

G. MOTET

Une application de la théorie du contrôle optimal en ultracentrifugation

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, n° 3 (1984), p. 287-307

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_3_287_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL EN ULTRACENTRIFUGATION (*)

par G MOTET ⁽¹⁾

Communique par P G CIARLET

Resume — Nous considerons la question de l'optimisation du pouvoir de separation d'une centrifugeuse, que nous traitons comme un probleme de contrôle optimal. Nous expliquons d'abord comment ce probleme peut être traite dans le cadre de la Theorie du Contrôle Optimal. Ensuite utilisant quelques variantes des methodes du gradient et du gradient conjugue, nous obtenons des valeurs numeriques pour le contrôle optimal, c'est-a-dire le champ de temperature, impose a la frontiere de la centrifugeuse, maximisant le pouvoir de separation de celle-ci. Quelques ameliorations des methodes du gradient ont été introduites pour resoudre ce probleme.

Abstract — We consider the question of optimizing the separative power of a centrifuge and we treat it as an optimal control problem. We first explain how this problem may be embedded in the framework of Optimal Control Theory. Then, applying some variants of the classical gradient and conjugate gradient methods, we obtain numerical values for optimal control, that is the temperature field, imposed on the boundary of the centrifuge, maximizing the separative power of the centrifuge. Some improvements of gradient methods are introduced to resolve this problem.

1. INTRODUCTION

Nous allons étudier le problème de la séparation isotopique par ultracentrifugation et plus précisément nous résolvons, à l'aide de la théorie du contrôle optimal, la question de déterminer le champ de température à imposer sur les bords permettant d'obtenir un pouvoir de séparation maximal. En examinant les résultats numériques obtenus, nous ferons quelques remarques sur la méthode du gradient.

(*) Reçu en decembre 1982

(¹) CISI Études Scientifiques, B P n° 2 Saclay, 91190 Gif sur Yvette

Depuis debut 1984 GERII, DGE, INSA, Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex

Décrivons brièvement le problème physique : Une centrifugeuse est un cylindre de rayon a et de hauteur h fermé à ses extrémités qui tourne à grande vitesse angulaire ω . Elle contient de l'hexafluorure d'uranium (UF₆), composé de deux isotopes (235 et 238) de masse molaire respective 349 g et 352 g ; c'est cette faible différence de masse molaire qui, sous l'effet d'une très forte accélération centrifuge permet une séparation des deux isotopes dans la direction radiale. Ce phénomène est fortement accéléré par la présence d'un contrecourant (circulation verticale le long de la paroi); ce contrecourant est créé, par exemple, par une différence de température entre les couvercles.

Dans ce qui suit nous allons étudier le rendement maximal d'une centrifugeuse (de caractéristiques données) lorsqu'on fait varier le profil thermique imposé sur le bord de la centrifugeuse. Cette étude nous a été suggérée par M. Soubbaramayer dont l'article [1] décrit de manière plus détaillée les phénomènes physiques impliqués.

Le modèle mathématique est présenté dans la section suivante; dans la section 3 nous abordons la résolution numérique de ce problème; les résultats numériques sont donnés dans la section 4 ainsi que quelques commentaires et améliorations des méthodes numériques. Enfin dans la section 5 nous introduisons une nouvelle méthode de descente qui est particulièrement adaptée au problème que nous avons traité ici.

2. MODÈLE MATHÉMATIQUE

Le problème a été résolu dans le cadre général de la théorie du contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles; les résultats utilisés sont énoncés au paragraphe 2.1; ceux-ci sont standards et pourront être précisés par la lecture des références [2], [3], [4], [5], [6].

Le paragraphe 2.2 montre comment notre problème se place dans ce cadre.

2.1. Cadre utilisé

Nous considérons un système dont l'état y est défini par les équations :

$$\left. \begin{array}{l} Ay = 0 \\ By = v \end{array} \right\} \quad (1)$$

où A est un opérateur linéaire aux dérivées partielles, opérateur défini sur un espace de Hilbert X (espace de fonctions définies sur un ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N) et où B dénote un « opérateur frontière », c'est-à-dire un opérateur linéaire de X sur un espace de Hilbert Y , espace de fonctions définies sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Enfin v est un élément arbitraire de Y appelé le *contrôle*.

Nous dirons que le problème (1) est *bien posé* si pour chaque v de Y , il existe une unique solution y de X et si y dépend continuellement de v (bien sûr y dépend linéairement de v). On notera $y = y(v)$.

En général il existe des *contraintes* sur le contrôle v : on impose à v d'appartenir à l'ensemble U_{ad} des contrôles admissibles, et nous supposons :

$$U_{ad} \text{ est un sous-espace convexe, fermé de } Y. \quad (2)$$

Soit \tilde{J} une fonction définie sur X , faiblement semi-continue inférieurement et $\neq +\infty$; pour chaque $v \in U_{ad}$ nous définissons une *fonction coût* J par :

$$J(v) = \tilde{J}(y(v)). \quad (3)$$

On cherche un *contrôle optimal* v^* vérifiant :

$$v^* = \underset{v \in U_{ad}}{\text{Inf}} J(v). \quad (4)$$

Sous les hypothèses précédentes et en ajoutant la condition que U_{ad} soit borné, on montre l'existence d'au moins une solution.

Pour le calcul numérique du contrôle optimal nous utilisons des variantes de l'algorithme du gradient projeté (nous expliquerons ce choix plus tard), défini ainsi :

$$v^0 \in U_{ad}, \text{ on définit récursivement } (\rho^n, v^n) \in R \times U_{ad} \text{ par :} \quad (5)$$

$$J(v^n - \rho^n J'(v^n)) = \underset{\rho > 0}{\text{Inf}} J(v^n - \rho J'(v^n)) \quad (5.1)$$

$$v^{n+1} = P_{U_{ad}}[v^n - \rho^n J'(v^n)] \quad (5.2)$$

$P_{U_{ad}}$ est la projection euclidienne sur U_{ad} .

2.2. Problème d'ultracentrifugation

Nous allons, dans ce paragraphe, décrire dans le contexte de l'ultracentrifugation les trois points suivants : le système, la fonction coût, l'existence d'un contrôle optimal.

2.2.1. Le système

Nous utiliserons le modèle et l'approche de Soubbaramayer (cf. [1] et [7]). Soit $\Omega =]0, H[\times]0, 1[$ (où H représente la hauteur de la centrifugeuse divisée par le rayon). L'état $y = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{T})$ est solution du système des

équations d'hydrodynamique linéarisées autour du régime d'équilibre :

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{E}/E_R) \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \hat{u} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \operatorname{div} q \right\} &= -2 \hat{v} + \xi \hat{T} + (2 A^2)^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} \text{ dans } \Omega, \\ (\mathcal{E}/E_R) \left\{ \left(\nabla^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \hat{v} \right\} &= 2 \hat{u} \text{ dans } \Omega, \\ (\mathcal{E}/E_R) \left\{ \nabla^2 \hat{w} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \eta} \operatorname{div} q \right\} &= (2 A^2)^{-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} \text{ dans } \Omega, \\ \operatorname{div} q + 2 A^2 \xi \hat{u} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ -4 b \xi^u &= (\mathcal{E}/E_R) \nabla^2 \hat{T} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad \operatorname{div} q = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \hat{u}) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \eta}, \\ E_R &= \exp[-A^2(1 - \xi^2)], \quad b = (\gamma - 1) P_r A^2/2 \gamma \end{aligned}$$

où P_r , γ , \mathcal{E} et A sont des constantes dont les ordres de grandeur sont respectivement 0,96, 1 065, 10^{-8} , 25.

Les inconnues (\hat{u} , \hat{v} , \hat{w}) représentent les composantes de la vitesse en coordonnées cylindriques, \hat{p} la pression et \hat{T} la température; notons qu'il s'agit d'un problème raide possédant deux couches limites, l'une le long du bord vertical (couche d'Ekman), l'autre le long des couvercles (couche de Stewartson).

Précisons maintenant les conditions limites :

$$\left. \begin{aligned} \hat{u} = \hat{v} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \xi} &= 0 \quad \text{si } \xi = 0 \quad \text{et } 0 < \eta < H \quad (\text{axe}), \\ \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0, \quad \hat{T} &= v_1(\xi) \\ &\text{si } \eta = H \quad \text{et } 0 < \xi < 1 \quad (\text{couvercle supérieur}), \\ \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0, \quad \hat{T} &= v_2(\xi) \\ &\text{si } \eta = 0 \quad \text{et } 0 < \xi < 1 \quad (\text{couvercle inférieur}), \\ \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0, \quad \hat{T} &= v_3(\xi) \\ &\text{si } \xi = 1 \quad \text{et } 0 < \eta < H \quad (\text{bord vertical}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Le contrôle (v_1, v_2, v_3) sera considéré comme une fonction v définie sur

$$\partial_0 \Omega = \{ (\xi, 0), \xi \in [0, 1] \} \cup \{ (1, \eta), \eta \in [0, H] \} \cup \{ (\xi, H), \xi \in [0, 1] \}.$$

Les espaces X et Y sont définis par :

$$X = (H^1(\Omega))^4 \quad \text{et} \quad Y = H^{1/2}(\partial_0\Omega).$$

2.2.2. La fonction coût

Pour définir la fonction coût nous introduisons les notions suivantes :

$$\psi(\eta, \xi) = \int_0^\xi E_R \hat{w} \xi' d\xi' \quad (\text{fonction courant}), \quad (8)$$

$$J_1(\eta) = 2 S_C \mathcal{E}^{-1} \int_0^1 \psi \xi d\xi, \quad (9)$$

$$J_2(\eta) = 2 S_C^2 \mathcal{E}^{-2} \int_0^1 \psi^2 \frac{d\xi}{\xi}, \quad (10)$$

$$G(\eta) = \int_0^\eta \frac{-\varphi_N + 2 \mathcal{E}_0 J_1(\eta')}{1 + J_2(\eta')} d\eta', \quad (11)$$

$$F(\eta) = \int_{\eta_F}^\eta \frac{\varphi_P + 2 \mathcal{E}_0 J_1(\eta')}{1 + J_2(\eta')} d\eta', \quad (12)$$

$$\alpha_S = \frac{\exp[G(\eta_F)] + \left\{ 1 + \varphi_N \int_0^{\eta_F} \frac{\exp[-G(\eta)]}{1 + J_2(\eta)} d\eta \right\}}{\exp[-F(H)] + \varphi_P \int_{\eta_F}^H \frac{\exp[-F(\eta)]}{1 + J_2(\eta)} d\eta}, \quad (13)$$

$$\partial U(\hat{w}) = F \{ -\theta \log \alpha_S + \log [1 + (\alpha_S - 1)\theta] \}. \quad (14)$$

Nous avons alors défini le facteur de séparation ∂U (où F , θ , η_F sont des constantes physiques données).

Enfin nous définissons \tilde{J} :

$$\tilde{J}(\hat{w}) = -\partial U(\hat{w}), \quad (15)$$

et comme \hat{w} dépend du contrôle v , nous définissons la fonction coût J que l'on désire minimiser par

$$J(v) = \tilde{J}(\hat{w}(v)). \quad (16)$$

La linéarisation des équations de l'hydrodynamique, n'étant acceptable

qu'autour du point d'équilibre, on posera :

$$Uad = \{ v \in Y, \| v \| < \delta_0 \},$$

où $\| v \|$ est la norme de v dans Y et δ_0 un réel positif donné.

2.2.3. Existence d'un contrôle optimal

La question de l'existence d'un contrôle optimal est ouverte, et même la question de l'existence et surtout de l'unicité de $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T})$ solution (6) est ouverte. Nous indiquerons seulement que l'on peut remplacer (6) par un système plus simple où l'existence et l'unicité sont alors standards (équations linéaires de Stokes avec faible couplage thermique). Comme Uad est borné on obtient alors $\| \gamma(v) \|_X \leq C$, constante, indépendante de $v \in Uad$. Et en remarquant que la fonction coût ne s'exprime qu'à l'aide d'intégrales opérant sur $\gamma(v)$, on montre facilement que $\gamma \mapsto \tilde{J}(\gamma)$ est faiblement continue sur X , et ceci permet alors de montrer l'existence d'un contrôle optimal.

3. RÉOLUTION NUMÉRIQUE

Pour effectuer l'implantation numérique nous avons à notre disposition un code résolvant les équations linéarisées de l'hydrodynamique dont nous parlerons brièvement dans le 1^{er} paragraphe. Dans le second nous effectuerons plusieurs remarques qui permettront d'obtenir l'algorithme de résolution. Le paragraphe 3 décrira les calculs de la fonction coût et du gradient.

3.1. Le code Centaure

Afin de trouver la solution du problème de minimisation il est nécessaire de résoudre le système des équations de l'hydrodynamique. Nous avons utilisé le code Centaure ([8]) qui utilise la méthode des éléments finis de type P_1 .

Première remarque : Soient \mathcal{C}_h une triangulation de $\bar{\Omega}$, T un élément de

$$X_h = \{ t \in C^0(\bar{\Omega}), t|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{C}_h \},$$

alors $v = T|_{\delta_0\Omega}$ appartient à

$$Y_h = \{ v \in C^0(\delta_0\Omega), v|_{K \cap \delta_0\Omega} \in P_1(\partial K), \forall K \in \mathcal{C}_h, K \cap \partial_0\Omega \neq \emptyset \}.$$

On cherchera donc comme contrôle une fonction continue et linéaire par morceaux sur $\partial_0\Omega$.

Deuxième remarque : L'usage d'un tel code étant très onéreux, il n'est possible de l'utiliser qu'un nombre *peu élevé* de fois. Ce problème est abordé dans le paragraphe suivant.

3.2. Plan de la résolution numérique

Soient \mathcal{T}_h une triangulation de $\bar{\Omega}$, $(x_i)_{i=1}^N$ une partition de $\partial_0\Omega$ composée de sommets de la triangulation, $(v_i)_{i=1}^N$ N fonctions de Y_h définies par $v_i(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq N$, et $\tilde{Y}_h = \left\{ v \in Y_h, v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i, \lambda = (\lambda_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N \right\}$ sous-espace de Y_h .

Dans ce cas trouver un contrôle optimal v^* dans \tilde{Y}_h est équivalent à trouver $\lambda^* = (\lambda_i^*)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$J\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^* v_i\right) = \text{Inf} \left(J\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i v_i\right), (\lambda_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N, v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i \in \text{Uad} \right).$$

La contrainte $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i \in \text{Uad}$ est équivalente à $\max_{i=1, N} |\lambda_i| \leq \delta_0$, dépendant de δ_0 et N . On est ainsi ramené à un problème d'optimisation dans \mathbb{R}^N .

Pour utiliser dans \mathbb{R}^N la méthode du gradient projeté, il est nécessaire de pouvoir trouver $\rho^* \in \mathbb{R}^+$ minimisant $J(v - \rho \nabla J(v))$. Pour cela nous utilisons la méthode dichotomique avec fit parabolique (minimisation dans \mathbb{R}^+) :

- 1) On calcule $J_i = J\left(v - \frac{\rho}{i} \nabla J(v)\right)$ pour $i = 1, 2$ et 4 .
- 2) Si $J_4 \leq J_2$ on revient en 1) avec $\rho = \rho/2$.
- 3) Si $J_4 > J_2 \geq J_1$ on revient en 1) avec $\rho = 2\rho$.
- 4) Si $J_4 \geq J_2 \leq J_1$, ρ^* est le minimum de la parabole passant par les 3 points $(\rho/4, J_4)$, $(\rho/2, J_2)$, (ρ, J_1) .

Une remarque importante que nous développerons par la suite :

$$\lambda^* = \lambda - \rho^* \nabla J(\lambda)$$

approche le minimum de J dans la ligne de pente issue de λ .

Conclusion : Soit $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i$ une condition limite donnée (par abus de langage nous dirons : soit $\lambda...$), nous venons de voir comment calculer une approximation d'un minimum de J dans la direction de descente issue de λ .

La méthode du gradient nous permet donc d'approximer « le minimum » $\lambda^* \in \mathbb{R}^N$ de J dans Uad — le calcul de J et ∇J étant obtenu par le code Centaure.

Pour éviter d'itérer sur le calcul de J (en pratique très coûteux), nous avons fait de nombreux calculs analytiques. Ainsi nous avons pu calculer $J(\lambda)$ et $\nabla J(\lambda)$ de façon rapide en utilisant les résultats de calculs effectués avant la

méthode itérative (*prétraitement*), calculs n'utilisant le code Centaure qu'un petit nombre de fois. Cette méthode a pu être mise en œuvre grâce à la remarque suivante :

Remarque : Soit v un contrôle donné, l'application qui à v associe $y(v)$ est linéaire, il en est donc de même pour les applications qui à v associent $\hat{w}(v), \psi(v) (\cdot)$. On définit $J_1(v)$ par $J_1(v)(\eta) = 2 S_C \mathcal{E}^{-1} \int_0^1 \psi(v) \xi d\xi$ alors $v \mapsto J_1(v)$ est linéaire et $(v_1, v_2) \mapsto \tilde{J}_2(v_1, v_2)$ est bilinéaire, où :

$$\tilde{J}_2(v_1, v_2)(\eta) = 2 S_C^2 \mathcal{E}^{-1} \int_0^1 \psi(v_1) \psi(v_2) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Soient $(v_i)_{i=1}^N$, les N fonctions de base de \tilde{Y}_h définies précédemment et soit $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i$ alors

$$J_1(v) = \sum_{i=1}^N \lambda_i J_1(v_i) \quad \text{et} \quad J_2(v) = \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j \tilde{J}_2(v_i, v_j).$$

Pour $i = 1, N$ on calcule par le code Centaure le champ de vitesse associé à v_i . On pourra ainsi aisément calculer les valeurs des fonctions $J_1(v_i)$ et $J_2(v_i, v_j)$, d'où un calcul aisé de $J(\lambda)$. Nous allons voir dans les deux paragraphes suivants comment calculer rapidement $J(\lambda)$ et $\nabla J(\lambda)$; nous utiliserons la notion $f(v)$, la fonction f associée à un contrôle v , v donné, et $f(v, \lambda)$ la valeur de celle-ci au point λ .

3.3. Calcul de la fonction coût et du gradient

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^N$, $W = \nabla J(\lambda)$, la méthode dichotomique avec fit parabolique nécessite le calcul de $J(\rho) = \Delta U(\lambda - \rho W)$ pour de nombreuses valeurs de ρ . Sans vouloir reproduire ici tous les calculs analytiques effectués, nous allons en détailler un pour montrer comment nous avons décomposé les différents éléments qui permettent le calcul de $J(\rho)$ en mettant en évidence la dépendance en ρ , les termes ne dépendant que de (λ) et de $\nabla J(\lambda)$ (qui seront calculés avant la méthode dichotomique) et les termes indépendant de ρ et de λ (qui seront calculés en prétraitement avant l'optimisation) :

$$J_1(\lambda - \rho W) = \sum_{i=1}^N (\lambda_i - \rho W_i) J_1(v_i) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i J_1(v_i) \right) - \rho \left(\sum_{i=1}^N W_i J_1(v_i) \right) \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 J_2(\lambda - \rho W) &= \sum_{i,j=1}^N (\lambda_i - \rho W_i) (\lambda_j - \rho W_j) \tilde{J}_2(v_i, v_j) \\
 &= \left[\sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j \tilde{J}_2(v_i, v_j) \right] + \rho \left[-2 \sum_{i,j=1}^N \lambda_i W_j \tilde{J}_2(v_i, v_j) \right] + \\
 &\quad + \rho^2 \left[\sum_{i,j=1}^N W_i W_j \tilde{J}_2(v_i, v_j) \right]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Exemple : Calcul de

$$\int_0^{\eta_F} \frac{\exp(-G(\lambda - \rho W, \eta))}{1 + J_2(\lambda - \rho W, \eta)} d\eta.$$

Comme on intègre numériquement, on doit donc connaître $J_2(\lambda - \rho W, x_k)$ dont on vient de voir la décomposition et $G(\lambda - \rho W, x_k)$;

$$G(\lambda - \rho W, x_k) = \int_0^{x_k} \frac{-\varphi_N + 2 \mathcal{E}_0 J_1(\lambda - \rho W, \eta)}{1 + J_2(\lambda - \rho W, \eta)} d\eta,$$

dont le calcul est fait par intégration numérique, en utilisant la décomposition de $J_1(\lambda - \rho W)$ et $J_2(\lambda - \rho W)$, établie précédemment, pour mettre en évidence le paramètre ρ .

Ainsi on met en valeur les termes suivants qui apparaissent dans le calcul de la fonction coût :

$$J_1 \lambda(k) = 2 \mathcal{E}_0 \left[\sum_{i=1}^N \lambda_i J_1(v_i, x_k) \right], \quad (19)$$

$$J_2 \lambda \lambda(k) = 1 + \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j \tilde{J}_2(v_i, v_j, x_k), \quad (20)$$

$$J_1 W(k) = (-2 \mathcal{E}_0) \left(\sum_{i=1}^N W_i J_1(v_i, x_k) \right), \quad (21)$$

$$J_2 \lambda W(k) = (-2) \left(\sum_{i,j=1}^N \lambda_i W_j \tilde{J}_2(v_i, v_j, x_k) \right), \quad (22)$$

$$J_2 W W(k) = \left(\sum_{i,j=1}^N W_i W_j \tilde{J}_2(v_i, v_j, x_k) \right) \quad k = 1, K. \quad (23)$$

Le principe utilisé pour le calcul du gradient est identique; en plus des termes $J_1 \lambda$ et $J_2 \lambda \lambda$ apparaît le terme $J_2 \lambda(j)$ défini par :

$$J_2 \lambda(j)(k) = 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \tilde{J}_2(v_i, v_j, x_k) \quad (1 \leq k \leq K, 1 \leq j \leq N). \quad (24)$$

Ces calculs analytiques nous permettent d'obtenir l'algorithme suivant :

1) *Prétraitement* : Calcul par le code Centaure du champ de vitesses associées aux N fonctions de base :

- Calcul des « coupes » $J_1(i)(x_k)$ et $J_2(i, j)(x_k)$, i et $j = 1, N$, $k = 1, K$;
- Calcul de $\nabla J(\lambda_0)$ où λ_0 est le point initial.

2) *Méthode du gradient* : Tant que norme de $\nabla J(\lambda) > \epsilon$ (tolérance donnée) faire :

- Calcul indépendant de ρ mais dépendant de λ et W : calcul de $J_1 W(k)$, $J_2 \lambda W(k)$ et $J_2 WW(k)$, $1 \leq k \leq K$.
- Méthode dichotomique avec fit parabolique : obtention d'un nouveau λ .
- Calcul de $J_1 \lambda(k)$, $J_2 \lambda \lambda(k)$, $J_2 \lambda(j)(k)$, $j = 1, N$, $k = 1, K$.
- Calcul de $W = \nabla J(\lambda)$.

Remarque : Nous ne projetons pas le gradient sur Uad car les constantes δ_0 et δ'_0 sont difficiles à déterminer pratiquement, elles dépendent en effet des limites du modèle. On va donc calculer par une méthode du gradient simple un minimum local de J , et vérifier, ensuite, que le contrôle associé est dans Uad (en particulier si il est réalisable technologiquement).

4. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

Dans cette section nous énoncerons brièvement les résultats obtenus et nous les confronterons avec la méthode numérique qui a permis de les obtenir après avoir justifié l'emploi de la méthode du gradient nous commenterons les résultats dans le but d'améliorer cette méthode ; nous comparerons plusieurs méthodes et nous montrerons comment la très grande différence de sensibilité entre les divers paramètres nous a amené à développer une autre méthode dans la section 5.

4.1. Résultats physiques

Nous ne développerons pas ici les résultats physiques obtenus. Le lecteur intéressé pourra consulter la référence [9]. Signalons simplement que le code obtenu a été utilisé pour trouver le profil de température donnant le pouvoir de séparation optimal d'une dizaine de centrifugeuses différentes (géométries ou paramètres physiques différents). La figure 1 représente un des profils obtenus. Les profils 1, 2 et 3 fournissent les valeurs numériques du profil optimal d'une centrifugeuse (table 1), ainsi que son rendement obtenu en

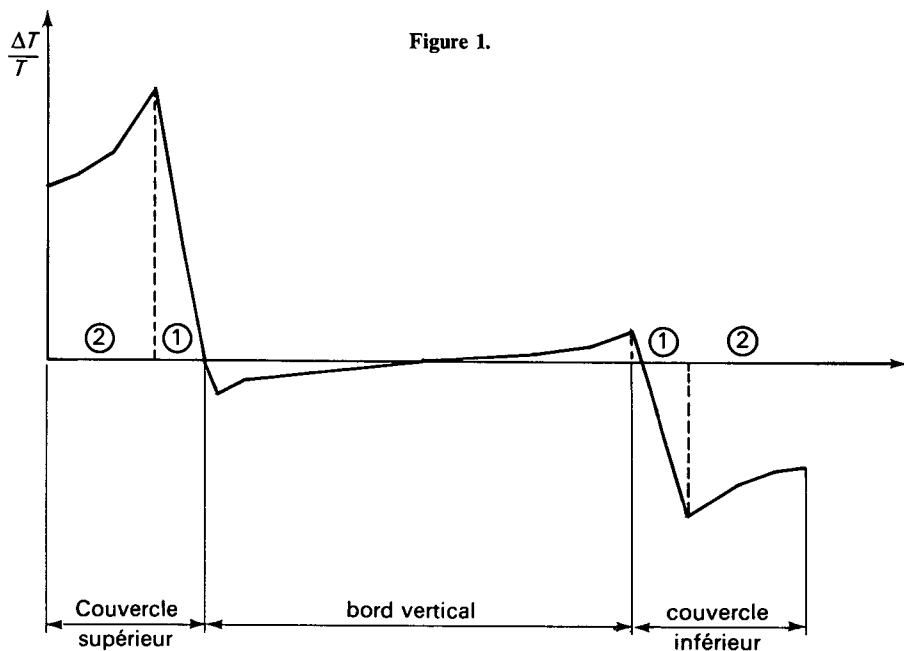
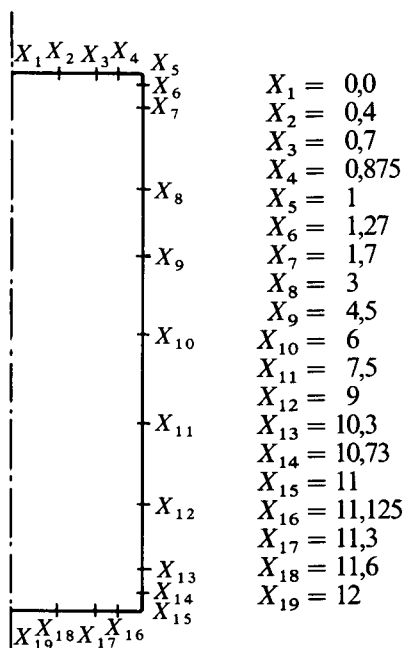


Figure 1.

TABLE I
Partition de la frontière



0,605	3,862	15,60	12,64	-2,88	0,672	-0,08	-0,118	-0,106	-0,109	-0,129	-0,127	-0,172	-0,543	0,981	-3,636	-20,73	-5,457	-0,807
-0,4 E-7	-0,3 E-6	-0,7 E-6	0,1 E-5	-0,2 E-6	-0,1 E-6	-0,2 E-7	0,3 E-6	0,2 E-6	0,9 E-6	0,5 E-6	-0,7 E-6	-0,1 E-5	-0,1 E-5	0,4 E-6	0,8 E-6	0,4 E-6	0,5 E-7	

Profil 1 $\frac{\Delta T}{T}$ et $|\nabla J|$ rendement 41,3 UTS/A

1,32	5,0	5,0	5,0	1,58	-1,36	-0,92	-0,86	-0,73	-0,98	-0,96	-0,97	-0,98	-1,	-0,78	-5,	-5,	-5,	-5,
------	-----	-----	-----	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----	-------	-----	-----	-----	-----

Profil 2 $\frac{\Delta T}{T}$ rendement 35,2 UTS/A

1,35	9,52	27,0	7,93	-1,11	-0,4	-0,84	-0,3	-0,12	0,
------	------	------	------	-------	------	-------	------	-------	----

Profil 3 $\frac{\Delta T}{T}$ rendement 40,8 UTS/A

fin de convergence :

- profil 1 obtenu sans contrainte ;
- profil 2 obtenu en imposant $\left| \frac{\Delta T}{T} \right| \leq 5\%$;
- profil 3 obtenu en imposant son antisymétrie.

On constate que le profil n'est pas antisymétrique, qu'il est quasiment plat sur le bord vertical et qu'il possède un pic à la limite de la couche d'Ekman sur chacun des couvercles ; dans certains cas, la valeur absolue de ces pics est supérieure à 5 %, et même à 10 %, limite de validité de la linéarisation des équations de l'hydrodynamique. Le rendement associé au profil 1 est de 50 %.

Nous avons utilisé la méthode du gradient car nous n'avions aucune idée de la forme du profil optimal ; nous voulions donc une méthode numérique robuste. A la suite du premier résultat, nous avons utilisé une variante de la méthode précédente en l'améliorant notamment sur les deux points suivants :

1) Soit $-W$ une direction de descente ; on cherche $\rho^* > 0$ qui minimise $J(\lambda - \rho W)$ dans \mathbb{R}^+ ; la méthode dichotomique, que l'on a décrite précédemment, débute par la donnée d'une valeur ρ_0 initiale. Cette valeur est importante : si $\rho^* < \rho_1$, et si on choisit $\rho_0 = 2^N \rho_1$ au lieu de ρ_1 on effectuera N itérations supplémentaires, c'est-à-dire N calculs de $J(\lambda - \rho W)$, pour N valeurs de ρ . Cette initialisation est d'autant plus importante que la méthode dichotomique n'utilise que le calcul de J (et non de $\nabla J \dots$), et sa vitesse de convergence est indépendante de la pente de $\rho \mapsto J(\lambda - \rho W)$; cette donnée sera utilisée dans le choix de ρ_0 .

2) La direction $(-W)$ de descente est actuellement égale à $(-\nabla J(\lambda))$. Nous verrons ci-dessous qu'un gain important d'itération peut être obtenu par une conjugaison adéquate.

4.2. Choix de ρ initial

Nous supposons que l'application $\rho \mapsto J(\lambda - \rho W / \|W\|)$ est parabolique, c'est-à-dire qu'il existe des coefficients a , b et c , dépendants de λ et W mais indépendants de ρ tels que

$$J(\lambda - \rho W / \|W\|) = a\rho^2 + b\rho + c. \quad (25)$$

Nous choisirons alors pour ρ_0 le minimum de cette parabole. De l'égalité (25) nous déduisons $c = J(\lambda)$ et $b = -\|W\|$.

Pour déterminer le coefficient a , nous supposons :

$$J(\lambda) - \Delta J \leq J\left(\lambda - \rho^* \frac{W}{\|W\|}\right) \leq J(\lambda), \tag{26}$$

c'est-à-dire avec les égalités (25) et $\left(\frac{\partial J}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho^*} = 0$ on obtient les inégalités

$$a \geq \frac{\|W\|^2}{4 \Delta J} \geq 0. \tag{27}$$

En choisissant la valeur minimale $a = \frac{\|W\|^2}{4 \Delta J}$ on obtient

$$\rho_0 = \frac{2 \Delta J}{\|W\|}. \tag{28}$$

Le problème revient donc à estimer $\Delta J = J(\lambda) - J(\lambda - \rho^* W)$. Après avoir effectué les calculs avec $\rho_0 = \text{Cte}$, on constate que l'initialisation $2(J^n - J^{n+1})/\|W^n\|$ est excellente (cf. tableau 4), cependant la valeur

$$J^{n+1} = J(\lambda^n - \rho_n^* W^n / \|W^n\|)$$

est inconnue car on cherche la valeur ρ_n^* . Ce constat ne peut donc être fait qu'a posteriori.

Le choix $\Delta J^n = J^{n-1} - J^n$ (au lieu de $J^n - J^{n+1}$) n'est pas satisfaisant car on constate une très forte variation de ΔJ selon la direction de descente.

Une approximation parabolique de J nous incite à poser

$$\Delta J^n = \Delta J^{n-1} \times \|W^n\| / \|W^{n-1}\|$$

et donc nous prendrons finalement

$$\rho_0 = 2 \Delta J^{n-1} / (\|W^{n-1}\| \|W^n\|) \tag{29}$$

comme valeur initiale pour la minimisation dichotomique de $J(\lambda^n - \rho W^n)$ (cf. tableau 4).

TABLEAU 4

n	$\rho_{0,n} = \frac{2 \Delta J^{n-1}}{\ W^{n+1}\ \ W^n\ }$	ρ_n^* obtenu	$2 \frac{J^n - J^{n+1}}{\ W^n\ }$ (a posteriori)	$\frac{\Delta J^{n-1}}{\ W^n\ }$
3	9,15	4,01	1,96	$2 \cdot 10^{-3}$
50	8,60	6,19	6,64	3,01
100	2,54	1,11	2,28	$5,0 \cdot 10^{-3}$
200	7,50	2,81	3,93	$9,0 \cdot 10^{-2}$

Numériquement nous avons constaté que ce choix permet de diviser par 3 le nombre de calculs pour obtenir ρ_n^* , par rapport à l'initialisation $\rho_0 = \Delta J^{n-1} / \|W^n\|$ (cf. tableau 4).

Quelques remarques :

1) Le choix $W^n = \nabla J(\lambda^n) + \theta_n W^{n-1}$ a donné de meilleurs résultats que celui de $W^n = \nabla J(\lambda^n) + \theta_n \nabla J(\lambda^{n-1})$.

2) Nous avons comparé le choix du coefficient de conjugaison avec les résultats obtenus par les méthodes de Polak et Flechter (cf. [10]); ce dernier choix était sensiblement moins bon pour traiter notre problème et présentait la même lenteur en fin de convergence.

4.3. Fin de convergence

Voici deux explications, tirées de l'étude approfondie des résultats obtenus à chaque itération, permettant d'expliquer la lenteur observée en fin de convergence.

La stabilité des différentes valeurs composant le profil de température est très variable. Une faible modification des températures situées au-dessus de la couche d'Ekman (zone 1 sur la figure 1) engendre une forte modification de la valeur ΔU , alors que le doublement des valeurs thermiques situées entre le pic et l'axe (zone 2 sur la figure 1) ne modifie quasiment pas la valeur de ΔU .

L'étude des différentes valeurs du gradient montre qu'il existe entre ses coordonnées un rapport de 100 (cf. tableaux 1, 2, 3). L'interpolation des iso-valeurs par une ellipse (de \mathbb{R}^N) permet de tenir compte de cette différence en conjuguant la direction de descente.

Cependant soit $\lambda_i^{n+1} = \lambda^n - \rho_i^* \nabla J(\lambda^n)$ la valeur théorique de l'optimal dans la direction $-\nabla J(\lambda^n)$ issue de λ^n , soit $\delta\rho$ l'erreur sur ρ due au calcul numérique et à l'approximation parabolique, l'erreur sur λ^{n+1} vérifiera :

$$\delta\lambda_1^{n+1} = \eta \delta\lambda_2^{n+1} \quad \text{si} \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda_1}(\lambda^n) = \eta \frac{\partial J}{\partial \lambda_2}(\lambda^n);$$

c'est donc la variable la plus sensible qui subit l'erreur la plus importante dans l'approximation de ρ^* optimal. Cette erreur ralentit la convergence et ce phénomène prédomine en fin de convergence : en effet, en début de convergence, les calculs des coordonnées du gradient sont très précis, et même un rapport important entre elles est compensé en conjuguant la direction de descente. Cependant, en fin de convergence la valeur de certaines coordonnées est faussée par les erreurs numériques et n'a plus de signification. Pour autant que l'on approche du « zéro numérique » (valeur de l'erreur de calcul) de la

TABLEAU 5

n	Rendement	$\ W \ \times 10^{+3}$
1	6,5	0.23
5	29,8	0,17
10	33,2	0,12
20	38,2	0,065
30	38,8	0,062
40	39,7	0,009
100	40,18	0,006
200	40,9	0,004
450	41,2	0,003

norme du gradient, le minimum de J n'est pas atteint : sur le tableau 5 le ralentissement de la convergence indique que 10^{-5} est l'erreur sur le calcul du gradient. Dans notre problème la fonction coût dépend de la fonction logarithme ; son calcul est précis. Cependant le calcul de la dérivée nécessite celui de nombreux quotients entraînant des erreurs numériques importantes.

Bien que l'on approche du zéro numérique du gradient, on ne peut arrêter la convergence car l'optimum n'a pas été atteint. Il faut donc terminer la convergence en utilisant une méthode qui soit moins sensible aux erreurs de calculs sur la dérivée. Une telle méthode est proposée dans la section suivante.

5. OPTIMISATION DIRECTIONNELLE

5.1. Historique

Soit f une fonction que l'on désire minimiser dans \mathbb{R}^N ; on suppose que le calcul de f est fiable alors que celui de ∇f peut être approximatif (formulation analytique approchée ou erreur numérique).

En 1959, Hooke et Jeeves [11] proposent une *méthode directe* (n'utilisant que le calcul de f) ; partant d'un point x^i , ils cherchent successivement le minimum dans la direction $e_1 = (1, 0, 0)$ obtiennent $x^{i,1}$, puis $e_2 \dots$ puis e_n et $x^{i,n}$ qui sera, par définition $x^{i+1} \dots$, Rosenbrock [12] développe cette méthode, en modifiant le repère orthonormé de base $(\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$ à chaque itération i pour obtenir un repère orthonormé vérifiant :

$$\xi_1^i = \frac{(x^i - x^{i-1})}{\| x^i - x^{i-1} \|} ;$$

une modification est apportée par Palmer [13] afin de résoudre des indéter-

minimations de la méthode d'orthogonalisation. Les minimisations unidirectionnelles sont faites par dichotomie avec fit parabolique et pas non variable. L'idée directrice de ces algorithmes est de chercher à suivre « une vallée d'isovaleurs » pour atteindre le minimum. Ceci est particulièrement intéressant lorsque les variables ont une grande différence de sensibilité.

Cependant, les directions de descente sont celles du repère de base (e_1, \dots, e_n) ou d'un repère dérivé (méthode de Rosenbrock). Nous proposons ici un algorithme utilisant fortement la fonctionnelle et faiblement sa dérivée (faible précision nécessaire). Contrairement aux méthodes présentées ci-dessus, nous cherchons une direction de descente, et plus précisément, soit $x^i \in \mathbb{R}^N$ et $\rho^i \in \mathbb{R}^+$, on cherche W^i unitaire tel que $x^{i+1} = x^i + \rho^i W^i$ minimise f .

5.2. Algorithme

On propose l'algorithme de descente suivant :

Initialisation : Soient $\lambda^0 \in \mathbb{R}^N$ donné et λ^1 obtenu par une itération de la méthode du gradient ; on pose $n=0$, $W^0 = -\nabla f(\lambda^1) / \|\nabla f(\lambda^1)\|$ et $\rho^0 = \|\lambda^0 - \lambda^1\|$.

Remarque : λ^0 peut être choisi comme étant le point de \mathbb{R}^N obtenu lors de la dernière itération, considérée comme valable, de l'algorithme du gradient utilisé au chapitre précédent.

Itération : λ^{n+1} , ρ^n et W^n étant connus, définissons ρ^{n+1} , W^{n+1} et λ^{n+2} comme suit :

1) Définition de ρ^{n+1} :

- $\rho^{n+1} = \frac{1}{2} \rho^n$ si $(W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) > 0$

- $\rho^{n+1} = \rho^n$ si $(W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) \leq 0$;

2) Définition de W^{n+1} : $W^{n+1} \in \mathbb{R}^N$ minimise $f(\lambda^{n+1} + \rho^{n+1} W)$ avec les contraintes $(W, -\nabla f(\lambda^{n+1})) \geq 0$ et $\|W\| = 1$;

3) Définition de λ^{n+2} :

$$\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \rho^{n+1} W^{n+1};$$

4) Si $\|\nabla f(\lambda^{n+2})\| \neq 0$ on réitère en retournant en 1), sinon on pose

$$\lambda^{n+p} = \lambda^{n+2} = \lambda^*, \quad \forall p \geq 2.$$

Remarque : Évidemment ce dernier test est remplacé, lors d'un calcul numérique, par le test : si $\|\nabla f(\lambda^{n+2})\| > \mathcal{E}$, $\mathcal{E} > 0$ donné, on réitère.

THÉORÈME : Soit f une fonction C^1 de \mathbb{R}^N , strictement convexe, coercive ($\lim f(\lambda) = +\infty$, $\|\lambda\| \rightarrow +\infty$), alors la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessus converge vers le minimum λ^* de f .

Nous utiliserons dans la démonstration les 2 lemmes suivants :

LEMME 1 : Si $(\nabla f(\lambda^n), W^n) = 0$ alors $f(\lambda^{n+1}) \geq f(\lambda^n)$ et donc nous avons, ou bien $(W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) > 0$, ou bien $\lambda^{n+1} = \lambda^*$ le minimum de f .

Démonstration : f étant convexe, nous avons les inégalités :

$$f(\lambda^{n+1}) - f(\lambda^n) \geq (f(\lambda^n), \lambda^{n+1} - \lambda^n) = \rho^n (\nabla f(\lambda^n), W^n) = 0 \quad (31)$$

$$f(\lambda^n) - f(\lambda^{n+1}) \geq (f(\lambda^{n+1}), \lambda^n - \lambda^{n+1}) = \rho^n (-\nabla f(\lambda^{n+1}), W^n). \quad (32)$$

Des inégalités (31) et (32), on déduit :

$$0 \geq \rho^n (-\nabla f(\lambda^{n+1}), W^n) \text{ d'où } (\nabla f(\lambda^{n+1}), W^n) \geq 0.$$

Dans le cas où $(\nabla f(\lambda^{n+1}), W^n) = 0$ des inégalités (31) et (32), on déduit $f(\lambda^n) = f(\lambda^{n+1})$, puis

$$f(\lambda^n) = f(\lambda^{n+1}) = f(\lambda) \quad \forall \lambda, \lambda = \theta \lambda^n + (1 - \theta) \lambda^{n+1}, \theta \in [0, 1]$$

(ceci en remplaçant λ^{n+1} et λ^n par λ respectivement dans les 2 inégalités), ce qui est une contradiction avec la stricte convexité si $\lambda^{n+1} \neq \lambda^n$; dans le cas où $\lambda^{n+1} = \lambda^n$, alors $\lambda^n = \lambda^*$, le minimum de f par définition de l'algorithme.

LEMME 2 : Une des trois possibilités suivantes a lieu :

- 1) $\lambda^n \rightarrow \lambda^*$ ($n \rightarrow +\infty$).
- 2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda^{n_0} = \lambda^*$.
- 3) \exists une sous-suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(W^{n_k}, \nabla f(\lambda^{n_k+1})) > 0$.

Démonstration : Supposons le contraire : il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad (W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) \leq 0.$$

Si $(W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) = 0$ d'après le lemme 1 et l'hypothèse faite $(W^n, \nabla f(\lambda^n)) \neq 0$ et donc par définition de $W^n : \nabla f(\lambda^{n+1}) = \alpha_n W^n$, $\alpha_n \leq 0$ et comme $\lambda^{n+1} \neq \lambda^*$ on a nécessairement $\alpha_n < 0$. Donc finalement, on a :

$$\forall n \geq n_0 \quad (W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) < 0 \quad (33)$$

$$\exists \alpha_n < 0, \quad \nabla f(\lambda^{n+1}) = \alpha_n W^n. \quad (34)$$

Ceci entraîne que $\rho^n = \rho^{n_0} = \rho > 0 \quad \forall n \geq n_0$.

On a de plus :

$$f(\lambda^n) - f(\lambda^{n+1}) \geq (\nabla f(\lambda^{n+1}), \lambda^n - \lambda^{n+1}) = \rho |\alpha_n| > 0. \quad (35)$$

Donc $f(\lambda^n)$ est une suite décroissante et f étant minorée on déduit que λ^n est bornée, que $\alpha_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) et donc que $\lambda^n \rightarrow \lambda^*$ ($n \rightarrow +\infty$). Ceci prouve le lemme.

Démonstration du théorème : D'après le lemme 2, il nous suffit de considérer le cas où $A = \{n \in \mathbb{N}, (W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) > 0\}$ est infini et nous ordonnons A en une sous-suite n_k ; ainsi si $n \neq n_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) on a $(W^n, \nabla f(\lambda^{n+1})) \leq 0$.

De par la définition, on a $\rho^{n_k+1} = \frac{1}{2} \rho^{n_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ et donc $\rho^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$); de plus si $\lambda^n \neq \lambda^*$ on a évidemment comme f est convexe :

$$(-\nabla f(\lambda^n), \lambda^* - \lambda^n) \geq f(\lambda^n) - f(\lambda^*) > 0. \quad (36)$$

Montrons maintenant que λ^* vérifie pour tout $k \in \mathbb{N}$ $|\lambda^* - \lambda^{n_k}| \leq \rho^{n_k}$ (37). Deux cas se présentent :

1^{er} cas : $(\nabla f(\lambda^{n_k}), W^{n_k}) \neq 0$, dans ce cas, on a $\nabla f(\lambda^{n_k+1}) = \alpha_k W^{n_k}$, $\alpha_k > 0$.
Calculons alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} |\theta \lambda^{n_k+1} + (1-\theta) \lambda^* - \lambda^{n_k}|^2 (1) &= 2(\lambda^{n_k+1} - \lambda^{n_k}, \lambda^{n_k+1} - \lambda^*) \\ &= 2 \frac{\rho^{n_k}}{\alpha_k} (\nabla f(\lambda^{n_k+1}), \lambda^{n_k+1} - \lambda^*) > 0 \end{aligned}$$

et donc : $\exists \theta \in [0, 1]$ tq $|\theta \lambda^{n_k+1} + (1-\theta) \lambda^* - \lambda^{n_k}| = \rho^{n_k}$.

On note $\bar{\lambda}$ un tel point : d'après (36) et la définition de λ^{n_k+1} on a :

$$(-\nabla f(\lambda^{n_k}), \bar{\lambda} - \lambda^{n_k}) > 0 \quad \text{et donc} \quad f(\bar{\lambda}) \geq f(\lambda^{n_k+1}).$$

Ceci contredit la convexité de f puisque $f(\lambda^*) \leq f(\lambda^{n_k+1})$.

2^e cas : $(\nabla f(\lambda^{n_k}), W^{n_k}) = 0$.

Dans ce cas, on a :

$$f(\lambda^{n_k+1}) = \alpha W^{n_k} + \beta (-\nabla f(\lambda^{n_k})) \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad \beta \geq 0;$$

de nouveau, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} |\theta \lambda^{n_k+1} - (1-\theta) \lambda^* - \lambda^{p_k}|^2 (1) &= 2(\lambda^{n_k+1} - \lambda^{n_k}, \lambda^{n_k+1} - \lambda^*) = \\ &= \frac{2 \rho^{n_k}}{\alpha} (\nabla f(\lambda^{n_k+1}) + \beta \nabla f(\lambda^{n_k}), \lambda^{n_k+1} - \lambda^*) > \\ &> \frac{2 \rho^{n_k}}{\alpha} \beta (\nabla f(\lambda^{n_k}), \lambda^{n_k+1} - \lambda^{n_k} + \lambda^{n_k} - \lambda^*) \\ &= \frac{2 \rho^{n_k}}{\alpha} \beta (\nabla f(\lambda^{n_k}), \lambda^{n_k} - \lambda^*) > 0, \end{aligned}$$

et on conclut, comme précédemment.

On a donc prouvé (37), c'est-à-dire $\lambda^{n_k} \rightarrow \lambda^*$ ($k \rightarrow +\infty$).

Comme $\rho^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), ceci entraîne également $\lambda^{n_k+1} \rightarrow \lambda^*$ ($k \rightarrow +\infty$). Pour conclure, il suffit de remarquer que si $n_k < n < n_{k+1}$, alors $f(\lambda^*) \leq f(\lambda^n) \leq f(\lambda^{n_k+1})$; en effet, si $n_k < n < n_{k+1}$, on a par définition de (n_k) : $(\nabla f(\lambda^{n+1}), W^n) \leq 0$ et donc $f(\lambda^n) - f(\lambda^{n+1}) \geq (\nabla f(\lambda^{n+1}), \lambda^n - \lambda^{n+1}) \geq 0$. Ceci montre donc que $f(\lambda^n) \rightarrow f(\lambda^*)$ ($n \rightarrow +\infty$). Et du fait de la stricte convexité, ceci entraîne que λ^n converge vers λ^* .

CONCLUSION

Les études numériques réalisées pour obtenir le profil de température imposé aux bords d'une centrifugeuse ont mis en valeur la possibilité d'une amélioration importante du rendement. Ces études ont également permis une recherche dans le domaine numérique. La méthode proposée n'a pas été testée numériquement, la recherche d'un minimum sur une demi-sphère restant à étudier. Cette méthode devrait cependant être assez performante pour les situations dans lesquelles le calcul du gradient est douteux.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le Professeur Lions de l'Université Paris IX et le Docteur Soubaramayer du Commissariat à l'Énergie Atomique/Saclay pour leurs aides et leurs encouragements qui m'ont permis de réaliser ce travail. Je voudrais également remercier J. M. Darves-Bornoz pour le soutien qu'il m'a apporté lors de la réalisation informatique du projet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SOUBBARAMAYER, *Centrifugation*, in S Villani (Ed.) Uranium enrichment, Topics in applied physics Springer, Heidelberg 183-244 (1979)
- [2] J L LIONS, *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris (1968)
- [3] D L RUSSEL, *Controllability and stabilizability theory for linear PDE Recent progress and open questions*, SIAM J on Control, 20-639-739 (1978)
- [4] W H RAY and D G LAINIDIS, *Distributed parameter systems*, M Dekker Inc (1978)
- [5] POLAK, *Computational methods in optimization A unified approach*, Academic Press, New York (1971)
- [6] J CEA, *Optimisation théorie et algorithmes*, Dunod, Paris (1971)
- [7] SOUBBARAMAYER and BILLET, *Comp Meth Appl Mech Eng*, 24, 165-185 (1980)
- [8] J P LAHARGUE and SOUBBARAMAYER, *A numerical model for the investigation of the flow and isotope concentration field in an ultracentrifuge*, *Comp Meth appl Mech eng* 15, 259-273 (1978)
- [9] J M DARVES-BORNOZ, P L LIONS, G MOTET, *An application of optimal control in ultracentrifugation*, 4th International Workshop on gases in strong rotation (Proceedings)
- [10] POLAKE, G RIBIERE, *Sur la convergence de la méthode des gradients conjugués*, *Revue Française d'Informatique et de Recherche operationnelle* 16, R1 (1969)
- [11] R HOOKE, T A JEEVES, *Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems*, Westinghouse Res Lab Scientific Paper NO 10-1210-1-P1 (1959) également dans *Assoc for Computing Machinery*, 8, 212 (1961)
- [12] H H ROSENBROCK, *An Automatic Method for finding the greatest or Least Value of a Function*, *Computer Journal*, Vol 4, pp 175-18 (1960)
- [13] J R PALMER, *An improved procedure for orthogonalising the search vectors in Rosenbrock's and Swann' direct search optimisation methods*, *Computer Journal*, Vol 12, pp 69-71 (1969)