte de Piola-Kirchhoff et γ_{ij} le tenseur de déformation, nous adopterons dans chaque milieu la relation :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left\{ \gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\gamma_{pp}\,\delta_{ij} \right\}$$

où E et ν désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du milieu (Ea, νa pour l'acier et Eb, νb pour le béton). Plus généralement nous écrirons cette relation sous la forme :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\,\gamma_{kl}\,, \tag{1}$$

avec la convention de sommation sur les indices répétés.

Le champ des déplacements cinématiquement admissibles est noté $\underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ en toute généralité. Le principe des Travaux Virtuels se formule ainsi (dans l'hypothèse des petits déplacements) :

$$\forall v \in \underset{\sim}{V}^{\varepsilon}, \qquad \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}\,\partial_i v_j = \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_i^{\pm}\,v_i + \int_{\Omega^\varepsilon} f_i\,v_i \tag{2}$$

où $g_i^{\pm}$ (respectivement f_i) désignent les forces de surface appliquées à la plaque sur les faces supérieures et inférieures notées $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon}$ (respectivement les forces de volume).

Une formulation particulièrement pratique pour notre propos est celle d'Hellinger-Reissner que nous rappelons ci-après.

Désignons par $\underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon}$ l'espace des champs de contraintes symétriques sur Ω^ε :

$$\underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} = \{ \tau = (\tau_{ij})\,;\, \tau_{ij} = \tau_{ij} \} \tag{3}$$

et par $a^\varepsilon(\sigma, \tau)$ la forme bilinéaire définie sur cet espace par :

$$a^\varepsilon(\sigma, \tau) = \int_{\Omega^\varepsilon} s_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\tau_{kl} \tag{4}$$

où s_{ijkl} est le tenseur de souplesse, c'est-à-dire l'inverse de a_{ijkl}. Nous utiliserons également la forme bilinéaire sur l'espace $\underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ définie par :

$$B^\varepsilon(\sigma, \tau) = -\int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij}\,\partial_i v_j = -\int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij}\,\gamma_{ij}(v)$$

où

$$\gamma_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad \text{(déformation linéaire)}$$

et enfin la forme linéaire sur $\underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ définie par :

$$L(v) = -\int_{\Omega^{\varepsilon}} f_i\, v_i - \int_{\Gamma_{+}^{\varepsilon} \cup \Gamma_{-}^{\varepsilon}} g_i^{\pm}\, v_i\,.$$

Le système d'équations (1) et (2) est alors équivalent à trouver un couple (σ, u) de l'espace $\underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon} \times \underset{\sim}{V}^{\varepsilon}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma}^{\varepsilon}, & a^{\varepsilon}(\sigma, \tau) + B^{\varepsilon}(\tau, u) = 0\,, \\ \forall v \in \underset{\sim}{V}^{\varepsilon}, & B^{\varepsilon}(\sigma, v) = L(v)\,. \end{cases}} \tag{5}$$

Nous partons de cette formulation que le lecteur pourra trouver plus en détail dans le livre de Washizu [10] ou celui de Valid [11].

IV. EFFET DE LOUPE DANS LA DIRECTION DE L'ÉPAISSEUR DE LA PLAQUE

Nous reprenons ici la transformation introduite en [2] et [3]. Posons tout d'abord :

$$\Omega = \omega \times]-1, 1[$$

ainsi que :

$$\Gamma_{\pm} = \omega \times \{\pm 1\}\,.$$

Désignons ensuite par F^{ε} l'application qui a un point M de l'ouvert Ω associe le point M^{ε} par :

$$\forall M = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \to M^{\varepsilon} = F^{\varepsilon}(M) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)\,.$$

Si ϕ est une fonction quelconque définie sur l'ouvert Ω^{ε}, on lui associe ϕ^{ε} définie sur Ω par :

$$\phi^{\varepsilon} = \phi \circ F^{\varepsilon}\,. \tag{6}$$

On notera en particulier que nous avons les règles de calcul suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i)} & \displaystyle\int_{\Omega^{\varepsilon}} \phi = \varepsilon \int_{\Omega} \phi^{\varepsilon}\,, \\ \text{(ii)} & \displaystyle\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}}\right)^{\varepsilon} = \frac{\partial \phi^{\varepsilon}}{\partial x_{\alpha}}\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \\ \text{(iii)} & \displaystyle\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\partial \phi^{\varepsilon}}{\partial x_3}\,. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Au changement de fonctions précédent, nous associons un changement d'inconnues de la façon suivante :

$$\left.\begin{array}{ll} u_\alpha^\varepsilon(M) = u_\alpha \circ F^\varepsilon(M), & u_3^\varepsilon(M) = \varepsilon u_3 \circ F^\varepsilon(M) \\ \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(M) = \sigma_{\alpha\beta} \circ F^\varepsilon(M), & \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(M) = \varepsilon^{-1} \sigma_{\alpha 3} \circ F^\varepsilon(M) \\ \sigma_{33}^\varepsilon(M) = \varepsilon^{-2} \sigma_{33} \circ F^\varepsilon(M). & \end{array}\right\} \quad (8)$$

Un simple calcul conduit alors au résultat suivant :

THÉORÈME 1 : *Si σ^ε, u^ε est l'élément de l'espace $\underset{\sim}{\Sigma} \times \underset{\sim}{V}$ construit à partir de σ, u solution de* (5) *à l'aide des formules* (8), *alors c'est aussi l'unique solution du problème variationnel suivant :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma},\ a_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0, \\ \forall v \in \underset{\sim}{V},\ B(\sigma^\varepsilon, v) = L^\varepsilon(v). \end{array}\right\}} \quad (9)$$

où nous avons posé pour des éléments τ, χ arbitraire de l'espace $\underset{\sim}{\Sigma}$ et v de l'espace $\underset{\sim}{V}$:

$$a_0(\tau, \chi) = \int_\Omega s_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \tau_{\alpha\beta}\, \chi_{\gamma\delta},$$

$$a_2(\tau, \chi) = 4 \int_\Omega s_{\alpha_3\beta_3}\, \tau_{\alpha_3}\, \chi_{\beta_3} + \int_\Omega s_{\alpha\beta 33}(\tau_{33}\, \chi_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}\, \chi_{33}),$$

$$a_4(\tau, \chi) = \int_\Omega s_{3333}\, \tau_{33}\, \chi_{33},$$

$$B(\tau, v) = -\int_\Omega \tau_{ij}\, \partial_i v_j$$

$$L^\varepsilon(v) = -\int_\Omega f_\alpha v_\alpha - \frac{1}{\varepsilon}\left\{\int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha^\pm v_\alpha\right\} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3^\pm v_3$$

(*on suppose le matériau monoclinique en posant a priori* : $s_{3\alpha\beta\gamma} = s_{333\alpha} = 0$). □

Remarque 1 : Les espaces $\underset{\sim}{\Sigma}$ et $\underset{\sim}{V}$ correspondant à $\underset{\sim}{\Sigma}^\varepsilon$ et $\underset{\sim}{V}^\varepsilon$ pour $\varepsilon = 1$. □

Remarque 2 : La forme linéaire des forces appliquées, L^ε, dépend explicitement de ε. Puisque le problème à résoudre est linéaire, on peut en fait faire appel au théorème de superposition et supposer que les forces appliquées à la plaque sont telles que :

$$\left.\begin{array}{l} g_\alpha^\pm = \varepsilon g_\alpha^{0\pm} \\ f_3 = \varepsilon f_3^0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} g_3^\pm = \varepsilon^2 g_3^{0\pm} \\ f_\alpha = f_\alpha^0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

et que $g_i^{0\pm}$ et f_i^0 sont indépendants de ε. On construira ainsi une solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ pour des forces d'un type particulier mais grâce au principe de super-superposition il est loisible de recombiner la solution associée à n'importe quel type de chargement. □

5. LA MÉTHODE DES ÉCHELLES MULTIPLES COUPLÉE AVEC LA THÉORIE ASYMPTOTIQUE DES PLAQUES

Le but de la méthode que nous nous proposons d'appliquer est de traduire à un niveau macroscopique le comportement local du béton armé ferraillé. Rappelons-en brièvement le principe.

Soit $x = (x_1, x_2)$ un point de la surface moyenne ω de la plaque. Les formes linéaires ou bilinéaires qui interviennent dans la formulation du problème (9) sont des intégrales sur l'ouvert $\Omega = \omega \times]-1, 1[$. Or ω est engendré par des cellules élémentaires, toutes identiques, soit P, de taille η (*cf. fig.* 2).

Nous avons donc pour toute fonction φ définie sur Ω :

$$\int_\Omega \phi(x_1, x_2, x_3) = \int_\omega \int_{-1}^{+1} \phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{z \in P(z)} \int_{-1}^{+1} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

où z désigne le centre (par exemple) de la maille $P(z)$. On utilise alors sur $P(z)$ un grossissement local (car la maille de référence est très petite. On pose à cet effet sur $P(z)$:

$$x_\alpha = z_\alpha + \eta y_\alpha \qquad \alpha = 1, 2\,. \tag{11}$$

Nous avons alors :

$$\int_\Omega \phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{z \in P(z)} \eta^2 \int_Y \int_{-1}^{+1} \phi(z_1 + \eta y_1, z_2 + \eta y_2, x_3)\, dy$$

et puisque η^2 est l'aire de cellule élémentaire $P(z)$, le second membre de l'expression ci-dessus converge vers une intégrale distribuée sur ω, à savoir :

$$\lim_{\eta \to 0} \int_\Omega \phi(x_1, x_2, x_3) = \lim_{\eta \to 0} \int_\omega \int_Y \int_{-1}^{+1} \phi(z_1 + \eta y_1, z_2 + \eta y_2, x_3).$$

Pour étudier le comportement asymptotique de la solution du problème (9) on remplacera donc la variable $x = (x_1, x_2)$ par le couple $z = (z_1, z_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ et les intégrales sur Ω par les intégrales sur $\omega \times]-1, 1[\times P$.

Nous en déduisons les règles de calcul suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2\,, \tag{12}$$

et en suivant J. L. Lions [8], nous transformons le problème (9) ou un problème *asymptotiquement* équivalent (lorsque $\eta \to 0$).

Les inconnues apparaissent maintenant comme des fonctions de z, y et x_3. Les conditions aux limites du problème physique sont exprimées par rapport aux coordonnées z et x_3 sur la frontière de l'ouvert $\omega \times]1, 1[$.

Les conditions portant sur la frontière de Y sont par contre beaucoup moins évidentes. Nous allons essayer de les introduire rationnellement.

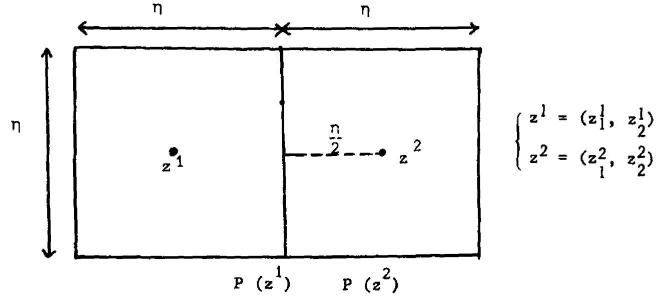


Figure 2.

Considérons deux mailles voisines, $P(z^1)$ et $P(z^2)$.

La continuité d'une fonction ϕ à l'interface entre ces deux mailles implique :

$$\begin{cases} \forall y_2 \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[\\ \phi\left(z_1^1 + \dfrac{\eta}{2}, z_2^1 + \eta y_2\right) = \phi\left(z_1^2 - \dfrac{\eta}{2}, z_2^2 + \eta y_2\right). \end{cases}$$

Ainsi lorsque les mailles sont infiniment petites, on trouve que les fonctions doivent être périodiques en y pour assurer la continuité à l'intermaille. Cette condition est indépendante de ce qui se passe dans la maille, mais suppose que toutes les mailles aient la même dimension. Nous attirons l'attention sur le fait que cette condition de périodicité ne s'applique qu'aux fonctions continues. Pratiquement les déplacements sont continus ainsi que les contraintes normales à la frontière de la cellule. En fait, si on utilise une formulation variationnelle il suffit d'imposer cette condition aux déplacements. Nous introduisons par conséquent les espaces de champs de contraintes définis sur l'ouvert $\Omega \times Y$ noté $\underset{\sim}{\Sigma}^y$, et de champs de déplacements également définis sur $\Omega \times Y$ et périodiques en y noté $\underset{\sim}{V}^y$. En outre, les déplacements de $\underset{\sim}{V}^y$ satisfont les conditions aux limites du problème sur la frontière de Ω. Compte tenu du changement de variables (11) et de la règle de calcul (12), le problème (9) est remplacé par un nouveau modèle qui lui est asymptotiquement équivalent. Il s'énonce ainsi :

trouver $(\sigma^{\varepsilon\eta}, u^{\varepsilon\eta}) \in \underset{\sim}{\Sigma}^y \times \underset{\sim}{V}^y$ tel que :

$$\left.\begin{aligned} &\forall \tau \in \underset{\sim}{\Sigma}^y,\ \underline{a}_0(\sigma^{\varepsilon\eta}, \tau) + \varepsilon^2\, \underline{a}_2(\sigma^{\varepsilon\eta}, \tau) + \varepsilon^4\, \underline{a}_4(\sigma^{\varepsilon\eta}, \tau) + \underline{B}(\tau, u^{\varepsilon\eta}) + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{\eta} \underline{B}_{-1}(\tau, \mu^{\varepsilon\eta}) = 0\,, \\ &\forall v \in \underset{\sim}{V}^y, \underline{B}(\sigma^{\varepsilon\eta}, v) + \frac{1}{\eta} \underline{B}_{-1}(\sigma^{\varepsilon\eta}, v) = \underline{L}(v)\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

où la forme bilinéaire $\underline{B}_{-1}$ est définie pour des éléments τ, v arbitraires de l'espace $\underset{\sim}{\Sigma}^y \times \underset{\sim}{V}^y$ par :

$$\underline{B}_{-1}(v) = - \int_{\Omega \times Y} \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} - \int_{\Omega \times Y} \tau_{\alpha 3} \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha}\,. \tag{14}$$

Par ailleurs, les formes bilinéaires $\underline{a}_0$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_4$ et $\underline{B}$ sont analogues à a_0, a_2, a_4, et B, mais en étendant les intégrales sur l'ouvert Ω en des intégrales sur $\Omega \times Y$.

Nous avons ainsi obtenu en (13), un problème où apparaissent les deux petits paramètres ε et η. Le comportement asymptotique de la solution $(\sigma^{\varepsilon\eta}, u^{\varepsilon\eta})$ peut alors être étudié en choisissant des dépendances particulières entre ces deux petits paramètres, cette démarche fut suivie par D. Caillerie [4]. Dans le cas du béton armé il est réaliste de prendre $\varepsilon = \eta$ (au sens des infiniments petits). Posons donc a priori :

$$(\sigma^{\varepsilon\eta}, u^{\varepsilon\eta}) = (\sigma^{\varepsilon\varepsilon}, u^{\varepsilon\varepsilon}) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \cdots \text{ etc}\,. \tag{15}$$

En reportant l'expression (15) dans les équations (13) et en identifiant les termes de même puissance en ε, nous obtenons pour des éléments τ, v arbitraires :

$$\underline{B}_{-1}(\tau, u^0) = 0\,, \tag{16}$$

$$\underline{B}_{-1}(\sigma^0, v) = 0\,, \tag{17}$$

$$\underline{a}_0(\sigma^0, \tau) + \underline{B}(\tau, u^0) + \underline{B}_{-1}(\tau, u^1) = 0\,, \tag{18}$$

$$\underline{B}(\sigma^0, v) + \underline{B}_{-1}(\sigma^1, v) = \underline{L}(v)\,, \tag{19}$$

etc.

Le prochain paragraphe est consacré au calcul du terme (σ^0, u^0).

6. CARACTÉRISATION DU TERME (σ^0, u^0)

Le principe de calcul est identique à celui exposé dans [3]. La prise en compte de la coordonnée y ne pose pas de problèmes nouveaux. Le lecteur trouvera les détails de ce calcul dans l'annexe 1. Résumons les résultats dans le :

THÉORÈME 2 : *Le terme* (σ^0, u^0), *solution des équations* (16)-(19) *peut être obtenu de la façon suivante :*

tout d'abord (σ^0, u^0) *est indépendant de la coordonnée locale* y. *Le déplacement* u_3^0 *est, en outre, indépendant de la coordonnée* x_3. *Le déplacement tangentiel* u_α^0 *est affine en* x_3, *nous poserons :*

$$u_\alpha^0 = \underline{u}_\alpha^0(x_1, x_2) - x_3\, \partial_\alpha u_3^0 .$$

La contrainte plane $\sigma_{\alpha\beta}^0$ *est affine par morceaux dans l'épaisseur de la plaque. Si on introduit l'effort résultant et le moment de flexion par :*

$$\underline{n_{\alpha\beta}^0 = \int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha\beta}^0} \qquad \underline{m_{\alpha\beta}^0 = \int_{-1}^{1} x_3\, \sigma_{\alpha\beta}^0} ,$$

on a d'une part les relations de comportement :

$$n_{\alpha\beta}^0 = 2\, A_{\alpha\beta\mu\nu}^H\, \gamma_{\mu\nu}(\underline{u}^0) , \qquad m_{\alpha\beta}^0 = -\frac{2}{3} I_{\alpha\beta\mu\nu}^H\, \partial_{\mu\nu}\, u_3^0 ,$$

et d'autre part :

$$\begin{cases} -\partial_\beta n_{\alpha\beta}^0 = g_\alpha^+ + g_\alpha^- + \displaystyle\int_{-1}^{1} f_\alpha , \\ -\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}^0 = g_3^+ + g_3^- + \displaystyle\int_{-1}^{1} f_3 + \partial_\alpha(g_\alpha^+ - g_\alpha^-) + \int_{-1}^{1} x_3\, \partial_\alpha f_\alpha . \end{cases}$$

Le cisaillement transverse et la contrainte de pincement sont respectivement donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3}^0 &= -g_\alpha^- - \int_{-1}^{x_3} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}^0\, dx_3 , \\ \sigma_{33}^0 &= -g_3^- + (x_3 + 1)\, \partial_\alpha g_\alpha^- + \int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^{t} \partial_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^0 . \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Le champ de contraintes planes $\sigma_{\alpha\beta}^0$ *est relié dans l'épaisseur de la plaque, par la loi de comportement, au tenseur de déformations :*

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = A_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma_{\mu\nu}(\underline{u}^0) - x_3\, A_{\alpha\beta\mu\nu}\, \partial_{\mu\nu} u_3^0 \tag{21}$$

où $A_{\alpha\beta\mu\nu}$ *est la tenseur de rigidité qui dans le béton est :*

$$A_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \{ (1 - \nu)\, \delta_{\alpha\mu}\, \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\, \delta_{\beta\mu} + 2\, \nu \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\mu\nu} \} \tag{22}$$

(E *et* ν *désignant respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du milieu), tandis que dans les plans de ferraillage ce tenseur est obtenu par homogénéisation* :

$$\boxed{A_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{|Y|}\left\{\int_Y a_{\alpha\beta\mu\nu} + \int_Y a_{\alpha\beta\lambda\xi}\,\gamma_{\lambda\xi}(w^{\mu\nu})\right\}} \tag{23}$$

$W^{\mu\nu}$ *désignant les trois fonctions* (W^{11}, W^{12}, W^{22}), *solutions des problèmes élémentaires posés sur la maille de référence* Y :

$W^{\alpha\beta}$, *Y périodique et*

$\forall v \in Y$ *périodique,*

$$\int_Y a_{\mu\nu\lambda\xi}\,\gamma_{\mu\nu}(w^{\alpha\beta})\,\gamma_{\lambda\xi}(v) = -\int_Y a_{\alpha\beta\lambda\xi}\,\gamma_{\lambda\xi}(v)\,. \tag{24}$$

Les tenseurs $A^H_{\alpha\beta\mu\nu}$ *et* $I^H_{\alpha\beta\mu\nu}$ *sont alors exprimés en fonction de* $A_{\alpha\beta\mu\nu}$ *par* :

$$\boxed{\left.\begin{aligned} A^H_{\alpha\beta\mu u} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A_{\alpha\beta\mu\nu}\,dx_3\,,\\ I^H_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x_3^2\,A_{\alpha\beta\mu\nu}\,dx_3\,.\end{aligned}\right\}} \quad \square \tag{25}$$

Remarque 3 : Le calcul des coefficients équivalents ne nécessite pas de résolution de problèmes de flexion, mais seulement celle d'un problème membranaire (en fait trois problèmes !). Il en aurait été autrement si on avait adopté l'hypothèse

$$\eta \gg \varepsilon$$

au lieu de celle retenue ici :

$$\eta \simeq \varepsilon\,.$$

Rappelons que η est la taille d'une maille élémentaire de ferraillage alors que ε est la demi-épaisseur de la plaque. □

Remarque 4 : On a supposé, dans la formulation du théorème 2, que les efforts appliqués à la plaque étaient indépendants de la coordonnée locale. Quand cette hypothèse doit être rejetée, il suffit de remplacer dans le théorème 2, les efforts par leur valeur moyenne sur une maille de ferraillage (cette remarque ne s'applique qu'aux composantes f_α et f_3 !). □

Remarque 5 : Puisque la contrainte plane, $\sigma^0_{\alpha\beta}$ est affine par morceaux, un simple calcul montre que la contrainte de cisaillement transverse est parabolique par morceaux. En matériaux composites, c'est la contrainte importante, car même si elle est faible vis-à-vis des contraintes planes, elle est à l'origine des phénomènes de délaminage, ici il s'agirait d'un décollement des plans de ferraillage. □

7. RETOUR A LA PLAQUE PHYSIQUE

En effectuant la transformation inverse de (6), nous pouvons formuler le modèle du théorème 2 à l'aide de vraies grandeurs physiques. Ainsi nous posons :

$$n_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} \qquad m_{\alpha\beta} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x_3\, \sigma_{\alpha\beta}\,,$$

où $\sigma_{\alpha\beta}$ désigne la contrainte plane dans la plaque. On a les relations de comportement :

$$n_{\alpha\beta} = 2\,\varepsilon A^H_{\alpha\beta\mu u}\, \gamma_{\mu\nu}(\underline{u})\,, \qquad m_{\alpha\beta} = -\frac{2\,\varepsilon^3}{3} I^H_{\alpha\beta\mu\nu}\, \partial_{\mu\nu} u_3\,, \tag{26}$$

ainsi que les équations d'équilibre :

$$\left.\begin{aligned} -\partial_\beta n_{\alpha\beta} &= g^+_\alpha + g^-_\alpha + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_\alpha\,, \\ -\partial_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} &= g^+_3 + g^-_3 + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_3 + \partial_\alpha(g^+_\alpha - g^-_\alpha) + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3\, \partial_\alpha\, f_\alpha\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

enfin

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= -\, g^-_\alpha - \int_{-\varepsilon}^{x_3} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta}\,, \\ \sigma_{33} &= -\, g^-_3 + \frac{(x_3 + \varepsilon)}{2}\, \partial_\alpha g^-_\alpha + \int_{-\varepsilon}^{x_3} \int_{-\varepsilon}^{t} \partial_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Les coefficients $A^H_{\alpha\beta\mu\nu}$ et $I^H_{\alpha\beta\mu\nu}$ sont déterminés comme au théorème 2.

8. CALCUL DES RIGIDITÉS ÉQUIVALENTES POUR UN LIT DE FERRAILLAGE UNIDIRECTIONNEL

Nous donnons dans ce paragraphe les constantes de rigidité $A_{\alpha\beta\mu\nu}$ dans un plan ferraillé.

Pour cela il suffit de calculer les fonctions $W_\lambda^{\mu\mu}$, solutions des problèmes membranaires (24). (L'indice λ désignant la composante du déplacement élémentaire $W^{\mu\nu}$.) Les notations sont celles de la figure 3.

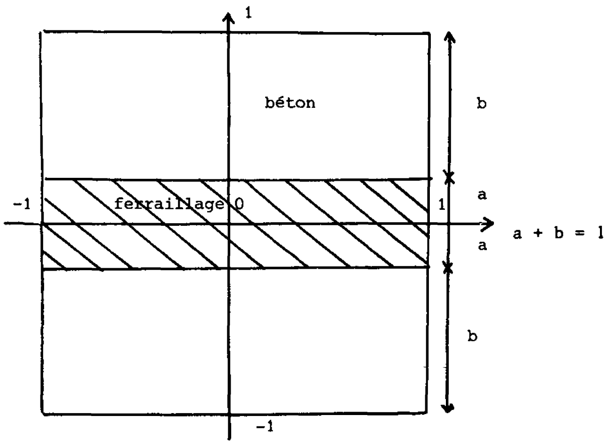


Figure 3. — Cellule de référence.

En fait le calcul des correcteurs $W^{\mu\nu}$ se ramène, dans le cas présent, à la résolution de trois problèmes monodimensionnels, car ils sont indépendants de la coordonnée y_1. En outre les fonctions $W_\lambda^{\mu\nu}$ sont périodiques et définies à une constante près.

On peut donc imposer la condition aux limites $W_\lambda^{\mu\nu} = 0$ en $y_2 = \pm 1$. Les équations sont :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2222}\frac{\partial W_2^{22}}{\partial y_2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y_2}(a_{2222}), \\ \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{2222}\frac{\partial W_2^{11}}{\partial y_2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y_2}(a_{1212}), \\ \frac{\partial}{\partial y_2}\left(a_{1212}\frac{\partial W_1^{12}}{\partial y_2}\right) &= -\frac{\partial}{\partial y_2}(a_{1212}). \end{aligned}\right.$$

Par ailleurs, $W_2^{12} = W_1^{22} = W_1^{11} = 0$. La résolution des équations précédentes est immédiate et conduit aux coefficients homogénéisés à l'aide de la formule (23) :

$$\left.\begin{aligned}
A_{1111} &= a\left[a_{1111} - \frac{a_{1122}^2}{a_{2222}}\right](a) + b\left[a_{1111} - \frac{a_{1122}^2}{a_{2222}}\right](b) + \frac{(C_{11})^2}{C_{22}} \\
A_{2222} &= C_{22} \\
A_{1122} &= C_{11} \\
A_{1212} &= \frac{a_{1212}(a)\, a_{1212}(b)}{a a_{1212}(b) + b a_{1212}(a)} \\
A_{1222} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

avec

$$C_{\mu\nu} = \frac{a \dfrac{a_{\mu\nu 22}}{a_{2222}}(a) + b \dfrac{a_{\mu\nu 22}}{a_{2222}}(b)}{\dfrac{a}{a_{2222}(a)} \ \dfrac{b}{a_{2222}(b)}},$$

Dans les formules précédentes $a_{\alpha\beta\mu\nu}(a)$, (respectivement $a_{\alpha\beta\mu\nu}(b)$), désigne les caractéristiques de l'acier (respectivement du béton). Les rigidités membranaires et flexionnelles de la plaque s'obtiennent ensuite à l'aide des formules (25). Donnons un exemple :

9. CALCUL DES RIGIDITÉS EN FLEXION ET EN MEMBRANE POUR UN DOUBLE LIT DE FERS

Considérons, à titre d'exemple, le cas d'une plaque en béton armé présentant deux lits de fers orthogonaux (*cf. fig.* 4). On se place, dans ce paragraphe, dans l'hypothèse où les fers sont faiblement solidaires. Les coefficients de rigidité d'un lit de fers, sont déduits de ceux de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons ainsi :

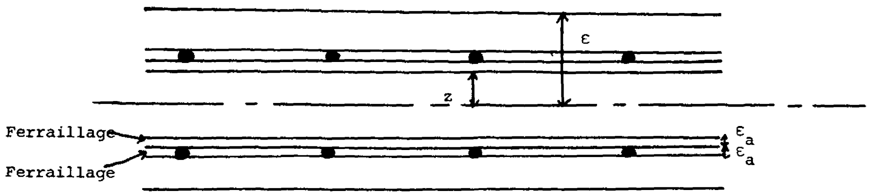


Figure 4. — Cas des ferraillages non soudés à deux couches.

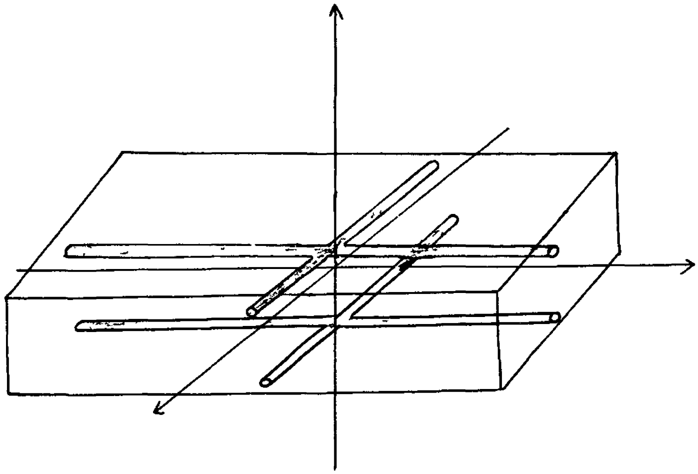


Figure 5. — Cas de ferraillages soudés dans un même plan.

$$A^{H_2}_{1111} = A^{H_1}_{2222} \ , \quad A^{H_2}_{2222} = A^{H_1}_{1111} \ , \quad A^{H_2}_{1122} = A^{H_1}_{1122} \ , \quad A^{H_2}_{1212} = A^{H_1}_{1212} \tag{30}$$

où $A^{H^1}_{\alpha\beta\mu\nu}$ (respectivement $A^{H^2}_{\alpha\beta\mu\nu}$) désignent les coefficients de rigidité homogénéisés dans un lit de fers parallèles à la direction 1 (respectivement 2). Désignons alors par ε_a le diamètre des fers et par z^1 la cote des plans de ferraillage. Un simple calcul conduit, à l'aide de la formule (23), aux expressions :

$$\boxed{A^H_{\alpha\beta\mu\nu} = \left(1 - 2\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon}\right) a_{\alpha\beta\mu\nu}(b) + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} A^{H^1}_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon} A^{H^2}_{\alpha\beta\mu\nu}} \tag{31}$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} I^H_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left[\frac{(z_1)^3}{\varepsilon} + 1 - \frac{(z_1 + 2\,\varepsilon_a)^3}{\varepsilon}\right] a_{\alpha\beta\gamma\delta}(b) \, + & \\ + \left[\frac{(z_1 + \varepsilon_a)^3}{\varepsilon} - \frac{(z_1)^3}{2}\right] A^{H_1}_{\alpha\beta\lambda\delta} & \\ + \left[\frac{(z_1 + 2\,\varepsilon_a)^3}{\varepsilon} - \frac{(z_1 + \varepsilon_a)^3}{\varepsilon}\right] A^{H^2}_{\alpha\beta\gamma\delta} \, . & \end{aligned}\right\}} \tag{32}$$

Remarque 6 : On notera sur les expressions (31) et (32) qu'il est nécessaire d'avoir :

$$z_1 + 2\,\varepsilon_a < \varepsilon$$

pour que le ferraillage soit intérieur à la plaque. □

Remarque 7 : Bien que dans le cas de maillages orthogonaux et invariants dans une rotation de $\frac{\pi}{2}$, nous ayions :

$$A^H_{1111} = A^H_{2222},$$

nous avons :

$$I^H_{1111} \neq I^H_{2222},$$

ceci à cause du décentrage des nappes de ferraillage par rapport à la surface moyenne de la plaque. Mais la différence est d'autant plus faible que les fers sont de section étroite. □

Remarque 8 : Dans le calcul de A^H et de I^H nous avons supposé pour simplifier que les fers étaient à section carrée, l'équivalence étant réalisée au niveau de l'aire des sections dans les applications où on aurait des fers ronds.

Pour illustrer ces propos, donnons quelques résultats numériques. Les résultats sont regroupés dans le tableau 1 et une interprétation graphique est proposée sur les figures 8, 9 et 10. On y a représenté les variations des coefficients $I^H_{\alpha\beta\mu\nu}$ en fonction du diamètre de ferraillage et ceci pour plusieurs valeurs de la cote z_1 des plans de ferraillage. Les données physiques sont indiquées dans le tableau 2. □

TABLEAU 1

(*Unité* 10^5 *Megapascal*); $\varepsilon_a = 0{,}14\,\varepsilon$.

A^H_{1111} A^H_{1212} A^H_{1122} / F^H_{1111} F^H_{1212} F^H_{1122}	$a = 0{,}05$			$a = 0{,}07$			$a = 0{,}1$		
$\frac{z_1}{2} = 0{,}75$	0,315	0,131	0,0468	0,324	0,132	0,0475	0,342	0,134	0,0493
	0,322	0,132	0,0473	0,336	0,133	0,0484	0,361	0,136	0,0503
$\frac{z_1}{2} = 0{,}5$	0,315	0,131	0,0468	0,324	0,132	0,0475	0,342	0,134	0,0493
	0,313	0,131	0,0465	0,319	0,132	0,0470	0,329	0,132	0,0476
$\frac{z_1}{\varepsilon} = 0{,}02$	0,315	0,131	0,0468	0,324	0,132	0,0475	0,342	0,135	0,0493
	0,307	0,130	0,0460	0.308	0.130	0.0461	0.313	0.131	0.0463

TABLEAU 2

E (béton) = 30 000 MPa ν (béton) = 0.15	E (acier) = 200 000 MPa ν (acier) = 0,3

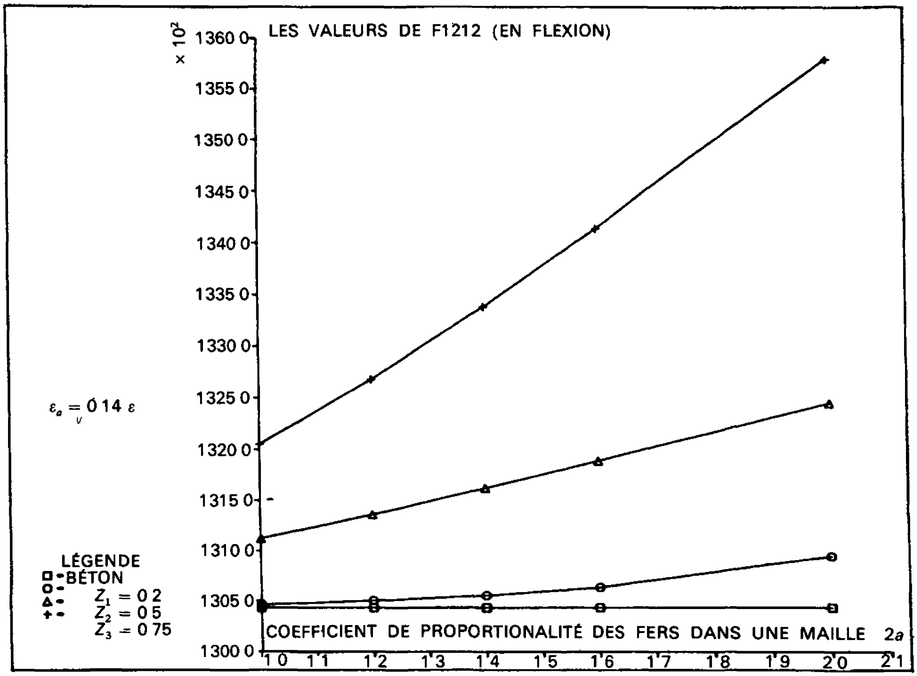


Figure 6.

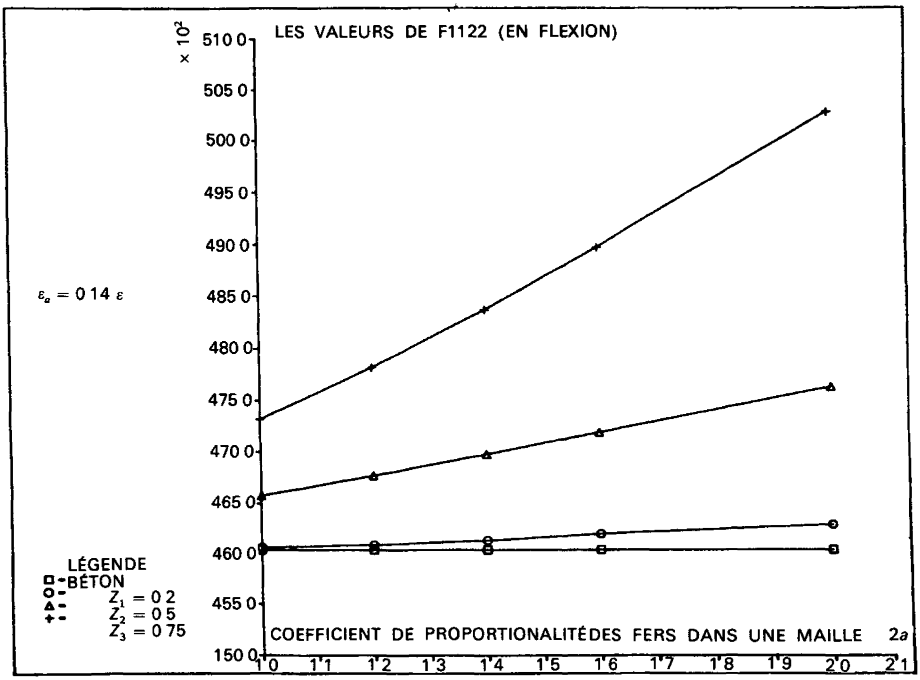


Figure 7.

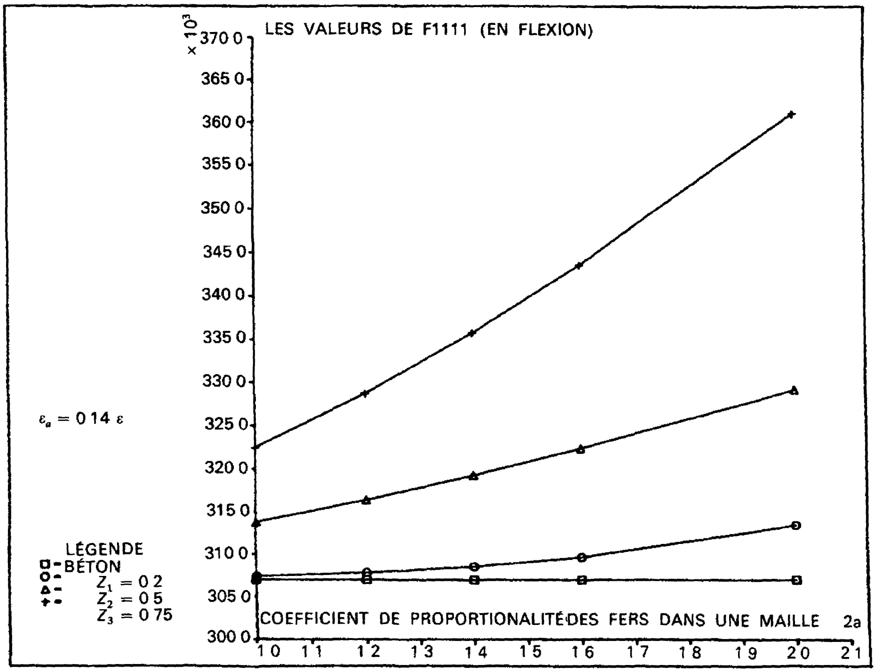


Figure 8.

10. CALCUL DES RIGIDITÉS EN FLEXION ET EN MEMBRANE POUR DES FERS SOUDÉS

On reprend ici l'exemple d'une dalle en béton armé, avec un seul lit de fers dans la demi-épaisseur. Le réseau de ferraillage est constitué de fers réalisant une grille régulière à maille carrée (*fig.* 7). Le calcul des coefficients nécessite cette fois le calcul des correcteurs par une méthode d'éléments finis ; il n'y a pas de solution analytique. Compte tenu de l'orthotropie du matériau homogénéisé, il y a en fait deux problèmes à résoudre. Le calcul effectif a été réalisé sur un quart de maille en utilisant les symétries (*cf.* Annexe 2). L'obtention des rigidités équivalentes se termine ensuite comme au paragraphe 9. Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus par la méthode décrite aux paragraphes 8 et 9 pour des fers non soudés disposés dans des lits parallèles juxtaposés. Pour comparer les rigidités des milieux homogénéisés on supposera que les cotes moyennes des lits de ferraillage coïncident (cotes dans la demi-épaisseur). Les valeurs calculées par les deux méthodes sont rassemblées dans le tableau 3. Les caractéristiques mécaniques des matériaux sont toujours celles du tableau 2.

TABLEAU 3

(*Unités* 10^5 MPa) $a = 0{,}05$ m, $\varepsilon_a = 0{,}14$.

A_{1111} / F_{1111}	A_{1212} / F_{1212}	A_{1122} / F_{1122}	Soudé			Multi-couche		
Carré (orthotrope)			0,316	0,132	0,0471	0,315	0,131	0,0468
			0,321	0,133	0,0477	0,322	0,132	0,0473
Carré anglais (orthotrope)			0,327	0,137	0,0530	0,323	0,137	0,0518
			0,332	0,139	0,0549	0,331	0,139	0,0535
Hexagone (isotrope)			0,323	0,135	0,0511	0,319	0,135	0,05
			0,330	0,137	0,0535	0,327	0,137	0,0523

On observera que les rigidités équivalentes sont très légèrement supérieures dans le cas de fers soudés, cette propriété pouvait bien entendu s'intuiter a priori.

La faible différence entre les résultats des deux méthodes (fers soudés ou fers multicouches) suggère de retenir la formulation multi-couche qui est beaucoup plus simple à mettre en œuvre.

D'un point de vue pratique le soudage de fers ne semble pas rentable.

Dans le cas d'une coque mince, dont la surface moyenne est elliptique (courbure de même signe) on sait que l'équilibre est essentiellement régi par les efforts membranaires, à l'exception des régions singulières (bords, chargements ponctuels, etc.), on entend par là que la coque est en équilibre membranaire.

Très souvent la coque membranaire est isostatique c'est-à-dire que les efforts résultants peuvent être déterminés indépendamment de la loi de comportement (pourvu qu'aucune discontinuité n'apparaisse). Dans ce cas, le ferraillage a pour seul effet de reculer la limite de rupture.

Par contre, dans le cas de coques à courbure gaussienne négative (hyperboloïde par exemple) les zones de flexion peuvent apparaître plus facilement dans la coque (la coque est moins raide).

Le ferraillage a alors pour effet de contrarier l'apparition de ces zones et ceci, bien entendu, d'autant plus que les fers sont excentrés par rapport à la surface moyenne de la coque.

C'est précisément dans ces zones que le cisaillement transverse est le plus important, bien qu'il demeure négligeable devant les efforts plans.

Son effet est important dans la mesure où il peut provoquer un délaminage des lits de ferraillage avec le béton, l'adhérence fers-béton étant fragile (on l'améliore habituellement en utilisant des fers torsadés). Le comportement d'une coque délaminée est alors un nouveau problème que nous n'avons pas abordé ici.

11. CONCLUSION

L'étude que nous avons présentée ici n'est qu'une première étape dans la modélisation du béton armé. C'est sans doute la plus facile. Une approche plus réaliste nécessite la prise en compte de l'endommagement sous ses différentes formes (notamment pour prendre en compte le délaminage des plans de ferraillage).

Retenons cependant qu'il existe des formules simples dans le cas élastique permettant de calculer les rigidités équivalentes d'un béton armé (paragraphes 8 et 9).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. LACOMBE, *Cours de Génie Civil,* Ecole Centrale, Paris, 1983.

[2] P. G. CIARLET, Ph. DESTUYNDER : A justification of the two dimensional linear plate model, *Journal de Mécanique 18* (1979), 315-344.

[3] Ph. DESTUYNDER, *Sur une Justification Mathématique des Théories de Plaques et de Coques en Elasticité Linéaire,* Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.

[4] D. CAILLERIE, The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body, *Math. Meths. Appl. Sci. 2* (1980), 251-270.

[5] Th. NEVERS, Rapport de recherche STCN, Marine Nationale, Paris (à paraître).

[6] C. THEODORY, Thèse de troisième cycle, Département MMN-EDF-DER, I.S.T.N., 1984.

[7] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics *127,* Springer-Verlag, Heidelberg, 1980.

[8] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures,* North Holland, Amsterdam, 1978.

[9] G. DUVAUT, Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement, dans *Singular Perturbations and Boundary Layer Theory,* pp. 131-145, Lecture Notes in Mathematics *554*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

[10] K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity,* Pergamon, Oxford, 1975.

[11] R. VALID *La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures,* Eyrolles, Paris, 1977.

[12] S. TIMOSHENKO, W. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and shells.* McGraw-Hill, 1959.

ANNEXE 1

CALCUL DU TERME (σ^0, u^0)

Explicitons les relations (16) et (17). Nous obtenons ainsi pour des éléments (τ, v) arbitraires :

$$\left.\begin{aligned} &-\int_{\Omega\times Y} \tau_{\alpha\beta}\, \underline{\gamma}_{\alpha\beta}(u^0) - \int_{\Omega\times Y} \tau_{\alpha 3} \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} = 0\,, \\ &-\int_{\Omega\times Y} \sigma_{\alpha\beta}^0\, \gamma_{\alpha\beta}(v) - \int_{\Omega\times Y} \sigma_{\alpha 3}^0 \frac{\partial v_3}{\partial y_\alpha} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{A.0}$$

Ces équations impliquent :

$$\gamma_{\alpha\beta}(u^0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_3^0}{\partial y_\alpha} = 0\,.$$

Par conséquent, u_α^0 est un déplacement solide en la variable $y = (y_\alpha)$, soit :

$$\begin{cases} u_1^0 = u_1^0(z, x_3) - y_2\, b(z, x_3) \\ u_2^0 = u_2^0(z, x_3) + y_1\, b(z, x_3) \end{cases}$$

par ailleurs u_3^0 est indépendant de la coordonnée y_α. En fait, la condition de périodicité en y nécessite $b = 0$. Par conséquent u_α^0 est indépendant de y.

Considérons maintenant la première relation (19), elle conduit à trois équations :

$$\forall \tau_{\alpha\beta}\,, \quad \int_{\Omega\times Y} s_{\alpha\beta\mu\nu}\, \sigma_{\alpha\beta}^0\, \tau_{\mu\nu} - \int_{\Omega\times Y} \tau_{\mu\nu}\, \gamma_{\mu\nu}(u^0) - \int_{\Omega\times Y} \tau_{\mu\nu}\, \underline{\gamma}_{\mu\nu}(u^1) = 0\,, \tag{A.1}$$

$$\forall \tau_{\alpha 3}\,, \quad \int_{\Omega\times Y} \tau_{\alpha 3}(\partial_\alpha^0 u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0) + \int_{\Omega\times Y} \tau_{\alpha 3} \frac{\partial u_3^1}{\partial y_\alpha} = 0\,, \tag{A.2}$$

$$\forall \tau_{33}\,, \quad \int_{\Omega\times Y} \tau_{33}\, \partial_3 u_3^0 = 0\,. \tag{A.3}$$

Les deux dernières relations impliquent d'une part :

$$\partial_3 u_3^0 = 0\,,$$

et d'autre part en choisissant $\tau_{\alpha 3}$ indépendant de y_α

$$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0$$

ce qui implique que u^0 est un champ de Kirchhoff-Love, soit compte tenu de l'indépendance en y :

$$\left.\begin{array}{lll} u_3^0 = u_3^0(z) & & \text{(indépendant de } x_3) \\ u_\alpha^0 = \underline{u}_\alpha^0(z) - x_3\, \partial_\alpha u_3^0 & & \text{(où } \underline{u}_\alpha^0 \text{ ne dépend que de } z). \end{array}\right\} \quad (A.4_1)$$

La relation (A.1), compte tenu de (A.4_1) est équivalente à :

$$s_{\alpha\beta\mu\nu}\, \sigma_{\mu\nu}^0 = \gamma_{\alpha\beta}(u^0) + \gamma_{\alpha\beta}(u^1).$$

L'inversion de cette relation conduit à :

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = a_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma_{\mu\nu}(u^0) + a_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma_{\mu\nu}(u^1). \quad (A.4_2)$$

Ce qui, en reportant cette relation dans la seconde équation (A.0), conduit à :

$$\forall v \in \underset{\sim}{V}^Y, \quad \int_{\omega\times]-1,1[\times Y} a_{\alpha\beta\mu\nu}\, \underline{\gamma}_{\alpha\beta}(u^1) . \underline{\gamma}_{\mu\nu}(v) = - \int_{\omega\times]-1,1[\times Y} a_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma_{\alpha\beta}(u^0) . \underline{\gamma}_{\mu\nu}(v).$$

La solution générale (en u) de cette équation peut être obtenue comme la somme d'une solution particulière (avec second membre) et d'un élément quelconque du noyau de l'opérateur du premier membre soit :

$$u_\alpha^1 = \underline{u}_\alpha^1(z, x_3) + \gamma_{\chi\xi}(u^0)\, W_\alpha^{\chi\xi}.$$

Le terme u_3^1 est pour l'instant arbitraire. L'équation (A.2) nous apprend néanmoins qu'il est indépendant de y_α.

Les fonctions $W_\alpha^{\chi\xi}$ sont les composantes (pour $\alpha = 1$ et 2) de trois champs de déplacements de l'espace $\underset{\sim}{V}^Y$ solutions (à un champ constant en y près) des équations :

$$\left.\begin{array}{l} W_\lambda^{\chi\xi} \in \underset{\sim}{V}^Y \quad (\text{car } W_3^{\chi\xi} = 0), \\ \forall v_\lambda \in \underset{\sim}{V}^Y, \quad \displaystyle\int_Y a_{\alpha\beta\mu\nu}\, \underline{\gamma}_{\alpha\beta}(W^{\chi\xi})\, \underline{\gamma}_{\mu\nu}(v) = - \int_{Y} a_{\chi\xi\mu\nu}\, \underline{\gamma}_{\mu\nu}(v). \end{array}\right\} \quad (A.5)$$

La résolution de l'équation (A.5) se fait en pratique sur la maille de référence Y. On notera que d'une part le champ de déplacements $W^{\chi\xi}$ est parallèle à la surface moyenne ω de la plaque et d'autre part la dépendance en les coordonnées y et x_3 se fait par l'intermédiaire des coefficients $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Considérons maintenant l'équation (19) et limitons-nous à des champs virtuels v de l'espace $\underset{\sim}{V}$, c'est-à-dire indépendants de la coordonnée y. Nous obtenons ainsi :

$$\forall v \in \underset{\sim}{V}, \qquad B(\sigma^0, v) = L(v) .$$

Cette relation s'explicite de la façon suivante (pour des champs v de l'espace $\underset{\sim}{V}$) :

$$\int_{\Omega \times Y} \sigma^0_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha v_\beta + \int_{\Omega \times Y} \sigma^0_{\alpha 3}\, \partial_3 v_\alpha = \int_{\Gamma^\pm \times Y} g^\pm_\alpha\, v_\alpha + \int_{\Omega \times Y} f_\alpha\, v_\alpha , \tag{A.6}$$

$$\int_{\Omega \times Y} \sigma^0_{\alpha 3}\, \partial_\alpha v_3 + \int_{\Omega \times Y} \sigma^0_{33}\, \partial_3 v_3 = \int_{\Gamma^\pm \times Y} g^\pm_3\, v_3 + \int_{\Omega \times Y} f_3\, v_3 . \tag{A.7}$$

Introduisons les contraintes macroscopiques définies par :

$$\Sigma^0_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^0_{ij} ; \qquad i, j = 1, 3, 3 .$$

Soit :

$$\int_\Omega \Sigma^0_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha v_\beta + \int_\Omega \Sigma_{\alpha 3}\, \partial_3 v_\alpha = \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_\alpha\, v_\alpha + \int_\Omega f_\alpha\, v_\alpha , \tag{A.8}$$

et

$$\int_\Omega \Sigma^0_{\alpha 3}\, \partial_\alpha v_3 + \int_\Omega \Sigma^0_{33}\, \partial_3 v_3 = \int_{\Gamma^\pm} G^\pm_3\, v_3 + \int_\Omega f_3\, v_3 , \tag{A.9}$$

où

$$G^\pm_i = \frac{1}{|Y|} \int_Y g^\pm_i , \qquad F_i = \frac{1}{|Y|} \int_Y f_i .$$

Par ailleurs, les équations (A.4_1) et (A.4_2) impliquent :

$$\Sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y a_{\alpha\beta\mu\nu} + \int_Y a_{\alpha\beta\chi\xi}\, \gamma_{\chi\xi}(W^{\mu\nu}) \right\} \gamma_{\mu\nu}(u^0) . \tag{A.10}$$

On introduit habituellement :

$$a^h_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{|Y|} \left\{ \int_Y a_{\alpha\beta\mu\nu} + \int_Y a_{\alpha\beta\chi\xi}\, \gamma_{\chi\xi}(W^{\mu\nu}) \right\} .$$

C'est le tenseur de rigidité plane homogénéisé. Il dépend de la coordonnée x_3. Ainsi, lorsque x_3 ne correspond pas à la côte d'un lit de fers, le déplacement $W^{\mu\nu}$ est nul et par suite :

$$a^h_{\alpha\beta\mu\nu} = a_{\alpha\beta\mu\nu}$$

(la nullité de $W^{\mu\nu}$ s'obtient en effectuant une intégration par parties dans le second membre de (A.5), ce qui compte tenu de la périodicité donne zéro).

Bien entendu la relation ci-dessus n'est plus valable, si x_3 correspond à la côte d'un plan de ferraillage.

En intégrant les équations d'équilibre (A.8) et (A.9), on déduit l'expression des contraintes de cisaillement transverse et de pincement :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma^0_{\alpha 3} &= - G^-_a - \int_{-1}^{x_3} (\partial_\beta \Sigma^0_{\alpha\beta} + F_a), \\ \Sigma^0_{33} &= - G^-_3 + \int_{-1}^{x_3}\int_{-1}^{t} \partial_{\alpha\beta}\Sigma^0_{\alpha\beta} + (x_3 + 1)\,\partial_\alpha G^-_\alpha . \end{aligned}\right\} \quad (A.11)$$

Considérons maintenant les équations (A.8) et (A.9), dans lesquelles, nous nous limiterons à des champs virtuels v_α indépendants de x_3. Nous obtenons ainsi :

$$\forall v_a \,; \qquad \int_\omega \left[\left[\int_{-1}^{1} \Sigma^0_{\alpha\beta}\right] \partial_\alpha v_\beta = \int_\omega \left[G^+_\alpha + G^-_\alpha + \int_{-1}^{1} F_\alpha\right] v_\alpha\right.$$

et en utilisant (A.10) :

$$\forall v_\alpha(z_1, z_2) \,; \qquad \int_\omega A^h_{\alpha\beta\mu\nu}\, \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}^0)\, \gamma_{\mu\nu}(v) = \int_\omega \left[G^+_\alpha + G^-_\alpha + \int_{-1}^{1} F_\alpha\right] v_\alpha \quad (A.12)$$

avec :

$$A^h_{\alpha\beta\mu\nu} = \int_{-1}^{1} a^h_{\alpha\beta\mu\nu} \,. \quad (A.13)$$

Le découplage entre les termes $\underline{u}^0_\alpha$ et $- \partial_\alpha u^0_3$ nécessite bien entendu que la plaque soit symétrique par rapport à la surface moyenne.

Pour terminer, choisissons dans (A.8) et (A.9) des champs virtuels de la forme suivante :

$$\begin{cases} v_3 \text{ est indépendant de } x_3 \text{ (il ne dépend donc que de } z_\alpha) \\ v_\alpha = - x_3\, \partial_\alpha v_3 \,. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\forall v_3 \,; \qquad \int_\omega \left[\int_{-1}^{1} - x_3\, \Sigma^0_{\alpha\beta} \right] \partial_{\alpha\beta} v_3 = \int_\omega Q_3\, v_3 + \int_\omega Q_\alpha\, \partial_\alpha v_3 \,,$$

avec :

$$Q_3 = G_3^+ + G_3^- + \int_{-1}^{1} F_3 \,, \qquad Q_\alpha = - \left[G_\alpha^+ - G_\alpha^- + \int_{-1}^{1} x_3\, F_\alpha \right].$$

En posant :

$$I^h_{\alpha\beta\mu\nu} = \int_{-1}^{1} x_3^2\, a^h_{\alpha\beta\mu\nu}$$

on obtient le modèle de flexion dont u_3^0 est solution :

$$\forall v_3(z_1, z_2) , \qquad \int_\omega I^h_{\alpha\beta\mu\nu}\, \partial_{\alpha\beta} u_3^0\, \partial_{\mu\nu} v_3 = \int_\omega Q_3\, v_3 + \int_\omega Q_\alpha\, \partial_\alpha v_3 \,. \quad \text{(A.14)}$$

Il convient de prendre en compte les conditions aux limites que doivent satisfaire les déplacements u_α^0 et u_3^0 sur la frontière de ω. Dans le cas d'un bord encastré on a par exemple :

$$u_\alpha^0 = u_3^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial n} = 0 \qquad \left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial n} \text{ désigne la dérivée normale sur la frontière de } \omega \right).$$

L'ensemble des équations (A.11), (A.12) et (A.14) démontre le théorème 2.

ANNEXE 2

CALCUL DES CORRECTEURS SUR LA MAILLE DE RÉFÉRENCE DANS LE CAS SOUDÉ

Nous donnons ci-après la modélisation par éléments finis qui a été retenue pour chacune des mailles élémentaires, dans le calcul des correcteurs. Compte tenu des symétries des problèmes à résoudre, nous avons retenu des fractions de maille.

Les conditions de périodicité deviennent des conditions de Dirichlet ou de Neuman homogènes pour de telles sous-mailles, ce qui simplifie la résolution numérique.

Figure A.1. — Cellule bidirectionnelle.

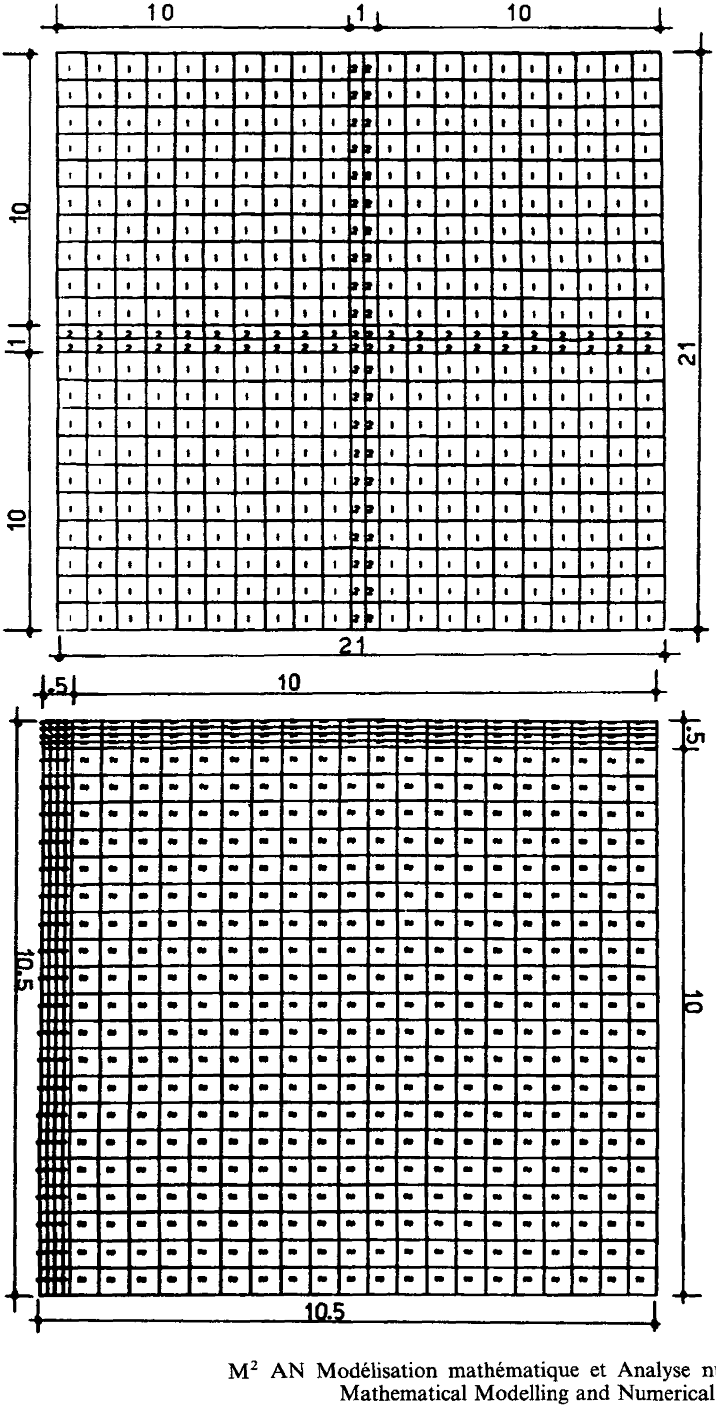


Figure A.2. — Cellule quadridirectionnelle.

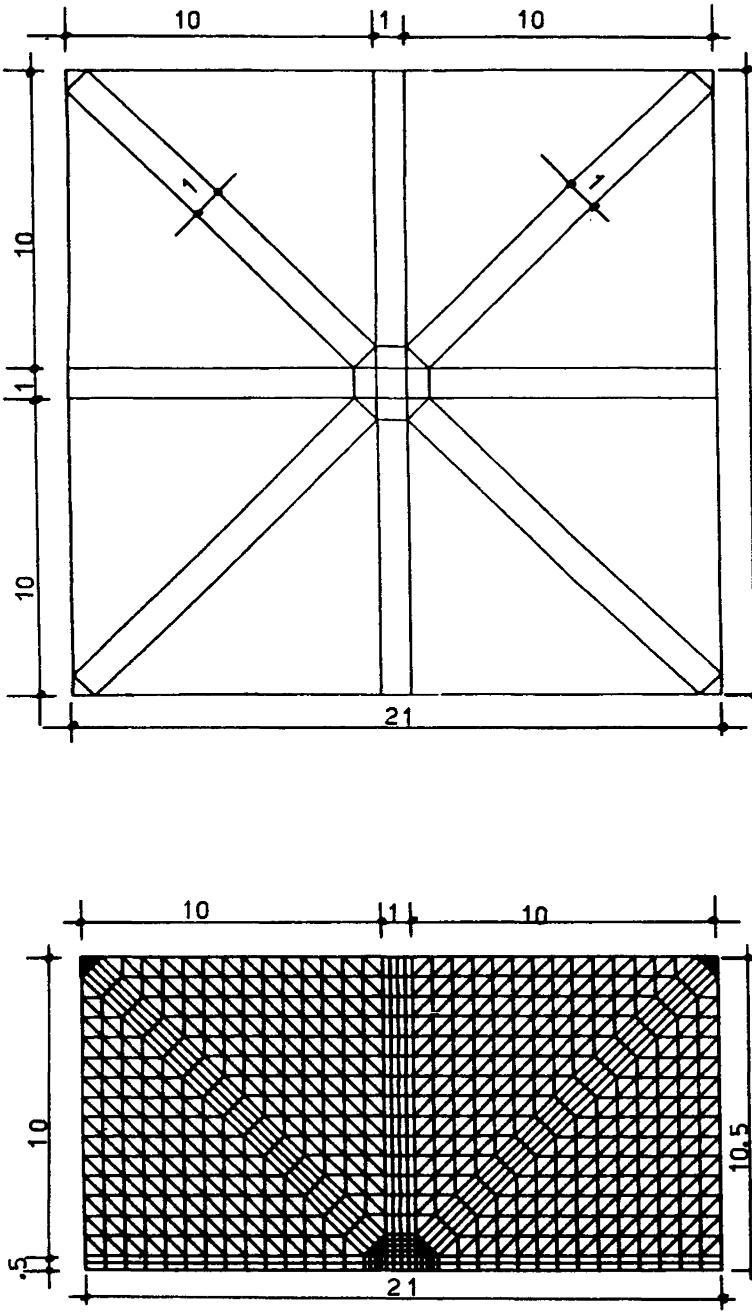


Figure A.3. — Cellule isotrope.