

C. BERNARDI

G. RAUGEL

**Approximation numérique de certaines équations
paraboliques non linéaires**

RAIRO. Analyse numérique, tome 18, n° 3 (1984), p. 237-285

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1984__18_3_237_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION NUMÉRIQUE DE CERTAINES ÉQUATIONS PARABOLIQUES NON LINÉAIRES (*)

par C. BERNARDI ⁽¹⁾ et G. RAUGEL ⁽²⁾

Communiqué par M. CROUZEIX

Résumé. — Nous prouvons, pour une catégorie générale de problèmes paraboliques linéaires, la convergence d'une famille de solutions approchées vers la solution exacte sans aucune régularité des données. Ce résultat nous permet d'établir un théorème abstrait d'approximation de problèmes paraboliques non linéaires, dont nous donnons quelques exemples d'application. Dans tous les cas, des estimations d'erreur optimales sont obtenues.

Abstract. — For a fairly general linear parabolic problem, we prove the convergence of a family of approximate solutions to the exact solution without any regularity of the data. This result allows us to state an abstract theorem about the approximation of nonlinear parabolic problems; we give some examples of application. In every case, optimal error estimates are derived.

I. INTRODUCTION

Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que V soit inclus dans H avec injection continue et dense. Dans toute la suite, on identifiera l'espace H avec son dual H' et on notera (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur H aussi bien que le produit de dualité entre V et V' .

(*) Reçu en novembre 1982.

⁽¹⁾ Analyse Numérique, Tour 55-65, Université Pierre et Marie Curie, 4, place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05.

⁽²⁾ UER de Mathématiques, Université de Rennes, Rennes Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex.

Notre but est de résoudre numériquement des équations d'évolution non linéaires de la forme

$$\frac{du}{dt} + Au + g(\lambda, u) = 0, \quad (I.1)$$

où

1° A est un opérateur linéaire continu symétrique de V dans V' , que nous supposons de plus coercif, i.e.

$$\forall v \in V, \quad (Av, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad \alpha > 0. \quad (I.2)$$

On notera a la forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$ définie par

$$\forall u \in V, \quad \forall v \in V, \quad a(u, v) = (Au, v). \quad (I.3)$$

2° g est une application continue de $\mathbb{R} \times V$ dans V' , astreinte à certaines conditions de régularité que nous préciserons par la suite.

Soit T un nombre réel > 0 donné. Nous voulons résoudre l'équation (I.1) munie de l'une des conditions suivantes :

1° condition de périodicité

$$u(0) = u(T) \quad (I.4)$$

2° condition initiale nulle

$$u(0) = 0; \quad (I.5)$$

3° condition initiale quelconque

$$u(0) = u_0 \quad (I.6)$$

$$\text{(resp. (I.7) } u(0) = u_0(\lambda)), \quad (I.7)$$

où u_0 est un élément de H (resp. u_0 est une fonction continue de \mathbb{R} dans H , dont la régularité est à préciser).

Dans le paragraphe II, nous ferons sur l'approximation numérique du problème parabolique linéaire

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad (I.8)$$

muni d'une des conditions (I.4), (I.5) ou (I.6), une hypothèse dont nous vérifierons sur de nombreux exemples qu'elle est satisfaite. Dans le paragraphe III, utilisant le théorème des fonctions implicites discret de [5], [6] ainsi que les résultats du paragraphe II, nous définirons et étudierons, sous certaines hypothèses concernant les fonctions g et u_0 , une approximation numérique de l'équation (I.1) munie d'une des conditions (I.4), (I.5) ou (I.7); nous donnerons des exemples de fonctions g satisfaisant ces hypothèses.

II. LE PROBLÈME PARABOLIQUE LINÉAIRE

II.1. Rappels de résultats sur le problème continu et hypothèse d'approximation

On définit l'espace $H_{\#}^{1/2}(0, T; H)$ comme l'adhérence dans $H^{1/2}(0, T; H)$ de l'ensemble des restrictions à $(0, T)$ des fonctions de $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}; H)$ périodiques de période T ; on désigne par $H_{\#}^{-1/2}(0, T; H)$ son dual. De même, on définit l'espace $H_0^{1/2}(0, T; H)$ (resp. $H_T^{1/2}(0, T; H)$) comme l'adhérence dans $H^{1/2}(0, T; H)$ de l'ensemble des restrictions à $(0, T)$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}; H)$ nulles sur $(-\infty, 0)$ (resp. $(T, +\infty)$); on désigne par $H_0^{-1/2}(0, T; H)$ (resp. $H_T^{-1/2}(0, T; H)$) son dual.

On notera désormais

1° $\mathcal{X}_{\#}$ l'espace $L^2(0, T; V) \cap H_{\#}^{1/2}(0, T; H)$;

2° \mathcal{X}_0 (resp. \mathcal{X}_T) l'espace

$$L^2(0, T; V) \cap H_0^{1/2}(0, T; H) \quad (\text{resp. } L^2(0, T; V) \cap H_T^{1/2}(0, T; H));$$

3° \mathcal{X}_I l'espace $L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V)$.

Les résultats suivants sont dans [14, chap. 3].

PROPOSITION II.1 : L'opérateur $\mathcal{A}_{\#} : u \rightarrow f$, où u est la solution de (I.8), (I.4) est un isomorphisme de $\mathcal{X}_{\#}$ sur $\mathcal{Y}_{\#} = \mathcal{X}_{\#}'$. L'opérateur $\mathcal{A}_0 : u \rightarrow f$, où u est la solution de (I.8), (I.5) est un isomorphisme de \mathcal{X}_0 sur $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{X}_T'$. L'opérateur $\mathcal{A}_I : u \rightarrow (f, u_0)$, où u est la solution de (I.8), (I.6) est un isomorphisme de \mathcal{X}_I sur $\mathcal{Y}_I = L^2(0, T; V) \times H$.

Notation : Par la suite, on notera $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ l'un des trois opérateurs $\mathcal{A}_{\#} : \mathcal{X}_{\#} \rightarrow \mathcal{Y}_{\#}'$, $\mathcal{A}_0 : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ ou $\mathcal{A}_I : \mathcal{X}_I \rightarrow \mathcal{Y}_I$, et on désignera par $\mathcal{C} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ l'opérateur inverse de \mathcal{A} .

On utilisera également le résultat de régularité suivant (cf. [15]).

PROPOSITION II.2 : Les opérateurs $\mathcal{C}_{\#}$ et \mathcal{C}_0 sont linéaires continus de $L^2(0, T; H)$ dans $H^1(0, T; H)$. L'opérateur \mathcal{C}_I est linéaire continu de $L^2(0, T; H) \times V$ dans $H^1(0, T; H)$.

Dans toute la suite, on considère un paramètre d'approximation \bar{h} dans \mathbb{R}^d , $d = 1$ ou 2 , destiné à tendre vers 0. On suppose qu'il existe un sous-espace fermé $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ de \mathcal{X} et un opérateur $\mathcal{C}_{\bar{h}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}_{\bar{h}}$ approchant \mathcal{C} au sens suivant

$$(H_A) \quad \forall F \in \mathcal{Y}, \quad \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \|(\mathcal{C} - \mathcal{C}_{\bar{h}})F\|_{\mathcal{X}} = 0.$$

Nous allons vérifier sur de nombreux exemples que l'hypothèse d'approximation (H_A) , suffisante pour aborder les problèmes non linéaires, est facile à satisfaire.

Dans la plupart des cas, en supposant un peu plus de régularité sur la solution $u = \mathfrak{C}F$ du problème continu, nous obtiendrons des majorations d'erreur pour $\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)F\|_{\mathcal{X}}$. Une méthode classique de dualité, utilisant la proposition II.2, donnera une meilleure estimation pour $\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)F\|_{L^2(0,T;H)}$.

II.2. Semi-discrétisation en espace

Pour discrétiser en espace l'équation (I.8), nous allons utiliser une méthode de Galerkin.

Dans ce paragraphe, on choisit le paramètre $\bar{h} = h$ réel. On considère un sous-espace de dimension finie V_h de V et on pose : $\mathcal{X}_h = \mathcal{X} \cap L^2(0, T; V_h)$. L'opérateur \mathfrak{C}_h est défini de la façon suivante :

1° Soit f un élément de $\mathcal{Y}_\#$ (resp. \mathcal{Y}_0). La fonction $u_h = \mathfrak{C}_{\#h} f$ (resp. $\mathfrak{C}_{0h} f$) est l'unique solution dans $\mathcal{X}_{\#h}$ (resp. \mathcal{X}_{0h}) de

$$\forall v_h \in V_h, \quad \left(\frac{du_h}{dt}, v_h \right) + a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{p.p. dans } (0, T). \quad (\text{II.1})$$

2° Soit $F = (f, u_0)$ un élément de \mathcal{Y}_1 . La fonction $u_h = \mathfrak{C}_{1h} F$ est l'unique solution dans \mathcal{X}_{1h} de

$$\left. \begin{aligned} \forall v_h \in V_h, \quad \left(\frac{du_h}{dt}, v_h \right) + a(u_h, v_h) &= (f, v_h) \quad \text{p.p. dans } (0, T) \\ u_h(0) &= Q_h u_0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.2})$$

où Q_h désigne l'opérateur de projection sur V_h dans H , défini par

$$\forall v \in H, \quad \begin{cases} Q_h v \in V_h \\ \forall v_h \in V_h, \quad (v - Q_h v, v_h) = 0. \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Démontrons maintenant l'hypothèse (H_A) . On a les :

PROPOSITION II.3 : *Pour chacun des opérateurs $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\#$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$, il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout élément f de \mathcal{Y} ,*

$$\| \mathfrak{C}_h f \|_{\mathcal{X}} \leq C \| \mathfrak{C} f \|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{II.4})$$

Si $u = \mathfrak{C}f$, on a

$$\| (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) f \|_{\mathcal{X}} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{X}_h} \| u - v_h \|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{II.5})$$

La première démonstration de ce résultat pour $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$ est due à [10]. Le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\#$ a été étudié dans [2].

PROPOSITION II.4 : *On suppose qu'il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\forall v \in V, \quad \|Q_h v\|_V \leq C \|v\|_V. \quad (\text{II.6})$$

Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout élément F de \mathcal{A}_I ,

$$\|\mathfrak{C}_{Ih} F\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \|\mathfrak{C}_I F\|_{\mathcal{X}_I}. \quad (\text{II.7})$$

Si $u = \mathfrak{C}_I F$, on a

$$\|(\mathfrak{C}_I - \mathfrak{C}_{Ih}) F\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{X}_{Ih}} \|u - v_h\|_{\mathcal{X}_I}. \quad (\text{II.8})$$

Démonstration :

1° On commence par prouver que l'opérateur $\mathcal{P}_h = \mathfrak{C}_{Ih} \mathcal{A}_I : u \rightarrow u_h$ est borné de \mathcal{X}_I dans \mathcal{X}_I indépendamment de h . D'après (II.2),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_h\|_H^2 + \alpha \|u_h\|_V^2 \leq \|f\|_{V'} \|u_h\|_V.$$

On en déduit en intégrant sur $(0, T)$

$$\|u_h\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;V')} + \|Q_h u_0\|_H).$$

Comme $\|Q_h u_0\|_H \leq \|u_0\|_H$, $\|u_h\|_{L^2(0,T;V)} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}_I}$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du_h}{dt} \right\|_{V'} &= \sup_{v \in V} \frac{\left(\frac{du_h}{dt}, v \right)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{\left(\frac{du_h}{dt}, Q_h v \right)}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \in V} \frac{(f, Q_h v) - a(u_h, Q_h v)}{\|v\|_V}. \end{aligned}$$

D'après (II.6), on obtient

$$\left\| \frac{du_h}{dt} \right\|_{V'} \leq C(\|f\|_{V'} + \|u_h\|_V),$$

d'où :

$$\left\| \frac{du_h}{dt} \right\|_{L^2(0,T;V')} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;V')} + \|u_h\|_{L^2(0,T;V)}).$$

En regroupant les deux résultats, on a : $\|u_h\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}_I}$.

2° Pour tout élément v_h de \mathcal{X}_{Ih} ,

$$u - u_h = (I - \mathcal{R}_h)u - (I - \mathcal{R}_h)v_h.$$

En appliquant le résultat précédent,

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{X}_I} \leq \|I - \mathcal{R}_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_I, \mathcal{X}_I)} \|u - v_h\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \|u - v_h\|_{\mathcal{X}_I}.$$

Remarque II.1 : Dans la proposition II.3, on ne précise pas la dépendance en T de la constante C de (II.4). Par contre, on note que la constante C de (II.7) est indépendante de T . Réciproquement, on peut prouver que, si la majoration (II.7) est vérifiée avec une constante C indépendante de T , alors l'hypothèse (II.6) est satisfaite.

COROLLAIRE II.1 : *Sous l'hypothèse*

$$\forall v \in V, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_V = 0, \quad (\text{II.9})$$

la condition (H_A) est satisfaite à condition de supposer en outre (II.6) dans le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_I$.

Démonstration :

1° Le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\#$ a été étudié dans [2].

2° Dans les cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}_I$, soit F un élément de \mathcal{D} . Soit ε un nombre réel strictement positif fixé. Comme $\mathcal{D}([0, T]; V)$ et $\mathcal{D}([0, T]; V)$ sont denses respectivement dans \mathcal{X}_0 et \mathcal{X}_I , il existe une fonction u_ε de $\mathcal{D}([0, T]; V)$ dans le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{D}([0, T]; V)$ dans le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_I$ telle que, si $u = \mathcal{C}F$,

$$\|u - u_\varepsilon\|_{\mathcal{X}} \leq C\varepsilon.$$

En utilisant (II.5) et (II.8), on a pour toute fonction v_h de \mathcal{X}_h ,

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{X}} \leq \|u - u_\varepsilon\|_{\mathcal{X}} + \|u_\varepsilon - v_h\|_{\mathcal{X}}.$$

Or, sous l'hypothèse (II.9), on sait que, pour h assez petit, il existe une fonction v_h de $\mathcal{D}([0, T]; V_h)$, donc de \mathcal{X}_{0h} , dans le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$ et de $\mathcal{D}([0, T]; V_h)$, donc de \mathcal{X}_{Ih} , dans le cas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_I$ telle que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u_\varepsilon(t) - v_h(t)\|_V &\leq \varepsilon, \\ \sup_{t \in [0, T]} \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) - \frac{dv_h}{dt}(t) \right\|_V &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\|u_\varepsilon - v_h\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u_\varepsilon - v_h\|_{H^1(0,T;V)} \leq C\varepsilon.$$

En regroupant les majorations précédentes, on démontre le corollaire.

Nous allons maintenant préciser les résultats précédents et établir des majorations d'erreur dans un cadre particulier. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^D , $D = 1, 2$ ou 3 , que pour simplifier on supposera polyédrique. On choisit pour V l'espace $H_0^m(\Omega)$ muni de la semi-norme $|\cdot|_{m,\Omega}$, où m est un entier ≥ 1 , et pour H l'espace $L^2(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{0,\Omega}$. On pose : $Q = \Omega \times]0, T[$.

Pour chaque h , on considère une triangulation \mathcal{S}_h de l'ouvert Ω par des D -simplexes K , où h est la borne supérieure des diamètres de K . On définit

$$V_h = \{v_h \in \mathcal{C}^{m-1}(\overline{\Omega}) \cap H_0^m(\Omega); \forall K \in \mathcal{S}_h, v_{h/K} \in P_K\}, \quad (\text{II.10})$$

où P_K est un sous-espace de dimension finie de $H^m(K)$ contenant tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $q + 2m - 1$, $q \geq 0$.

On supposera toujours la famille de triangulations $(\mathcal{S}_h)_h$ régulière au sens de [8], i.e.

1° en dimension $D = 1$, le rapport $h_K/h_{K'}$ des diamètres de deux segments adjacents K et K' de \mathcal{S}_h est borné indépendamment de K, K' et h ;

2° en dimension $D \geq 2$, le quotient h_K/ρ_K du diamètre d'un D -simplexe K de \mathcal{S}_h par la borne supérieure des diamètres des sphères qui y sont contenues est borné indépendamment de K et de h .

LEMME II.1 : *Si la famille $(\mathcal{S}_h)_h$ est uniformément régulière, i.e. si le rapport h/h_K , où h_K est le diamètre d'un D -simplexe K de \mathcal{S}_h , est borné indépendamment de K et de h , l'hypothèse (II.6) est vérifiée.*

Démonstration : Pour tout élément v de $H_0^m(\Omega)$, pour tout v_h dans V_h ,

$$|Q_h v|_{m,\Omega} \leq |v_h|_{m,\Omega} + |Q_h v - v_h|_{m,\Omega}.$$

La famille $(\mathcal{S}_h)_h$ étant uniformément régulière, on a l'inégalité inverse

$$\forall v_h \in V_h, \quad |v_h|_{m,\Omega} \leq Ch^{-m} \|v_h\|_{0,\Omega}. \quad (\text{II.11})$$

D'où :

$$|Q_h v|_{m,\Omega} \leq |v_h|_{m,\Omega} + Ch^{-m} \{ \|v - v_h\|_{0,\Omega} + \|v - Q_h v\|_{0,\Omega} \}.$$

Comme $\|v - Q_h v\|_{0,\Omega} = \inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{0,\Omega}$, on a

$$|Q_h v|_{m,\Omega} \leq |v_h|_{m,\Omega} + Ch^{-m} \|v - v_h\|_{0,\Omega}.$$

On choisit alors pour v_h l'interpolé de v défini par régularisation locale dans [9] pour le cas $m = 1$, $D = 2$ et généralisé dans [4] aux autres cas. On obtient

$$|Q_h v|_{m,\Omega} \leq C |v|_{m,\Omega}.$$

On déduit de la théorie classique des éléments finis (cf. [8]) le :

COROLLAIRE II.2 : *La condition (H_A) est satisfaite, à condition de supposer en outre (II.6) dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$.*

Pour obtenir des majorations d'erreur, nous aurons besoin d'hypothèses de régularité. On notera pour tout $l \geq 0$:

1° $\mathcal{X}_\#(l)$ l'intersection de $\mathcal{X}_\#$ avec l'espace

$$L^2(0, T; H^{l+2m}(\Omega)) \cap H^{1/2}(0, T; H^{l+m}(\Omega));$$

2° $\mathcal{X}_0(l)$ l'intersection de \mathcal{X}_0 avec l'espace

$$L^2(0, T; H^{l+2m}(\Omega)) \cap H^{1/2}(0, T; H^{l+m}(\Omega));$$

3° $\mathcal{X}_I(l)$ l'espace $L^2(0, T; H^{l+2m}(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^l(\Omega))$.

THÉORÈME II.1 : *On suppose que $u = \mathfrak{C}F$ appartient à $\mathcal{X}(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$. Alors, on a la majoration d'erreur*

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)F\|_{\mathcal{X}} \leq Ch^{l+m} \|u\|_{\mathcal{X}(l)}, \quad (\text{II.12})$$

à condition de supposer en outre (II.6) dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$.

Démonstration :

1° Le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\#$ a été étudié dans [2].

2° Dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$, on utilise (II.5) :

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)f\|_{\mathcal{X}_0} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{X}_{0h}} \|u - v_h\|_{\mathcal{X}_0}.$$

Pour tout élément v de \mathcal{X}_0 , on note \tilde{v} le prolongement de v par symétrie par rapport à T sur $(T, 2T)$ et par 0 sur $(-\infty, 0) \cup (2T, +\infty)$, puis \hat{v} la transformée de \tilde{v} par rapport à t , i.e.

$$\hat{v}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(t) e^{-t\tau} dt.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)f\|_{\mathcal{X}_0}^2 \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{X}_{0h}} \int_{\mathbb{R}} \{ & \| \hat{u}(\tau) - \hat{v}_h(\tau) \|_{m,\Omega}^2 + \\ & + |\tau| \| \hat{u}(\tau) - \hat{v}_h(\tau) \|_{0,\Omega}^2 \} d\tau. \end{aligned}$$

On choisit alors pour $\hat{v}_h(\tau)$ l'interpolé classique de $\hat{u}(\tau)$ si $l \geq 1$ (cf. [8]) ou l'interpolé de $\hat{u}(\tau)$ défini par régularisation locale si $l = 0$ (cf. [9], [4]) :

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) f\|_{x_0}^2 \leq Ch^{2(l+m)} \int_{\mathbb{R}} \{ \|\hat{u}(\tau)\|_{l+2m, \Omega}^2 + |\tau| \|\hat{u}(\tau)\|_{l+m, \Omega}^2 \} d\tau.$$

D'où :

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) f\|_{x_0} \leq Ch^{l+m} \|u\|_{x_0(l)}.$$

3° Dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$, on utilise (II.8) :

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{x_I}^2 &\leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{x_{Ih}}^2 \\ &\leq C \int_0^T \left\{ \|u - Q_h u\|_{m, \Omega}^2 + \left\| \frac{du}{dt} - Q_h \frac{du}{dt} \right\|_{-m, \Omega}^2 \right\} dt. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (II.6) :

$$\|u - Q_h u\|_{m, \Omega} \leq C \inf_{v_h \in \mathcal{V}_h} \|u - v_h\|_{m, \Omega} \leq Ch^{l+m} \|u\|_{l+2m, \Omega}.$$

D'autre part, pour tout v dans $H^l(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|v - Q_h v\|_{-m, \Omega} &= \sup_{w \in H_0^m(\Omega)} \frac{(v - Q_h v, w)}{|w|_{m, \Omega}} \\ &= \sup_{w \in H_0^m(\Omega)} \frac{(v - Q_h v, w - Q_h w)}{|w|_{m, \Omega}} \leq Ch^m \|v - Q_h v\|_{0, \Omega} \\ &\leq Ch^{l+m} \|v\|_{l, \Omega}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{x_I} \leq Ch^{l+m} \|u\|_{x_I(l)}.$$

Remarque II.2 : On suppose que la forme a est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq j \leq D} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{1 \leq i \leq D} a_i(x) \frac{\partial uv}{\partial x_i} + a_0(x) uv \right\} dx, \quad (\text{II.13})$$

où les fonctions $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq j \leq D$, et a_i , $0 \leq i \leq D$, appartiennent à $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Alors, d'après la proposition II.2 et les résultats de régularité classiques des problèmes elliptiques (cf. [14]), pour $l = 0$ et $m = 1$, si l'ouvert Ω est convexe, $u = \mathfrak{C}F$ appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, donc à

$\mathcal{X}(0)$ dès que $F = f$ appartient à $L^2(Q)$ dans les cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\#$ et $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$ ou que $F = (f, u_0)$ appartient à $L^2(Q) \times H_0^1(\Omega)$ dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$.

Dans le cas $m = 1$, une méthode de dualité permet d'obtenir une meilleure majoration pour $\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{L^2(Q)}$.

PROPOSITION II. 5 : On se place dans le cas $m = 1$, pour un ouvert Ω convexe, la forme a étant définie par (II.13). On a

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{L^2(Q)} \leq Ch \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_x. \tag{II.14}$$

On suppose que $u = \mathfrak{C}F$ appartient à $\mathcal{X}(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$. Alors, on a la majoration d'erreur

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{L^2(Q)} \leq Ch^{l+2} \|u\|_{\mathcal{X}(l)}, \tag{II.15}$$

à condition de supposer en outre (II.6) dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$.

Démonstration :

1° Le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\#$ a été étudié dans [2].

2° Dans les cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$ ou $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$, on a en posant $u_h = \mathfrak{C}_h F$,

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h) F\|_{L^2(Q)} = \sup_{g \in L^2(Q)} \frac{\int_0^T (u - u_h, g) dt}{\|g\|_{L^2(Q)}}.$$

Soit g une fonction quelconque de $L^2(Q)$. Le problème consistant à trouver v dans \mathcal{X}_T vérifiant

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \left(-\frac{dv}{dt}, w\right) + a(v, w) = (g, w) \quad \text{p.p dans } (0, T)$$

admet une solution unique et, d'après la remarque II. 2,

$$\|v\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \|g\|_{L^2(Q)}. \tag{II.16}$$

On a alors

$$\int_0^T (u - u_h, g) dt = \int_0^T \left\{ -\left(\frac{dv}{dt}, u - u_h\right) + a(v, u - u_h) \right\} dt.$$

Dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$, on en déduit pour tout v_h dans \mathcal{X}_{0h} ,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u - u_h, g) dt &\leq C \int_{\mathbb{R}} \{ |\tau| (\hat{u} - \hat{u}_h, \hat{v} - \hat{v}_h) + a(\hat{u} - \hat{u}_h, \hat{v} - \hat{v}_h) \} d\tau \\ &\leq C \|u - u_h\|_{x_0} \|v - v_h\|_{x_0}. \end{aligned}$$

Dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$, on en déduit pour tous v_h dans $L^2(0, T; V_h)$ et v_{0h} dans V_h ,

$$\begin{aligned} \int_0^T (u - u_h, g) dt &= \int_0^T \left\{ \left(\frac{d}{dt} (u - u_h), v - v_h \right) + a(u - u_h, v - v_h) \right\} dt + \\ &\quad + (u_0 - Q_h u_0, v(0) - v_{0h}) \\ &\leq C \|u - u_h\|_{\mathfrak{C}_I} \{ \|v - v_h\|_{L^2(0, T; V)} + \|v(0) - v_{0h}\|_{0, \Omega} \}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on en déduit en utilisant (II.16)

$$\int_0^T (u - u_h, g) dt \leq Ch \|u - u_h\|_{\mathfrak{C}} \|g\|_{L^2(Q)},$$

d'où :

$$\|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)F\|_{L^2(Q)} \leq Ch \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_h)F\|_{\mathfrak{C}}.$$

La majoration (II.15) s'obtient à partir de (II.14) et du théorème II.1.

II.3. Exemples de discrétisation totale

Exemple II.1 : Approximation spectrale dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\#}$.

On choisit le paramètre \bar{h} égal à $(h, 1/N)$, où h est défini comme précédemment et N est un entier ≥ 1 . On pose

$$\mathfrak{X}_{\# \bar{h}} = \left\{ v_{\bar{h}} = \sum_{|n| \leq N} v_{hn} \exp\left(\frac{2i\pi n t}{T}\right), v_{hn} \in V_h \right\}.$$

Soit f un élément de $\mathcal{Y}_{\#}$. Si l'approximation $u_h = \mathfrak{C}_{\# h} f$ de $u = \mathfrak{C}_{\#} f$ définie par (II.1) s'écrit

$$u_h = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{hn} \exp\left(\frac{2i\pi n t}{T}\right),$$

où u_{hn} , $n \in \mathbb{Z}$, sont les coefficients de Fourier de u_h , on définit $u_{\bar{h}} = \mathfrak{C}_{\# \bar{h}} f$ par

$$u_{\bar{h}} = \sum_{|n| \leq N} u_{hn} \exp\left(\frac{2i\pi n t}{T}\right). \quad (\text{II.17})$$

Les résultats suivants ont été démontrés dans [2].

PROPOSITION II.6 : *Sous l'hypothèse (II.9), la condition (H_A) est satisfaite.*

THÉORÈME II.2 : *On suppose que $u = \mathfrak{C}_{\#} f$ appartient à*

$$L^2(0, T; H^{1+2m}(\Omega)) \cap H^{\frac{1}{2m}+1}(0, T; L^2(\Omega))$$

pour un entier l . Alors, on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{C}_\# - \mathfrak{C}_{\#\bar{h}})f\|_{\mathcal{X}_\#} &\leq C \{ h^{\text{Inf}(l,q)+m} + N^{-\frac{l+m}{2m}} \} \times \\ &\times \|u\|_{L^2(0,T;H^{l+2m}(\Omega)) \cap H^{\frac{l}{2m}+1}(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

PROPOSITION II.7 : On se place dans le cas $m = 1$ pour un ouvert Ω convexe, la forme a étant définie par (II.13). On suppose que $u = \mathfrak{C}_\# f$ appartient à $\mathcal{X}_\#(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$, et à $H^r(0, T; L^2(\Omega))$ pour un entier $r \geq 1$. Alors, on a la majoration d'erreur

$$\|(\mathfrak{C}_\# - \mathfrak{C}_{\#\bar{h}})f\|_{L^2(Q)} \leq C \{ h^{l+2m} \|u\|_{\mathcal{X}_\#(l)} + N^{-r} \|u\|_{H^r(0,T;L^2(\Omega))} \}. \quad (\text{II.19})$$

Exemple II.2 : Méthode à un pas dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_I$.

On choisit le paramètre \bar{h} égal à (h, k) , où h est défini comme précédemment et k vaut T/N pour un entier $N \geq 1$. On choisit comme espace $\mathcal{X}_{I\bar{h}}$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ et linéaires sur chaque intervalle $[nk, (n+1)k]$, $0 \leq n \leq N-1$, à valeurs dans V_h ; en d'autres termes, si φ^n est la fonction continue sur $[0, T]$ et linéaire sur chaque intervalle $[pk, (p+1)k]$, $0 \leq p \leq N-1$, et égale à 1 en nk et à 0 en pk , $0 \leq p \leq N$, $p \neq n$, on a

$$\mathcal{X}_{I\bar{h}} = \left\{ v_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N v^n \varphi^n, v^n \in V_h \right\}.$$

On se donne un nombre réel θ , $1/2 < \theta \leq 1$, et pour tout ensemble $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$, on note

$$u^{n+\theta} = (1 - \theta) u^n + \theta u^{n+1}.$$

Soit $F = (f, u_0)$ un élément de \mathcal{Y}_I . On définit $u_{\bar{h}} = \mathfrak{C}_{I\bar{h}} F$ par

$$u_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N u^n \varphi^n, \quad (\text{II.20})$$

le coefficient u^0 étant défini dans V_h par

$$\forall v_h \in V_h, \quad (u^0, v_h) + ka(u^0, v_h) = (u_0, v_h) \quad (\text{II.21})$$

et les coefficients u^{n+1} , $0 \leq n \leq N-1$, étant solutions dans V_h de

$$\forall v_h \in V_h, \quad \frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n, v_h) + a(u^{n+\theta}, v_h) = (f^n, v_h), \quad (\text{II.22})$$

où

$$f^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} f(t) dt = \frac{1}{k} \int_0^T f(t) \chi^n(t) dt \quad (\text{II.23})$$

(χ^n est la fonction en escalier égale à 1 sur $(nk, (n+1)k)$ et nulle ailleurs). Notons que, d'après la V -ellipticité de la forme a , le schéma (II.21), (II.22) définit les u^n , $0 \leq n \leq N$, de façon unique.

PROPOSITION II.8 : *Sous l'hypothèse (II.6), il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout élément F de \mathcal{Y}_I ,*

$$\| \mathcal{G}_{I\bar{h}} F \|_{\mathcal{X}_I} \leq C \| \mathcal{G}_I F \|_{\mathcal{X}_I}. \quad (\text{II.24})$$

Démonstration :

1° En choisissant $v_h = u^{n+1} - u^n$ dans (II.22), on a la majoration classique

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} \| u^{n+1} - u^n \|_H^2 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) a(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n) + \\ + \frac{1}{2} a(u^{n+1}, u^{n+1}) - \frac{1}{2} a(u^n, u^n) \\ \leq C \| f^n \|_{V'}^2 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha}{2} \| u^{n+1} - u^n \|_{V'}^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.25})$$

En sommant sur n , on en déduit

$$\sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_H^2 + k \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_{V'}^2 \leq C \left\{ k \sum_{n=0}^{N-1} \| f^n \|_{V'}^2 + ka(u^0, u^0) \right\}.$$

D'après (II.23), on a : $k \sum_{n=0}^{N-1} \| f^n \|_{V'}^2 \leq C \| f \|_{L^2(0,T;V')}^2$.

D'autre part, d'après l'initialisation (II.21),

$$\| u^0 \|_H^2 + ka(u^0, u^0) = (u_0, u^0) \leq \frac{1}{2} \| u_0 \|_H^2 + \frac{1}{2} \| u^0 \|_H^2,$$

ce qui entraîne : $ka(u^0, u^0) \leq 1/2 \| u_0 \|_H^2$.

On obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_H^2 + k \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_{V'}^2 \leq C (\| f \|_{L^2(0,T;V')}^2 + \| u_0 \|_H^2). \quad (\text{II.26})$$

2° D'après (II.22), on a en posant $u_{\bar{h}} = \mathfrak{C}_{I\bar{h}} F$:

$$\forall v_h \in V_h, \quad \left(\frac{du_{\bar{h}}}{dt}, v_h \right) + a(u_{\bar{h}}, v_h) = \\ = \left(\sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n, v_h \right) + a \left(u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n, v_h \right) \quad \text{p.p. dans } (0, T).$$

D'après la proposition II.4, on en déduit

$$\| u_{\bar{h}} \|_{x_I} \leq C \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{L^2(0,T;V')} + \left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(0,T;V)} + \| u_0 \|_H \right\} \\ \leq C \{ \| f \|_{L^2(0,T;V')} + \| u_0 \|_H \} + C \left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Or on remarque que

$$\left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(0,T;V)}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nk}^{(n+1)k} \| u^{n+1} - u^n \|^2 \left(\frac{t-(n+\theta)k}{k} \right)^2 dt = \\ = k \frac{(1-\theta)^3 + \theta^3}{3} \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_V^2,$$

ce qui avec (II.26) entraîne la proposition II.8.

THÉORÈME II.3 : *On suppose que $u = \mathfrak{C}_I F$ appartient à $H^1(0, T; V) \cap H^2(0, T; V')$ et que $Au(0)$ appartient à H . Sous l'hypothèse (II.6), on a la majoration d'erreur.*

$$\| (\mathfrak{C}_I - \mathfrak{C}_{I\bar{h}}) F \|_{x_I} \leq C \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{x_I} + \\ + Ck \{ \| u \|_{H^1(0,T;V) \cap H^2(0,T;V')} + \| Au(0) \|_H \}. \quad (\text{II.27})$$

Démonstration : On pose : $\tilde{u} = \sum_{n=0}^N \tilde{u}^n \varphi^n$, le coefficient \tilde{u}^0 étant défini dans V par

$$\forall v \in V, \quad (\tilde{u}^0, v) + ka(\tilde{u}^0, v) = (u_0, v) \quad (\text{II.28})$$

et les coefficients \tilde{u}^{n+1} , $0 \leq n \leq N-1$, étant solutions dans V de

$$\forall v \in V, \quad \frac{1}{k} (\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^n, v) + a(\tilde{u}^{n+\theta}, v) = (f^n, v). \quad (\text{II.29})$$

On remarque que, d'après la proposition (II.8), l'opérateur $\mathcal{R}_{\bar{h}} : \tilde{u} \rightarrow u_{\bar{h}}$ vérifie

$$\| \mathcal{R}_{\bar{h}} \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I} \leq C \| \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I}.$$

Calculons maintenant $\| u - u_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I}$:

$$\| u - u_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I} \leq \| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I} + \| \tilde{u} - u_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I}.$$

En remarquant que : $\forall v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}, \mathcal{R}_{\bar{h}} v_{\bar{h}} = v_{\bar{h}}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \| u - u_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I} &\leq \| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I} + \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \| (I - \mathcal{R}_{\bar{h}}) (\tilde{u} - v_{\bar{h}}) \|_{\mathcal{X}_I} \\ &\leq C \{ \| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I} + \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I} \}. \end{aligned}$$

Il reste à évaluer $\| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I}$:

$$\| u - \tilde{u} \|_{\mathcal{X}_I} \leq C \left\| u - \sum_{n=0}^N u(nk) \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_I} + \left\| \sum_{n=0}^N (\tilde{u}^n - u(nk)) \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

1° D'après la théorie de l'interpolation classique,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u(nk) \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_I} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

2° On pose : $e = \sum_{n=0}^N e^n \varphi^n = \sum_{n=0}^N (\tilde{u}^n - u(nk)) \varphi^n$. On a

$$e^0 = \tilde{u}^0 - u^0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} (e^{n+1} - e^n, v) + a(e^{n+\theta}, v) &= (f^n, v) - \frac{1}{k} (u((n+1)k) - u(nk), v) \\ &\quad - a((1-\theta)u(nk) + \theta u((n+1)k), v). \end{aligned}$$

Or, en intégrant l'équation (I.8) sur $(nk, (n+1)k)$, on obtient

$$\frac{1}{k} (u((n+1)k) - u(nk), v) + a \left(\frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} u(t) dt, v \right) = (f^n, v).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n, v) + a(e^{n+\theta}, v) &= \\ &= a\left(\frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} u(t) dt - (1 - \theta) u(nk) - \theta u((n+1)k), v\right) \end{aligned}$$

Posons

$$\varepsilon^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} u(t) dt - (1 - \theta) u(nk) - \theta u((n+1)k)$$

Le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition II 8 prouve que

$$\|e\|_{\mathcal{E}_I} \leq C \left\{ \left(k \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|_V^2 \right)^{1/2} + \|\tilde{u}^0 - u_0\|_H \right\}$$

Or, en utilisant la formule de Taylor, on a

$$u(t) = u(nk) + \int_{nk}^t \frac{du}{dt}(s) ds = u((n+1)k) + \int_{(n+1)k}^t \frac{du}{dt}(s) ds,$$

d'où

$$\varepsilon^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} \left\{ (1 - \theta) \int_{nk}^t \frac{du}{dt}(s) ds + \theta \int_{(n+1)k}^t \frac{du}{dt}(s) ds \right\}$$

et

$$\|\varepsilon^n\|_V \leq Ck^{1/2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(nk, (n+1)k, V)}$$

On obtient

$$\left(k \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|_V^2 \right)^{1/2} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T, V)} \quad (\text{II } 30)$$

Enfin, on remarque que, d'après l'initialisation (II 28),

$$\forall v \in V, \quad (\tilde{u}^0 - u_0, v) + ka(\tilde{u}^0 - u_0, v) = -ka(u_0, v),$$

ce qui implique

$$\|\tilde{u}^0 - u_0\|_H \leq Ck \|Au_0\|_H$$

La majoration (II 27) s'obtient en regroupant les résultats précédents

Remarque II.3 : On démontre facilement en dérivant l'équation (I.8) que $u = \mathcal{G}_I F$ appartient à $H^1(0, T; V) \cap H^2(0, T; V')$ dès que $F = (f, u_0)$ appartient à $H^1(0, T; V') \times V$ avec $f(0) - Au_0$ dans H . On a en outre

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_I F\|_{H^1(0, T; V) \cap H^2(0, T; V')} &\leq \\ &\leq C \{ \|f\|_{H^1(0, T; V')} + \|u_0\|_V + \|f(0) - Au_0\|_H \}. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

COROLLAIRE II.3 : *Sous les hypothèses (II.6) et (II.9), la condition (H_A) est satisfaite.*

Démonstration : Soit $F = (f, u_0)$ un élément de \mathcal{Y}_I . Soit ε un nombre réel > 0 quelconque. Il existe une fonction u_ε de $\mathcal{D}([0, T]; V)$, avec $Au_\varepsilon(0)$ dans H , telle que, si $u = \mathcal{G}_I F$,

$$\|u - u_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_I} \leq \varepsilon.$$

En posant $F_\varepsilon = \left(f_\varepsilon = \frac{du_\varepsilon}{dt} + Au_\varepsilon, u_{0\varepsilon} = u_\varepsilon(0) \right)$, on a

$$\|(\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F\|_{\mathcal{X}_I} \leq \|(\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}})(F - F_\varepsilon)\|_{\mathcal{X}_I} + \|(\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_I}.$$

1° D'après la proposition II.8, on a

$$\|(\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}})(F - F_\varepsilon)\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \|F - F_\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_I} \leq C\varepsilon.$$

2° D'après le théorème II.3,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_I} &\leq C \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \|u_\varepsilon - v_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_I} + \\ &+ Ck \{ \|u_\varepsilon\|_{H^1(0, T; V) \cap H^2(0, T; V')} + \|Au_{0\varepsilon}\|_H \}. \end{aligned}$$

Or, sous l'hypothèse (II.9), pour h assez petit, il existe une fonction v_h de $\mathcal{D}([0, T]; V_h)$ telle que

$$\|u_\varepsilon - v_h\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \|u_\varepsilon - v_h\|_{H^1(0, T; V)} \leq C\varepsilon.$$

Puis, en choisissant $v_{\bar{h}}(t) = \sum_{n=0}^N v_h(nk) \varphi^n$, on obtient

$$\|v_h - v_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_I} \leq Ck \left\| \frac{dv_h}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

En regroupant les majorations, on a

$$\begin{aligned} \| (\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F_\varepsilon \|_{\mathcal{X}_I} &\leq C\varepsilon + Ck \left\| \frac{dv_h}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_I} + \\ &+ Ck \{ \| u_\varepsilon \|_{H^1(0,T;V) \cap H^2(0,T;V')} + \| Au_{0\varepsilon} \|_H \}. \end{aligned}$$

On peut choisir k assez petit pour que

$$\| (\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F_\varepsilon \|_{\mathcal{X}_I} \leq C\varepsilon.$$

On suppose maintenant que V est l'espace $H_0^m(\Omega)$ et que l'espace V_h est défini par (II. 10).

THÉORÈME II. 4 : *On suppose que $u = \mathcal{G}_I F$ appartient à $\mathcal{X}_I(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$, et à $H^1(0, T; H_0^m(\Omega)) \cap H^2(0, T; H^{-m}(\Omega))$ et que $Au(0)$ appartient à $L^2(\Omega)$. Sous l'hypothèse (II. 6), on a la majoration d'erreur*

$$\begin{aligned} \| (\mathcal{G}_I - \mathcal{G}_{I\bar{h}}) F \|_{\mathcal{X}_I} &\leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_I(l)} + \\ &+ Ck \{ \| u \|_{H^1(0,T;H_0^m(\Omega)) \cap H^2(0,T;H^{-m}(\Omega))} + \| Au(0) \|_{0,\Omega} \}. \end{aligned} \quad (\text{II. 32})$$

Démonstration : D'après le théorème II. 3, il suffit d'évaluer

$$\inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I}.$$

Or, en raisonnant comme dans la démonstration du théorème II. 1, on a

$$\| u - Q_h u \|_{\mathcal{X}_I} \leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_I(l)}.$$

Donc :

$$\inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_I} \leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_I(l)} + \left\| Q_h u - \sum_{n=0}^N Q_h u(nk) \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

D'après la théorie classique de l'interpolation,

$$\left\| Q_h u - \sum_{n=0}^N Q_h u(nk) \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_I} \leq Ck \left\| \frac{d}{dt} Q_h u \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

D'après l'hypothèse (II. 6), on sait déjà que : $\| Q_h \|_{\mathcal{L}(H_0^m(\Omega), H_0^m(\Omega))} \leq C$. De plus, l'opérateur Q_h étant auto-adjoint dans $L^2(\Omega)$, se prolonge en un opérateur de $H^{-m}(\Omega)$ dans V_h et on a : $\| Q_h \|_{\mathcal{L}(H^{-m}(\Omega), H^{-m}(\Omega))} \leq C$.

On en déduit

$$\left\| \frac{d}{dt} Q_h u \right\|_{\mathcal{X}_I} \leq C \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_I}.$$

Par conséquent,

$$\inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{I\bar{h}}} \|u - v_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_I} \leq Ch^{1+m} \|u\|_{\mathcal{X}_I(t)} + Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_I}. \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas $m = 1$, on obtient une majoration pour $\|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)}$ sous des hypothèses de régularité plus faibles.

PROPOSITION II.9 : *On se place dans le cas $m = 1$, pour un ouvert Ω convexe, la forme a étant définie par (II.13). Sous l'hypothèse (II.6), on a*

$$\|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)} \leq C(h + k^{1/2}) \|\mathcal{C}_I F\|_{\mathcal{X}_I}. \quad (\text{II.34})$$

Si on suppose en outre que $u = \mathcal{C}_I F$ appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, on a

$$\|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + k) \|u\|_{L^2(0, T, H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T, H^{-1}(\Omega))}. \quad (\text{II.35})$$

Démonstration : On a en posant $u_{\bar{h}} = \mathcal{C}_{I\bar{h}} F$,

$$\|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)} = \sup_{g \in L^2(Q)} \frac{\int_0^T (u - u_{\bar{h}}, g) dt}{\|g\|_{L^2(Q)}}.$$

Soit g une fonction quelconque de $L^2(Q)$. La fonction v étant définie comme dans la proposition II.5 et vérifiant (II.16), on calcule

$$\begin{aligned} \int_0^T (u - u_{\bar{h}}, g) dt &= \int_0^T \left\{ - \left(\frac{dv}{dt}, u - u_{\bar{h}} \right) + a(v, u - u_{\bar{h}}) \right\} dt = \\ &= \int_0^T \left\{ \left(\frac{d}{dt} (u - u_{\bar{h}}), v \right) + a(u - u_{\bar{h}}, v) \right\} dt + (u^0 - u_0, v(0)). \end{aligned}$$

D'après (II.21) et (II.22), on a

$$\forall v_h \in V_h, \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt} (u - u_{\bar{h}}), v_h \right) + a(u - u_{\bar{h}}, v_h) = \\ &= \left(f - \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n, v_h \right) - a \left(u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n, v_h \right) \\ &\text{p.p. dans } (0, T), \\ &(u^0 - u_0, v_h) + ka(u^0, v_h) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour toute fonction $v_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^{N-1} v_h^n \chi^n$ de $L^2(0, T; V_h)$ et tout élément v_{0h} de V_h , on en déduit (en remarquant que $(f - \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n, v_{\bar{h}}) = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^T (u - u_{\bar{h}}, g) dt &= \int_0^T \left\{ \left(\frac{d}{dt}(u - u_{\bar{h}}), v - v_{\bar{h}} \right) + a(u - u_{\bar{h}}, v - v_{\bar{h}}) + \right. \\ &\quad \left. + a\left(u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n, v - v_{\bar{h}}\right) \right. \\ &\quad \left. - a\left(u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n, v\right) \right\} dt \\ &\quad + (u^0 - u_0, v(0) - v_{0h}) - ka(u^0, v_{0h}) \\ &\leq \left\{ \|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{Q}_T} + \left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \right\} \times \\ &\quad \times \|v - v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \\ &\quad + \left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(Q)} \|v\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &\quad + \|u^0 - u_0\|_{0,\Omega} \|v(0) - v_{0h}\|_{0,\Omega} + k |u^0|_{1,\Omega} |v_{0h}|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \int_0^T (u - u_{\bar{h}}, g) dt &\leq C \left\{ \|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{Q}_T} + k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+1} - u^n\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2} \right\} \times \\ &\quad \times \|v - v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \\ &\quad + k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+1} - u^n\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \|v\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \\ &\quad + \|u^0 - u_0\|_{0,\Omega} \|v(0) - v_{0h}\|_{0,\Omega} + k |u^0|_{1,\Omega} |v_{0h}|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

D'après la théorie de l'interpolation classique, si on choisit

$$v_h^n = \frac{1}{k} \int_{nk}^{(n+1)k} Q_h v(t) dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|v - v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} &\leq \|v - Q_h v\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \|Q_h v - v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \\ &\leq Ch \|v\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + (k^{1/2} \|Q_h v\|_{H^{1/2}(0,T;H^1_0(\Omega))}), \end{aligned}$$

d'où, en utilisant l'hypothèse (II.6) et (II.16),

$$\|v - v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C(h + k^{1/2}) \|g\|_{L^2(Q)}.$$

De même, si on choisit $v_{0h} = Q_h v(0)$, on obtient

$$\begin{aligned} \|v(0) - v_{0h}\|_{0,\Omega} &\leq Ch |v(0)|_{1,\Omega} \leq Ch \|g\|_{L^2(Q)}, \\ |v_{0h}|_{1,\Omega} &\leq C |v(0)|_{1,\Omega} \leq C \|g\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)} &\leq C(h + k^{1/2}) \left\{ \|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_I} + \right. \\ &\quad \left. + k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} |u^{n+1} - u^n|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2} \right\} + \\ &\quad + Ck^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u^{n+1} - u^n\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + Ch \|u^0 - u_0\|_{0,\Omega} + Ck |u^0|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

1° Comme u appartient à \mathcal{X}_I , en utilisant (II.26) et en remarquant que, d'après l'initialisation (II.21),

$$\|u^0\|_{0,\Omega} + k^{1/2} |u^0|_{1,\Omega} \leq C \|u_0\|_{0,\Omega},$$

on obtient immédiatement

$$\|(\mathcal{C}_I - \mathcal{C}_{I\bar{h}})F\|_{L^2(Q)} \leq C(h + k^{1/2}) \|u\|_{\mathcal{X}_I}.$$

2° Si u appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, on prouve par interpolation à partir de (II.24) et (II.32)

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_I} \leq C(h + k^{1/2}) \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

D'autre part, $f = \frac{du}{dt} + Au$ appartient à $L^2(Q)$ et on a

$$k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f^n\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

En choisissant $v_h = u^{n+1} - u^n$ dans (II.22), on a la majoration

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \| u^{n+1} - u^n \|_{0,\Omega}^2 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) a(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u^n) + \\ + \frac{1}{2} a(u^{n+1}, u^{n+1}) - \frac{1}{2} a(u^n, u^n) \leq Ck \| f^n \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2k} \| u^{n+1} - u^n \|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

de sorte qu'en sommant sur n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=0}^{N-1} | u^{n+1} - u^n |_{1,\Omega}^2 \leq Ck^2 \sum_{n=0}^{N-1} \| f^n \|_{0,\Omega}^2 + k | u^0 |_{1,\Omega}^2 \leq \\ \leq Ck \| u \|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T;H^{-1}(\Omega))} + k | u^0 |_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Enfin, d'après l'initialisation (II.21),

$$\begin{aligned} \| u^0 - u_0 \|_{0,\Omega}^2 + k\alpha | u^0 |_{1,\Omega}^2 \leq (u^0 - u_0, u^0 - Q_h u_0) - (u^0 - u_0, u_0 - Q_h u_0) + \\ + ka(u^0, u^0) \\ \leq -(u^0 - u_0, u_0 - Q_h u_0) + ka(u^0, Q_h u_0) \leq \\ \leq \frac{1}{2} \| u^0 - u_0 \|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \| u_0 - Q_h u_0 \|_{0,\Omega}^2 + k \frac{\alpha}{2} | u^0 |_{1,\Omega}^2 + Ck | Q_h u_0 |_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\| u^0 - u_0 \|_{0,\Omega} + k^{1/2} | u^0 |_{1,\Omega} \leq C(h + k^{1/2}) | u(0) |_{1,\Omega}.$$

On obtient finalement

$$\| (\mathfrak{C}_I - \mathfrak{C}_{Ih}) F \|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + k) \| u \|_{L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

Remarque II.4 : La majoration (II.34) est très intéressante, car elle permet d'obtenir un ordre de convergence effectif sans aucune hypothèse de régularité.

Remarque II.5 : Lorsque l'on remplace l'initialisation (II.21) par

$$u^0 = Q_h u_0, \quad (\text{II.36})$$

on ne peut vérifier l'hypothèse d'approximation (H_A) sans imposer une condition sur h et k (i.e. $kh^{-2m} \leq C$). Mais les majorations d'erreur (II.27) et (II.32) restent vraies sous les mêmes hypothèses de régularité.

Exemple II.3 : Méthode à un pas dans le cas $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$.

La méthode employée est essentiellement la même que dans l'exemple II.2, nous nous contenterons d'indiquer les principales modifications. Le paramè-

tre \bar{h} étant défini comme précédemment, on choisit comme espace $\mathcal{X}_{0\bar{h}}$ l'espace

$$\mathcal{X}_{0\bar{h}} = \left\{ v_{\bar{h}} = \sum_{n=1}^N v^n \varphi^n, v^n \in V_h \right\}.$$

Soit f un élément de \mathcal{Y}_0 . On définit $u_{\bar{h}} = \mathcal{C}_{0\bar{h}} f$ par

$$u_{\bar{h}} = \sum_{n=1}^N u^n \varphi^n, \quad (\text{II.37})$$

le coefficient u^0 étant nul et les coefficients u^{n+1} , $0 \leq n \leq N-1$, étant solutions dans V_h de (II.22), où les f^n , $0 \leq n \leq N-1$, doivent maintenant être définis par

$$f^n = \frac{1}{k} \langle f, \varphi^n \rangle \quad (\text{II.38})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre $H_T^{-1/2}(0, T; H)$ et $H_T^{1/2}(0, T; H)$.

LEMME II.2 : Pour tout f de $H_T^{-1/2}(0, T; H)$, si les coefficients f^n ,
 $0 \leq n \leq N-1$,

sont définis par (II.38), on a

$$k \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f^n\|_H^2 \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{H_T^{-1/2}(0, T; H)}, \quad (\text{II.39})$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{H_T^{-1/2}(0, T; H)} \leq C \|f\|_{H_T^{-1/2}(0, T; H)}. \quad (\text{II.40})$$

Démonstration : Il est évident que, pour toute fonction f de $L^2(0, T; H)$,

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{L^2(0, T; H)} = k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f^n\|_H^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(0, T; H)}.$$

On obtiendra donc (II.39) et (II.40) par interpolation, si on prouve que, pour tout f dans le dual $H_T^{-1}(0, T; H)$ de l'espace $H_T^1(0, T; H)$ des fonctions de $H^1(0, T; H)$ nulles en T , on a

$$k^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f^n\|_H^2 \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{H_T^{-1}(0, T; H)},$$

$$\left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{H_T^{-1}(0, T; H)} \leq C \|f\|_{H_T^{-1}(0, T; H)}.$$

Soit donc f un élément de $H_T^{-1}(0, T; H)$. On sait que

$$\frac{1}{C} \|g'\|_{L^2(0, T; H)} \leq \|f\|_{H_T^{-1}(0, T; H)} \leq C \|g'\|_{L^2(0, T; H)},$$

où g est la solution dans $H_T^1(0, T; H)$ du problème variationnel

$$\forall w \in H_T^1(0, T; H), \quad \int_0^T g'(t) w'(t) dt = \langle f, w \rangle.$$

1° Calculons $f^n = \frac{1}{k} \langle f, \varphi^n \rangle$, $0 \leq n \leq N-1$. Avec la convention $\chi^{-1} = 0$,

$$\begin{aligned} f^n &= \frac{1}{k} \int_0^T g'(t) \varphi^n(t) dt = \frac{1}{k^2} \int_0^T g'(t) (\chi^{n-1}(t) - \chi^n(t)) dt = \\ &= \frac{1}{k^2} \langle g', \chi^{n-1} - \chi^n \rangle. \end{aligned}$$

D'où :

$$k^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f^n\|_H^2 \right)^{1/2} \leq C \|g'\|_{L^2(0, T; H)} \leq C \|f\|_{H_T^{-1}(0, T; H)}.$$

2° Si on pose $v^n = \frac{1}{k} \langle g', \chi^{n-1} \rangle$, $0 \leq n \leq N$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\sum_{n=1}^N v^n \varphi^n(t) \right) w'(t) dt &= - \int_0^T \left(\sum_{n=1}^N v^n \varphi^n(t) \right) w(t) dt = \\ &= - \frac{1}{k} \int_0^T \left[\sum_{n=1}^{N-1} v^n (\chi^{n-1} - \chi^n)(t) + v^N \chi^{N-1}(t) \right] w(t) dt \\ &= \frac{1}{k} \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} (v^{n+1} - v^n) \chi^n, w \right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n, w \right\rangle. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{H_T^{-1}(0, T; H)} &\leq C \left\| \sum_{n=1}^N v^n \varphi^n \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq \\ &\leq C k^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N \|v^n\|_H^2 \right)^{1/2} \leq C \|g'\|_{L^2(0, T; H)} \leq C \|f\|_{H_T^{-1}(0, T; H)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION II.10 : Il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout élément f de \mathcal{Y}_0 ,

$$\| \mathfrak{C}_{0\bar{h}} f \|_{\mathcal{X}_0} \leq C \| \mathfrak{C}_0 f \|_{\mathcal{X}_0}. \quad (\text{II.41})$$

Démonstration :

1° Dans la démonstration de la proposition II.8, on prouve que, si f appartient à $L^2(0, T; V')$,

$$k \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_V^2 \leq Ck \sum_{n=0}^{N-1} \| f^n \|_{V'}^2, \quad (\text{II.42})$$

ce qui implique toujours d'après (II.38)

$$k \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_V^2 \leq C \| f \|_{L^2(0, T; V')}^2.$$

Supposons maintenant f dans $H_T^{-1/2}(0, T; H)$. En choisissant $v_n = u^{n+1} - u^n$ dans (II.22), on a la majoration classique

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} \| u^{n+1} - u^n \|_H^2 + \left(\theta - \frac{1}{2} \right) a(u^{n+1} - u^n, u^{n+1} - u) + \\ + \frac{1}{2} a(u^{n+1}, u^{n+1}) - \frac{1}{2} a(u^n, u^n) \leq \\ \leq Ck \| f^n \|_H^2 + \frac{1}{2k} \| u^{n+1} - u^n \|_H^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.43})$$

En sommant sur n , on en déduit d'après (II.39)

$$k \sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_V^2 \leq C \| f \|_{H_T^{-1/2}(0, T; H)}^2. \quad (\text{II.44})$$

2° D'après (II.22) et la proposition II.4, on a en posant $u_{\bar{h}} = \mathfrak{C}_{0\bar{h}} f$

$$\begin{aligned} \| u_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_0} &\leq C \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{\mathcal{Y}_0} + \left\| u_{\bar{h}} - \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\theta} \chi^n \right\|_{L^2(0, T; V)} \right\} \\ &\leq C \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{N-1} f^n \chi^n \right\|_{\mathcal{Y}_0} + k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \| u^{n+1} - u^n \|_V^2 \right)^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

ce qui avec les résultats précédents entraîne la proposition II.10.

THÉORÈME II.5 : On suppose que $u = \mathcal{C}_0 f$ appartient à $H^1(0, T; V) \cap H^{3/2}(0, T; H)$. On a la majoration d'erreur

$$\|(\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_{0h})f\|_{x_0} \leq C \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{0\bar{h}}} \|u - v_{\bar{h}}\|_{x_0} + Ck \|u\|_{H^1(0, T; V) \cap H^{3/2}(0, T; H)}. \quad (\text{II.45})$$

Démonstration : On pose : $\tilde{u} = \sum_{n=1}^N \tilde{u}^n \varphi^n$, le coefficient \tilde{u}^0 étant nul et les coefficients \tilde{u}^{n+1} , $0 \leq n \leq N-1$, étant solutions dans V de (II.29). Comme dans la démonstration du théorème II.3, on prouve que

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{x_0} \leq C \|u - \tilde{u}\|_{x_0} + \inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{0\bar{h}}} \|u - v_{\bar{h}}\|_{x_0}.$$

Il reste à évaluer $\|u - \tilde{u}\|_{x_0}$. Si on pose : $U^n = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} u(t) dt$,

$$\|u - \tilde{u}\|_{x_0} \leq \left\| u - \sum_{n=1}^N U^n \varphi^n \right\|_{x_0} + \left\| \sum_{n=1}^N (\tilde{u}^n - U^n) \varphi^n \right\|_{x_0}.$$

1° D'après la théorie de l'interpolation classique,

$$\left\| u - \sum_{n=1}^N u(nk) \varphi^n \right\|_{x_0} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{x_0}.$$

D'autre part, si on pose : $\alpha^n = u(nk) - U^n$, on a

$$\|\alpha^n\|_V - \frac{1}{k} \left\| \int_{(n-1)k}^{nk} dt \int_{nk}^t \frac{du}{dt}(s) ds \right\|_V \leq Ck^{1/2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2((n-1)k, nk; V)}.$$

On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{L^2(0, T; V)} &\leq Ck^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N \|\alpha^n\|_V^2 \right)^{1/2} \\ &\leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V)}. \end{aligned}$$

Pour évaluer $\left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{H_0^{1/2}(0, T; H)}$, on procède par interpolation. Comme ci-dessus, on a

$$\left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{L^2(0, T; H)} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; H)}.$$

D'autre part,

$$\left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{H_0^1(0,T;H)} \leq k^{-1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\alpha^{n+1} - \alpha^n\|_H^2 \right)^{1/2},$$

avec la convention $\alpha^0 = 0$. Or, si u appartient à $H^2(0, T; H)$,

$$\begin{aligned} \|\alpha^{n+1} - \alpha^n\|_H &= \frac{1}{k} \left\| \int_{nk}^{(n+1)k} \left\{ (t - (n+1)k) \frac{du}{dt}((n+1)k) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{(n+1)k}^t (s - (n+1)k) \frac{d^2u}{dt^2}(s) ds \right\} dt \right. \\ &\quad \left. - \int_{(n-1)k}^{nk} \left\{ (t - nk) \frac{du}{dt}(nk) + \frac{1}{2} \int_{nk}^t (s - nk) \frac{d^2u}{dt^2}(s) ds \right\} dt \right\|_H \\ &\leq \frac{k}{2} \left\| \int_{nk}^{(n+1)k} \frac{d^2u}{dt^2}(s) ds \right\|_H + \\ &\quad \frac{1}{2k} \left\| \int_{nk}^{(n+1)k} dt \times \int_{(n+1)k}^t (s - (n+1)k) \frac{d^2u}{dt^2}(s) ds \right\|_H + \\ &\quad + \frac{1}{2k} \left\| \int_{(n-1)k}^{nk} dt \int_{nk}^t (s - nk) \frac{d^2u}{dt^2}(s) ds \right\|_H \\ &\leq Ck^{3/2} \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L^2((n-1)k, (n+1)k; H)}, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{H_0^1(0,T;H)} \leq Ck \left\| \frac{d^2u}{dt^2} \right\|_{L^2(0,T;H)}.$$

Par interpolation, on en déduit

$$\left\| \sum_{n=1}^N (u(nk) - U^n) \varphi^n \right\|_{H_0^{1/2}(0,T;H)} \leq Ck \|u\|_{H^{3/2}(0,T;H)}.$$

Finalement, en regroupant les majorations, on obtient

$$\left\| u - \sum_{n=1}^N U^n \varphi^n \right\|_{\mathcal{X}_0} \leq Ck \|u\|_{H^1(0,T;V) \cap H^{3/2}(0,T;H)}.$$

2° On pose : $e = \sum_{n=0}^N e^n \varphi^n = \sum_{n=0}^N (\tilde{u}^n - U^n) \varphi^n$, avec la convention $U^0 = 0$.

On a

$$\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n, v) + a(e^{n+\theta}, v) = (f^n, v) - \frac{1}{k}(U^{n+1} - U^n, v) - a((1 - \theta)U^n + \theta U^{n+1}, v).$$

Or, en multipliant l'équation (I.8) par $\frac{1}{k}v\varphi^n$ et en intégrant sur $(0, T)$, on obtient

$$\frac{1}{k}(U^{n+1} - U^n, v) + a\left(\frac{1}{k}\langle u, \varphi^n \rangle, v\right) = (f^n, v).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{k}(e^{n+1} - e^n, v) + a(e^{n+\theta}, v) = a\left(\frac{1}{k}\langle u, \varphi^n \rangle - (1 - \theta)U^n - \theta U^{n+1}, v\right).$$

Posons : $\varepsilon^n = \frac{1}{k}\langle u, \varphi^n \rangle - (1 - \theta)U^n - \theta U^{n+1}$. Le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition II.10 prouve que

$$\|e\|_{x_0} \leq Ck^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|_V^2 \right)^{1/2}.$$

Or, en utilisant la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^n\|_V &= \frac{1}{k} \left\| \int_{(n-1)k}^{nk} u(t) \frac{t - (n+\theta)k}{k} dt - \int_{nk}^{(n+1)k} u(t) \frac{t - (n+1-\theta)k}{k} dt \right\|_V \\ &\leq Ck^{1/2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2((n-1)k, (n+1)k; V)}. \end{aligned}$$

On obtient

$$k^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|_V^2 \right)^{1/2} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V)}.$$

La majoration (II.45) s'obtient en regroupant les résultats précédents.

Remarque II.6 : Par interpolation, on démontre que $u = \mathcal{C}_0 f$ appartient à $H^1(0, T; V) \cap H^{3/2}(0, T; H)$ dès que f appartient à \mathcal{X}_0 . On a en outre

$$\| \mathcal{C}_0 f \|_{H^1(0, T; V) \cap H^{3/2}(0, T; H)} \leq C \| f \|_{\mathcal{X}_0}. \quad (\text{II.46})$$

COROLLAIRE II.4 : *Sous l'hypothèse (II.9), la condition (H_A) est satisfaite.*

Compte tenu de la proposition II.10 et du théorème II.5, la démonstration est identique à celle du corollaire II.3.

On suppose maintenant que V est l'espace $H_0^m(\Omega)$ et que l'espace V_h est défini par (II.10).

THÉORÈME II.6 : *On suppose que $u = \mathcal{C}_0 f$ appartient à $\mathcal{X}_0(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$, et à $H^1(0, T; H_0^m(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; L^2(\Omega))$. On a la majoration d'erreur*

$$\| (\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_{0\bar{h}}) f \|_{\mathcal{X}_0} \leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_0(l)} + Ck \| u \|_{H^1(0, T; H_0^m(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (\text{II.47})$$

Démonstration : D'après le théorème II.5, il suffit d'évaluer $\inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{0\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_0}$.

On désigne par Q_k la projection dans l'espace $L^2(0, T)$ sur le sous-espace engendré par les φ^n , $1 \leq n \leq N$. D'après la théorie classique de l'interpolation,

$$\| u - Q_k u \|_{\mathcal{X}_0} \leq Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_0}.$$

D'autre part, on sait que :

$$\| Q_k \|_{\mathcal{L}(L^2(0, T); L^2(0, T))} \leq C \quad \text{et} \quad \| Q_k \|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(0, T); H^{1/2}(0, T))} \leq C,$$

ce qui entraîne

$$\| Q_k u \|_{\mathcal{X}_0(l)} \leq C \| u \|_{\mathcal{X}_0(l)}.$$

On choisit alors $v_{\bar{h}}(t)$ égal à l'interpolé classique dans V_h de $Q_k u(t)$ si $l \geq 1$ (cf. [8]) ou à l'interpolé dans V_h de $Q_k u(t)$ défini par régularisation locale si $l = 0$ (cf. [9], [4]) pour presque tout t dans $(0, T)$:

$$\| Q_k u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_0} \leq Ch^{l+m} \| Q_k u \|_{\mathcal{X}_0(l)} \leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_0(l)}.$$

On obtient

$$\inf_{v_{\bar{h}} \in \mathcal{X}_{0\bar{h}}} \| u - v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}_0} \leq Ch^{l+m} \| u \|_{\mathcal{X}_0(l)} + Ck \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{\mathcal{X}_0}. \quad (\text{II.48})$$

PROPOSITION II. 11 : *On se place dans le cas $m = 1$, pour un ouvert Ω convexe, la forme a étant définie par (II. 13). On a*

$$\| (\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_{0\bar{h}})f \|_{L^2(Q)} \leq C(h + k^{1/2}) \| \mathfrak{C}_0 f \|_{x_0}. \tag{II. 49}$$

Si on suppose en outre que $u = \mathfrak{C}_0 f$ appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, on a

$$\| (\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_{0\bar{h}})f \|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + k) \| u \|_{L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))}. \tag{II. 50}$$

Cette proposition se démontre par une méthode de dualité pratiquement identique à celle de la proposition II.9.

III. LE PROBLÈME PARABOLIQUE NON LINÉAIRE. EXEMPLES

III.1. Un résultat abstrait d'approximation

Nous allons approcher les solutions de l'équation non linéaire (I. 1) munie de l'une des conditions (I. 4); (I. 5) ou (I. 7). On pose

$$\begin{cases} G(\lambda, u) = g(\lambda, u) \text{ si (I. 1) est munie des conditions (I. 4) ou (I. 5)} \\ G(\lambda, u) = (g(\lambda, u), -u_0(\lambda)) \text{ si (I. 1) est munie de la condition (I. 7).} \end{cases}$$

Si \mathfrak{C} est l'isomorphisme de \mathcal{Y} sur \mathcal{X} introduit au paragraphe II, le problème (I. 1) muni de l'une des conditions (I. 4), (I. 5) ou (I. 7) est équivalent à

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{X} \text{ tel que} \\ u + \mathfrak{C}G(\lambda, u) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{III. 1}$$

On supposera que G est une application de classe \mathcal{C}^p ($p \geq 1$) de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ dans \mathcal{Y} . On supposera également ci-dessous qu'il existe un intervalle compact Λ dans \mathbb{R} et une branche $\{(\lambda, u(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ de solutions non singulières de (III. 1) au sens suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{(i) } \forall \lambda \in \Lambda, \quad u(\lambda) + \mathfrak{C}G(\lambda, u(\lambda)) = 0, \\ \text{(ii) } \forall \lambda \in \Lambda, \quad I + \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda)) \text{ est un isomorphisme de } \mathcal{X}. \end{aligned} \right\} \tag{III. 2}$$

Notons que, par le théorème des fonctions implicites, u est de classe \mathcal{C}^p de Λ dans \mathcal{X} .

Remarque III. 1 : Nous n'étudierons pas ici les cas où l'hypothèse (III. 2) (ii) n'est pas remplie. Ce sera l'objet d'un travail ultérieur. Rappelons que l'approximation d'une bifurcation de Hopf a été traitée dans [3].

On fera également l'hypothèse :

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad D_u G(\lambda, u(\lambda)) \text{ est un opérateur compact de } \mathcal{X} \text{ dans } \mathcal{Y}. \quad (\text{III.3})$$

La branche de solutions non singulières de (III.1) sera approchée de la manière suivante : pour chaque valeur d'un paramètre \bar{h} dans \mathbb{R}^d , $d = 1$ ou 2 , tendant vers 0 , on se donne un sous-espace fermé $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ de \mathcal{X} et un opérateur $\mathcal{C}_{\bar{h}}$ de \mathcal{Y} dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ approchant \mathcal{C} au sens suivant :

$$(H_A) \quad \forall F \in \mathcal{Y}, \quad \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \| (\mathcal{C} - \mathcal{C}_{\bar{h}}) F \|_{\mathcal{X}} = 0.$$

On introduit aussi une application $G_{\bar{h}}$ de classe \mathcal{C}^p de $\Lambda \times \mathcal{X}_{\bar{h}}$ dans \mathcal{Y} .

Le problème approché consiste alors à :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } (\lambda, u_{\bar{h}}) \in \Lambda \times \mathcal{X}_{\bar{h}} \text{ tel que } \\ u_{\bar{h}} + \mathcal{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}) = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{III.4})$$

Dans la suite, si $\bar{h}_1 = (h_1, k_1)$ et $\bar{h}_2 = (h_2, k_2)$ sont deux éléments de \mathbb{R}^2 , on dira que $\bar{h}_1 \geq \bar{h}_2$ si $h_1 \geq h_2$ et $k_1 \geq k_2$.

Pour nous permettre de démontrer l'existence d'une branche $\{(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ de solutions de (III.4) qui approche uniformément la branche de solutions non singulières de (III.1), nous ferons quelques hypothèses supplémentaires sur $G_{\bar{h}}$ et nous appliquerons [5, théorèmes 1 et 2].

THÉORÈME III.1 : *Outre l'hypothèse d'approximation (H_A) et les hypothèses (III.2), (III.3), supposons vérifiées les conditions suivantes :*

1° Il existe un opérateur linéaire continu $\mathcal{P}_{\bar{h}}$ de \mathcal{X} dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{X}, \quad \lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \| v - \mathcal{P}_{\bar{h}} v \|_{\mathcal{X}} = 0, \quad (\text{III.5})$$

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \text{Sup}_{\lambda \in \Lambda} \| G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - G(\lambda, u(\lambda)) \|_{\mathcal{Y}} = 0 \quad (\text{III.6})$$

et

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \text{Sup}_{\lambda \in \Lambda} \| DG_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - DG(\lambda, u(\lambda)) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathcal{X}_{\bar{h}}, \mathcal{Y})} = 0, \quad (\text{III.7})$$

2° Il existe $\alpha > 0$ et une fonction monotone croissante $L_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

$\forall \bar{h}, \forall \lambda_0 \in \Lambda, \forall (\lambda, v_{\bar{h}}) \in \Lambda \times \mathcal{X}_{\bar{h}}$ avec $|\lambda - \lambda_0| + \|v_{\bar{h}} - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0)\|_{\mathcal{X}} \leq \xi$, on ait

$$\left. \begin{array}{l} \| DG_{\bar{h}}(\lambda, v_{\bar{h}}) - DG_{\bar{h}}(\lambda_0, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0)) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathcal{X}_{\bar{h}}, \mathcal{Y})} \leq \\ \leq L_1(\xi) (|\lambda - \lambda_0|^\alpha + \|v_{\bar{h}} - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0)\|_{\mathcal{X}}^\alpha). \end{array} \right\} \quad (\text{III.8})$$

Alors, il existe un voisinage \mathcal{O} de l'origine dans \mathcal{X} , un élément \bar{h}_0 de \mathbb{R}^d et, pour $\bar{h} \leq \bar{h}_0$, une unique fonction $u_{\bar{h}}$ de classe \mathcal{C}^p de Λ dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \begin{cases} u_{\bar{h}}(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) = 0 \\ u_{\bar{h}}(\lambda) - u(\lambda) \in \mathcal{O}. \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

En outre, on a l'estimation d'erreur, pour tout λ dans Λ ,

$$\| u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda) \|_{\mathcal{X}} \leq C \left\{ \| u(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) \|_{\mathcal{X}} + \| \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - \mathfrak{C}G(\lambda, u(\lambda)) \|_{\mathcal{X}} \right\}. \quad (\text{III.10})$$

Démonstration : Dans la suite, on désignera par \bar{h}_0 un élément positif générique de \mathbb{R}^d . Le théorème III. 1 est une conséquence directe de [5, théorème 1]. Il nous reste donc à vérifier les hypothèses de ce théorème, c'est-à-dire à montrer qu'il existe $\bar{h}_0 > 0$, des constantes positives C , $\tilde{\alpha}$ et une fonction monotone croissante \tilde{L}_1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ telles que, pour $\bar{h} \leq \bar{h}_0$, on ait

$$\forall (\lambda, \lambda^*) \in \Lambda^2, \quad \| \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda^*) \|_{\mathcal{X}} \leq C | \lambda - \lambda^* |, \quad (\text{III.11})$$

$$\text{Sup}_{\lambda \in \Lambda} \| \mathfrak{C}_{\bar{h}} D_{\lambda} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) \|_{\mathcal{X}} \leq C, \quad (\text{III.12})$$

$$\text{Sup}_{\lambda \in \Lambda} \| [I + \mathfrak{C}_{\bar{h}} D_u G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda))]^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}_{\bar{h}}, \mathcal{X}_{\bar{h}})} \leq C, \quad (\text{III.13})$$

$$\left. \begin{aligned} \forall \lambda_0 \in \Lambda, \forall (\lambda, v_{\bar{h}}) \in \Lambda \times \mathcal{X}_{\bar{h}} \\ \text{avec } | \lambda - \lambda_0 | + \| v_{\bar{h}} - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0) \|_{\mathcal{X}} \leq \xi, \\ \| \mathfrak{C}_{\bar{h}} D G_{\bar{h}}(\lambda, v_{\bar{h}}) - \mathfrak{C}_{\bar{h}} D G_{\bar{h}}(\lambda_0, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0)) \|_{\mathcal{L}(\mathbb{R} \times \mathcal{X}_{\bar{h}}, \mathcal{X})} \leq \\ \leq \tilde{L}_1(\xi) (| \lambda - \lambda_0 |^{\tilde{\alpha}} + \| v_{\bar{h}} - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda_0) \|_{\mathcal{X}}^{\tilde{\alpha}}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.14})$$

et

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \text{Sup}_{\lambda \in \Lambda} \| \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) \|_{\mathcal{X}} = 0. \quad (\text{III.15})$$

• L'hypothèse (III.5) et le théorème de Banach-Steinhaus nous donnent l'existence d'une constante positive C telle que

$$\| \mathcal{P}_{\bar{h}} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})} \leq C.$$

On en déduit que, pour λ et λ^* dans Λ , on a

$$\| \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda^*) \|_{\mathcal{X}} \leq C \| u(\lambda) - u(\lambda^*) \|_{\mathcal{X}}.$$

Puisque u est de classe \mathcal{C}^1 et que Λ est compact, il existe alors une constante positive C telle que la condition (III.11) soit satisfaite.

• Grâce à l'hypothèse (H_A) et au théorème de Banach-Steinhaus, il existe

également, une constante positive C , telle que

$$\| \mathfrak{C}_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}(\mathcal{Q}, \mathcal{X})} \leq C. \quad (\text{III. 16})$$

La condition (III. 12) est alors une conséquence directe de (III. 7) et (III. 16).

- La condition (III. 14) découle de (III. 8) et (III. 16).
- On a

$$\begin{aligned} [I + \mathfrak{C}_{\bar{h}} D_u G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda))] v_{\bar{h}} &= [I + \mathfrak{C} D_u G(\lambda, u(\lambda))] v_{\bar{h}} \\ &- [(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda))] v_{\bar{h}} + [\mathfrak{C}_{\bar{h}}(D_u G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda)))] v_{\bar{h}}. \end{aligned}$$

Puisque $\{(\lambda, u(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ est une branche de solutions non singulières de (III. 1) et que Λ est compact, il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \| [I + \mathfrak{C} D_u G(\lambda, u(\lambda))] v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}} \geq C_0 \| v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{III. 17})$$

Des hypothèses (H_A) et (III. 3), on déduit qu'il existe \bar{h}_0 tel que, pour $\bar{h} \leq \bar{h}_0$, pour tout λ dans Λ ,

$$\| [(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda))] v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C_0}{4} \| v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{III. 18})$$

Enfin, grâce à l'hypothèse (III. 7) et à (III. 16), il existe \bar{h}_0 tel que, pour $\bar{h} \leq \bar{h}_0$, pour tout λ dans Λ , on ait

$$\| \mathfrak{C}_{\bar{h}} [D_u G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda))] v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}} \leq \frac{C_0}{4} \| v_{\bar{h}} \|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{III. 19})$$

De (III. 17), (III. 18) et (III. 19), on déduit la condition (III. 13).

• Finalement, il reste à remarquer que, à cause de la compacité de Λ , la condition (III. 15) découle immédiatement des hypothèses (III. 2) (i), (III. 5) et (III. 6).

On peut appliquer [5, théorème 1]; il existe alors une constante positive C_1 , un élément \bar{h}_0 de \mathbb{R}^d , et pour $\bar{h} \leq \bar{h}_0$ une unique fonction $u_{\bar{h}}$ de classe \mathcal{C}^p de Λ dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ vérifiant

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \begin{cases} u_{\bar{h}}(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) = 0 \\ \| u_{\bar{h}}(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) \|_{\mathcal{X}} \leq C_1. \end{cases}$$

De plus, on a, pour tout λ dans Λ ,

$$\| u_{\bar{h}}(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) \|_{\mathcal{X}} \leq C \| \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) \|_{\mathcal{X}} \quad (\text{III. 20})$$

où C est une constante positive.

L'estimation (III.10) est une conséquence évidente de (III.20).

Remarque III.2 : Le cas $G_{\bar{h}}$ non différentiable a été traité dans [12, théorème 2].

Remarque III.3 : Sous les hypothèses du théorème III.1, on a aussi la majoration

$$\left. \begin{aligned} \| u'(\lambda) - u_{\bar{h}}'(\lambda) \|_X &\leq C \left\{ \sum_{i=0}^1 \| u^{(i)}(\lambda) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u^{(i)}(\lambda) \|_X \right. \\ &+ \| \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - \mathfrak{C}G(\lambda, u(\lambda)) \|_X \\ &+ \| \mathfrak{C}_{\bar{h}} D_{\lambda} G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - \mathfrak{C}D_{\lambda} G(\lambda, u(\lambda)) \|_X \\ &\left. + \| [\mathfrak{C}_{\bar{h}} D_u G_{\bar{h}}(\lambda, \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\lambda)) - \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda))] \mathcal{P}_{\bar{h}} u'(\lambda) \|_X \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.21})$$

Si les dérivées $D^l G_{\bar{h}}$ vérifient des conditions de Hölder semblables à (III.8) pour $2 \leq l \leq p$, on obtient des estimations d'erreurs de $\| u^{(l)}(\lambda) - u_{\bar{h}}^{(l)}(\lambda) \|_X$ pour $2 \leq l \leq p$ qui généralisent les majorations (III.10) et (III.21).

Comme dans le cas linéaire, on espère obtenir une meilleure majoration d'erreur pour $\| u - u_{\bar{h}} \|_{L^2(0,T;H)}$. Dans ce but, on commence par démontrer le résultat général d'approximation suivant.

Soient \mathcal{X} et \mathcal{Y} des espaces de Banach tels que $\mathcal{X} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{Y}$. On suppose que :

pour tout élément v de \mathcal{X} , l'opérateur $D_u G(\lambda, v)$
se prolonge en un opérateur linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{Y} ; (III.22)

pour tout λ dans Λ , la solution $u(\lambda)$ appartient à \mathcal{K}
et l'opérateur $D_u G(\lambda, u(\lambda))$ est un opérateur compact de \mathcal{H} dans \mathcal{Y} ; (III.23)

l'application $(\lambda, v) \rightarrow D_u G(\lambda, v)$ est localement höldérienne
d'ordre β de \mathcal{X} dans $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. (III.24)

Remarquons qu'il découle de l'alternative de Fredholm et de l'hypothèse (III.23) que

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad I + \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda)) \quad \text{est un isomorphisme de } \mathcal{H}.$$

On a le :

THÉORÈME III.2 : *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème III.1 et les hypothèses (III.22) à (III.24). Alors il existe un élément $\bar{h}_1 > 0$ de \mathbb{R}^d tel*

que pour $\bar{h} \leq \text{Inf}(\bar{h}_0, \bar{h}_1)$, pour tout λ dans Λ , on ait

$$\begin{aligned} \|u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)\|_{\mathcal{H}} &\leq C \{ \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) G(\lambda, u(\lambda))\|_{\mathcal{H}} + \\ &\quad + \|\mathfrak{C}_{\bar{h}}[G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda))]\|_{\mathcal{H}} \quad \text{(III.25)} \\ &\quad + \|u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)\|_2^{\beta+1} \} \end{aligned}$$

où C est une constante positive indépendante de \bar{h} .

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) G(\lambda, u(\lambda)) &= -[u(\lambda) + \mathfrak{C}G(\lambda, u(\lambda))] + [u(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G(\lambda, u(\lambda))] \\ &= [u(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G(\lambda, u(\lambda))] - [u_{\bar{h}}(\lambda) + \mathfrak{C}_{\bar{h}} G_{\bar{h}}(\lambda, u(\lambda))] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) G(\lambda, u(\lambda)) &= [I + \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda))] (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) + \\ &\quad + (\mathfrak{C}_{\bar{h}} - \mathfrak{C}) D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) \\ &\quad + \mathfrak{C}_{\bar{h}}[G(\lambda, u(\lambda)) - G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda))] \\ &\quad + \mathfrak{C}_{\bar{h}}[G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda))] . \end{aligned} \quad \text{(III.26)}$$

1° On sait que $I + \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda))$ est un isomorphisme de \mathcal{H} , pour λ dans Λ ; par conséquent, puisque Λ est compact, il existe une constante positive C_0 telle que pour tout λ dans Λ ,

$$\|(I + \mathfrak{C}D_u G(\lambda, u(\lambda))) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda))\|_{\mathcal{H}} \geq C_0 \|u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)\|_{\mathcal{H}} . \quad \text{(III.27)}$$

2° D'autre part,

$$\begin{aligned} \|(\mathfrak{C}_{\bar{h}} - \mathfrak{C}) D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda))\|_{\mathcal{H}} &\leq \\ &\leq \|(\mathfrak{C}_{\bar{h}} - \mathfrak{C}) D_u G(\lambda, u(\lambda))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})} \|u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)\|_{\mathcal{H}} . \end{aligned}$$

Il suffit donc d'évaluer $\alpha_{\bar{h}}(\lambda) = \|(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda))\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})}$.

Soit B la boule unité de \mathcal{H} ; grâce à l'hypothèse (III.23),

$$B'(\lambda) = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda)) (B)$$

est relativement compacte dans \mathcal{H} et il existe un élément $y(\lambda)$ de $\overline{B'(\lambda)}$ tel que

$$\alpha_{\bar{h}}(\lambda) \leq \text{Sup}_{z \in \overline{B'(\lambda)}} \|z\|_{\mathcal{H}} = \|y(\lambda)\|_{\mathcal{H}} .$$

Soit ε un nombre réel, $0 < \varepsilon < C_0/2$; il existe un élément

$$z(\lambda) = (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda)) v$$

de $B'(\lambda)$, où v est un élément de B , tel que $\|y(\lambda) - z(\lambda)\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon/2$. On en

déduit :

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{h}}(\lambda) &\leq \| y(\lambda) - z(\lambda) \|_{\mathcal{X}} + C \| z(\lambda) \|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + C \| (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) D_u G(\lambda, u(\lambda)) \cdot v \|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'approximation (H_A) et la compacité de Λ , il existe \bar{h}_1 tel que, pour $\bar{h} \leq \bar{h}_1$, on ait

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_{\bar{h}}(\lambda) \leq \varepsilon.$$

De (III.26) et (III.27), on déduit que pour λ dans Λ , pour $\bar{h} \leq \bar{h}_1$, on a

$$\left. \begin{aligned} (C_0 - \varepsilon) \| u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda) \|_{\mathcal{X}} &\leq \| (\mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{\bar{h}}) G(\lambda, u(\lambda)) \|_{\mathcal{X}} + \\ &+ \| \mathfrak{C}_{\bar{h}}[G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - G_{\bar{h}}(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda))] \|_{\mathcal{X}} \\ &+ C \| G(\lambda, u(\lambda)) - G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) \|_{\mathcal{Y}} \end{aligned} \right\} \text{(III.28)}$$

où C est la constante donnée dans (III.16).

3° Comme l'application G est de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} , on a :

$$\begin{aligned} &\| G(\lambda, u(\lambda)) - G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) \|_{\mathcal{Y}} \leq \\ &\leq \left\| \int_0^1 [D_u G(\lambda, u(\lambda) + \theta(u_{\bar{h}}(\lambda) - u(\lambda))) - D_u G(\lambda, u(\lambda))] (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) d\theta \right\|_{\mathcal{Y}} \\ &\leq \int_0^1 \| D_u G(\lambda, u(\lambda) + \theta(u_{\bar{h}}(\lambda) - u(\lambda))) - D_u G(\lambda, u(\lambda)) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} d\theta \| u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda) \|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(\lambda, v) \rightarrow D_u G(\lambda, v)$ est höldérienne d'ordre β , on obtient, pour tout λ dans Λ ,

$$\left. \begin{aligned} \| G(\lambda, u(\lambda)) - G(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)) - D_u G(\lambda, u(\lambda)) (u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda)) \|_{\mathcal{Y}} &\leq \\ &\leq C \| u(\lambda) - u_{\bar{h}}(\lambda) \|_{\mathcal{X}}^{\beta+1} \end{aligned} \right\} \text{(III.29)}$$

où C est une constante positive indépendante de \bar{h} .

Les majorations (III.28) et (III.29) nous donnent le théorème.

Remarque III.4 : Dans le cas où $G_{\bar{h}}(\lambda, v) = G(\lambda, v)$ dans $\Lambda \times \mathcal{X}$, le théorème III.1 a un énoncé plus simple et peut être remplacé par [6, théorème 1]. En particulier, les hypothèses (III.5) à (III.7) peuvent être supprimées et l'hypothèse (III.8) revient à supposer que DG est localement höldérienne.

Nous allons donner des exemples où ces théorèmes s'appliquent.

III.2. Exemples de non-linéarités

On donnera ici des exemples d'applications G de classe \mathcal{C}^p ($p \geq 1$) de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ dans \mathcal{Y} telles que, pour tout couple (λ, u) de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$, $D_u G(\lambda, u)$ soit un opérateur compact de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} . Si p est égal à 1, on montrera qu'il existe un nombre réel α , $0 < \alpha \leq 1$, tel que l'application $(\lambda, v) \rightarrow DG(\lambda, v)$ soit localement höldérienne d'ordre α . Dans le cas où $G_{\bar{h}} = G$ — ceci se produit surtout dans le cas d'une semi-discrétisation en espace — sous les hypothèses (III.2), (III.3) et sous l'hypothèse d'approximation (H_A) , on obtient alors l'existence d'une branche $\{(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ de solutions de (III.4) et des majorations d'erreurs entre les branches $\{(\lambda, u(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$ et $\{(\lambda, u_{\bar{h}}(\lambda)); \lambda \in \Lambda\}$. L'hypothèse (H_A) a été étudiée en détail dans le paragraphe II.

Comme dans le paragraphe II, on choisit pour V l'espace $H_0^m(\Omega)$, $m = 1$ ou 2, et pour H l'espace $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^D , $D = 1, 2$ ou 3. Et on pose maintenant : $\tilde{\mathcal{Y}}_1 = L^2(0, T; V')$ si $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$ et $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}$ si $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0$ ou $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\#}$.

On choisit G sous la forme $G(\lambda, u) = (g(\lambda, u), -u_0(\lambda))$ si $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1$ et $G(\lambda, u) = g(\lambda, u)$ sinon, où u_0 est une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de Λ dans H avec $0 < \alpha \leq 1$. On se contentera d'étudier les propriétés de la fonction g de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans $\tilde{\mathcal{Y}}$.

Exemple III.1 : On pose $g(\lambda, u) = a(\lambda) Lu$ où la fonction a est de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de Λ dans \mathbb{R} avec $0 < \alpha \leq 1$ et où L est un opérateur linéaire compact de \mathcal{X} dans $\tilde{\mathcal{Y}}$. On vérifie immédiatement que l'application G ainsi définie est une application compacte, de classe $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ dans $\tilde{\mathcal{Y}}$.

Exemple III.2 : On choisit $m = 1$ et

$$g(\lambda, u) = \psi(x, \lambda, u)$$

où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} vérifiant, $\forall (x, \lambda, y) \in \bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$,

$$|\psi(x, \lambda, y)| \leq C |y|^\rho, \quad (\text{III.30})$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(x, \lambda, y) \right| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \lambda, y) \right| \leq C |y|^{\rho-1} \quad (\text{III.31})$$

$$\left. \begin{aligned} \forall (\lambda^*, y^*) \in \Lambda \times \mathbb{R}, \\ \left| \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(x, \lambda, y) - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(x, \lambda^*, y^*) \right| + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \lambda, y) - \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, \lambda^*, y^*) \right| \\ \leq C(|\lambda - \lambda^*|^\alpha + |y - y^*| \text{Inf}(1, \rho - 1)), \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.32})$$

où α et ρ vérifient : $0 < \alpha \leq 1$, $\rho > 1$.

$g(\lambda, u) = |u|^{\rho-1} u$ est un cas particulier de cet exemple.

PROPOSITION III.1 : *On suppose $1 < \rho < 1 + \frac{4}{D}$ dans les cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\#$ et $1 < \rho < \text{Inf}\left(1 + \frac{4}{D}, 4\right)$ dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$. Alors g est de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{X} dans $\tilde{\mathcal{Y}}$, $D_u g$ est un opérateur linéaire compact de \mathcal{X} dans $\tilde{\mathcal{Y}}$ et l'application $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est localement höldérienne d'ordre*

$$\leq \text{Inf}(\alpha, \rho - 1)$$

de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{L}(\Lambda \times \mathcal{X}, \tilde{\mathcal{Y}})$.

Démonstration : Rappelons d'abord quelques propriétés d'inclusion classiques.

1° En utilisant la théorie de l'interpolation, on obtient les inclusions continues

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow H^\gamma(0, T; H^{1-2\gamma}(\Omega)) \\ \text{pour } 0 \leq \gamma \leq 1, \\ \text{et} \\ \text{(ii)} \quad L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^{1/2}(0, T; L^2(\Omega)) \hookrightarrow H^\gamma(0, T; H^{1-2\gamma}(\Omega)) \\ \text{pour } 0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right\} \text{(III.33)}$$

D'après les propriétés d'injection de Sobolev, on a aussi l'inclusion continue

$$\begin{aligned} H^\gamma(0, T; H^{1-2\gamma}(\Omega)) &\hookrightarrow L^{\frac{2}{1-2\gamma}}(0, T; L^{\frac{2D}{D-2(1-2\gamma)}}(\Omega)) \\ \text{pour } 0 < 1 - 2\gamma < \frac{D}{2} \text{ et } 1 - 2\gamma \leq 1. \end{aligned} \quad \text{(III.34)}$$

2° Des inclusions (III.33) et (III.34) et de la propriété (III.30), on déduit que si u est un élément de \mathcal{X}_1 , $g(\lambda, u)$ appartient à l'espace $L^{\frac{2}{s}}(0, T; L^{\frac{2D}{D\rho-2s}}(\Omega))$ où $0 < s < \frac{D}{2}\rho$ et $s \leq \rho$.

Donc, une condition suffisante pour que $g(\lambda, u)$ appartienne à $\tilde{\mathcal{Y}}_1$ est qu'il existe s avec $s \leq \rho$, $0 < s < \frac{D}{2}\rho$ tel que l'on ait l'inclusion :

$$L^{\frac{2}{s}}(0, T; L^{\frac{2D}{D\rho-2s}}(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Cette condition est remplie dès que

$$1 < \rho < 1 + \frac{4}{D} \text{ dans les cas } D = 2 \text{ et } D = 3$$

et

$$1 < \rho \leq 4 \quad \text{si } D = 1.$$

3° De (III.33) (ii) et (III.34), on déduit l'inclusion continue

$$\mathcal{X} \subset L^{\frac{2}{1-2\gamma}}(0, T; L^{\frac{2D}{D-2(1-2\gamma)}}(\Omega)) \quad \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_T \quad \text{ou } \mathcal{X} = \mathcal{X}_{\#}. \quad (\text{III.35})$$

Par passage aux espaces duaux, il découle de (III.35) l'inclusion suivante :

$$L^{\frac{2}{1+2\gamma'}}(0, T; L^{\frac{2D}{D+2(1-2\gamma')}}(\Omega)) \subset \mathcal{Y} \quad \text{dans les cas } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \quad \text{et } \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{\#}. \quad (\text{III.36})$$

Donc une condition suffisante pour que $g(\lambda, u)$ appartienne à \mathcal{Y}_0 (resp. $\mathcal{Y}_{\#}$) est qu'il existe s et γ' avec $0 < 1 - 2\gamma' < \frac{D}{2}$, $1 - 2\gamma' \leq 1$, $s < \rho$, $0 < s < \frac{D}{2}\rho$ tels que l'on ait l'inclusion

$$L^{\frac{2}{s}}(0, T; L^{\frac{2D}{D\rho-2s}}(\Omega)) \subset L^{\frac{2}{1+2\gamma'}}(0, T; L^{\frac{2D}{D+2(1-2\gamma')}}(\Omega))$$

i.e. tels que l'on ait les inégalités

$$\frac{2}{s} \geq \frac{2}{1+2\gamma'} \quad \text{et} \quad \frac{2D}{D\rho-2s} \geq \frac{2D}{D+2(1-2\gamma')}.$$

Cette condition est remplie si

$$1 < \rho \leq 1 + \frac{4}{D}.$$

4° On a : $D_u g(\lambda, u) v = D_y \psi(x, \lambda, u) v$. En procédant comme ci-dessus, on montre que $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est une application continue de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{L}(\Lambda \times \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ si la condition

$$1 < \rho \leq \inf\left(1 + \frac{4}{D}, 4\right) \quad \left(\text{resp. } 1 < \rho \leq 1 + \frac{4}{D}\right)$$

est remplie dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ (resp. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ ou $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\#}$).

De l'hypothèse (III.32), on déduit immédiatement que l'application $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est hédérienne d'ordre $\leq \inf(\alpha, \rho - 1)$ de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{L}(\Lambda \times \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sous les conditions ci-dessus.

5° Finalement, en procédant comme aux étapes 2° et 3°, et en utilisant, par exemple, [16, chap. III, théorème 2.2], on montre que $D_u g$ est un opéra-

teur linéaire compact de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} si $1 < \rho < \text{Inf} \left(1 + \frac{4}{D}, 4 \right)$ dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_I$ et si $1 < \rho < 1 + \frac{4}{D}$ dans les cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\#$.

Exemple III.3 : On choisit $m = 1$ et

$$g(\lambda, u) = \psi(x, \lambda, \nabla u)$$

où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}^D$ dans \mathbb{R} vérifiant, pour tout (x, λ, y) de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}^D$, les hypothèses (III.30), (III.31) et (III.32) et où ∇u désigne le gradient de u .

$$g(\lambda, u) = \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \text{ est un cas particulier de cet exemple.}$$

PROPOSITION III.2 : *On suppose $1 < \rho < 1 + \frac{2}{D+2}$ dans les cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\#$. Alors g est de classe \mathcal{C}^1 de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} , $D_u g$ est un opérateur linéaire compact de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} et l'application $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est localement höldérienne d'ordre $\leq \text{Inf}(\alpha, \rho - 1)$ de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans $\mathcal{L}(\Lambda \times \mathcal{X}, \mathcal{Y})$.*

Démonstration :

1° Si u est dans \mathcal{X}_0 ou $\mathcal{X}_\#$, $g(\lambda, u)$ est un élément de $L^{\frac{2}{p}}(0, T; L^{\frac{2}{p}}(\Omega))$. Donc pour que $g(\lambda, u)$ appartienne à \mathcal{Y}_0 ou $\mathcal{Y}_\#$ il suffit, d'après la propriété (III.30), qu'il existe un nombre réel γ' , avec $0 < 1 - 2\gamma' < \frac{D}{2}$ et $1 - 2\gamma' \leq 1$ tel que l'on ait l'inclusion continue

$$L^{\frac{2}{p}}(0, T; L^{\frac{2}{p}}(\Omega)) \hookrightarrow L^{\frac{2}{1+2\gamma'}}(0, T; L^{\frac{2D}{D+2(1-2\gamma')}}(\Omega)).$$

On montre comme dans la démonstration de la proposition III.1 que cette dernière condition est vérifiée si $\rho \leq 1 + \frac{2}{D+2}$.

2° On a :

$$D_u g(\lambda, u) v = D_y \psi(x, \lambda, \nabla u) \nabla v.$$

En utilisant [16, chap. III, théorème 2.2] et [13, théorème 1.4.4.2], on montre que $D_u g$ est un opérateur linéaire compact de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} dans les cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\#$ si $1 < \rho < 1 + \frac{2}{D+2}$.

Exemple III.4 : On choisit $m = 1$, $D = 1$ et

$$g(\lambda, u) = \psi(x, \lambda, u) \frac{\partial u}{\partial x},$$

où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} vérifiant pour tout (x, λ, y) de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$ les hypothèses (III.30), (III.31) et (III.32).

$$g(\lambda, u) = |u|^\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{est un cas particulier de cet exemple.}$$

PROPOSITION III.3 : *On suppose $1 < \rho < 2$. Alors l'application g est de classe \mathcal{C}^1 de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans \mathcal{Y} et l'application $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est localement höldérienne d'ordre $\leq \text{Inf}(\alpha, \rho - 1)$ de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} .*

Démonstration : Cette proposition se démontre en utilisant [13, théorème 1.4.4.2] et des arguments analogues à ceux des propositions III.1 et III.2.

Exemple III.5 : On choisit maintenant $m = 2$. Les non-linéarités g étudiées dans les exemples III.2 à III.4 conviennent encore. Bien mieux, les propositions III.1 à III.3 restent vraies avec des meilleures majorations pour ρ . Nous ne donnerons pas ces majorations.

On choisit :

$$g(\lambda, u) = \psi(x, \lambda, u) \Delta u$$

où ψ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} vérifiant pour tout (x, λ, y) de $\bar{\Omega} \times \Lambda \times \mathbb{R}$ les hypothèses (III.30), (III.31) et (III.32).

$$g(\lambda, u) = |u|^\rho \Delta u \quad \text{est un cas particulier de cet exemple.}$$

PROPOSITION III.4 : *On suppose $1 < \rho < 4/D$. Alors l'application g est de classe \mathcal{C}^1 de $\Lambda \times \mathcal{X}$ dans \mathcal{Y} , $D_u g$ est un opérateur linéaire compact de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} et l'application $(\lambda, u) \rightarrow Dg(\lambda, u)$ est localement höldérienne d'ordre $\leq \text{Inf}(\alpha, \rho - 1)$ de \mathcal{X} dans \mathcal{Y} .*

Démonstration : Elle est analogue à celle des propositions III.1 et III.2 et elle utilise [13, théorème 1.4.4.2].

III.3. Un exemple de discrétisation totale

On donnera ci-dessous, dans les cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$, un exemple où G et $G_{\bar{\Gamma}}$ sont distinctes et où les hypothèses du théorème III.1 sont satisfaites.

On choisit pour V l'espace $H_0^1(\Omega)$ et pour H l'espace $L^2(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^D , $D = 1, 2$ ou 3 . On pose

$$g(v) = |v|^\sigma v$$

où

$$0 < \sigma < \inf\left(\frac{4}{D}, 3\right) \left(\text{resp. } 0 < \sigma < \frac{4}{D}\right) \text{ si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_I \text{ (resp. } \mathcal{X} = \mathcal{X}_0).$$

Pour simplifier, on choisira pour $u_0(\lambda)$ une fonction constante égale à un élément u_0 de H .

Rappelons que u désigne alors une solution de l'équation

$$(i) \quad \frac{du}{dt} + Au + |u|^\sigma u = 0 \quad (\text{III.37})$$

munie de la condition

$$(ii) \quad \begin{cases} u(0) = u_0 & \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_I \\ u(0) = 0 & \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_0. \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

On supposera que u est une solution non singulière de (III.37), c'est-à-dire que u vérifie les hypothèses (III.2).

Rappelons aussi que si $\bar{h} = (h, k)$, on définit l'espace d'approximation $\mathcal{X}_{I\bar{h}}$ (resp. $\mathcal{X}_{0\bar{h}}$) par

$$\mathcal{X}_{I\bar{h}} = \left\{ v_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N v^n \varphi^n; v^n \in V_h \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{X}_{0\bar{h}} = \left\{ v_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N v^n \varphi^n; v^0 = 0, v^n \in V_h \right\} \right)$$

où V_h est donné par (II.10), où les fonctions φ^n , $0 \leq n \leq N$, sont définies au début de l'exemple II.2.

On supposera, dans la suite, que dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_I$, l'hypothèse (II.6) est satisfaite. On déduit donc des corollaires II.3 et II.4 que la condition (H_A) est satisfaite.

Dans cet exemple-ci, définir une fonction $G_{\bar{h}}$ sur $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ consiste à définir une fonction $g_{\bar{h}}$ sur $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ qui est un « analogue discret » de la fonction g . On pose :

$$g_{\bar{h}}(v_{\bar{h}}) = \sum_{n=0}^{N-1} |v^n|^\sigma v^{n+1} \chi^n$$

où les fonctions χ^n sont définies au début de l'exemple II.2. Rappelons que

la solution du problème (III.4) $u_{\bar{h}}$ s'écrit alors

$$u_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N u^n \varphi^n$$

le coefficient u^0 étant défini dans V_h par

$$(i) \quad \begin{cases} \forall v_h \in V_h, & (u^0, v_h) + ka(u^0, v_h) = (u_0, v_h) \quad \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_I \\ \text{et } u^0 = 0 & \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \end{cases} \quad (III.38)$$

et les coefficients u^{n+1} , $0 \leq n \leq N - 1$, étant solutions dans V_h de

$$(ii) \quad \begin{cases} \forall v_h \in V_h, & \frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n, v_h) + a(u^{n+\theta}, v_h) + (|u^n|^\sigma u^{n+1}, v_h) = 0 \\ & \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_I \\ \text{et} & \\ \forall v_h \in V_h, & \frac{1}{k}(u^{n+1} - u^n, v_h) + a(u^{n+\theta}, v_h) + \\ & + \frac{1}{2}(|u^{n-1}|^\sigma u^n + |u^n|^\sigma u^{n+1}, v_h) = 0 \quad \text{si } \mathcal{X} = \mathcal{X}_0. \end{cases} \quad (III.38)$$

Remarquons que si $v_{\bar{h}}$ est dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$, $g_{\bar{h}}(v_{\bar{h}})$ est bien un élément de \mathcal{Y} .

Grâce à l'équivalence des normes en dimension finie et aux inclusions données dans la démonstration de la proposition III.1, on montre facilement que $g_{\bar{h}}$ est de classe \mathcal{C}^0 de $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ dans \mathcal{Y} et, si $\sigma > 1$, que $g_{\bar{h}}$ est de classe \mathcal{C}^1 de $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ dans \mathcal{Y} , de différentielle

$$Dg_{\bar{h}}(v_{\bar{h}}) w_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^{N-1} (|v^n|^\sigma w^{n+1} \chi^n + \sigma |v^n|^{\sigma-2} v^n v^{n+1} w^n \chi^n),$$

où
$$w_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N w^n \varphi^n.$$

Si $\sigma \leq 1$, $g_{\bar{h}}$ n'est plus de classe \mathcal{C}^1 et il faut appliquer [12, théorème 2]. Nous n'étudierons ici que le cas $\sigma > 1$. Auparavant, nous donnons le :

LEMME III.1 : *Soit W un espace de Hilbert de norme $\| \cdot \|_W$ et de produit scalaire associé $((\cdot, \cdot))_W$ tel que V_h soit inclus dans W . Pour tout élément $v_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^N v^n \varphi^n$ dans $\mathcal{X}_{\bar{h}}$, pour tout entier j , $0 \leq j \leq N$, et tout élément $p \in [2, +\infty[$, on a*

$$k^{1/p} \left(\sum_{n=0}^j \|v^n\|_W^p \right)^{1/p} \leq C \|v_{\bar{h}}\|_{L^p(0, jk; W)}. \quad (III.39)$$

Démonstration : Supposons j fixé. On commence par démontrer (III.39) pour $p = 2$ et $p = \infty$.

• Cas $p = 2$:

On a

$$\begin{aligned} \|v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,jk,W)}^2 &= \sum_{n=0}^{j-1} \int_{nk}^{(n+1)k} \left\| \frac{v^{n+1} - v^n}{k} (t - nk) + v^n \right\|_W^2 dt \\ &= k \sum_{n=0}^{j-1} \left(\frac{1}{3} \|v^{n+1} - v^n\|_W^2 + \|v^n\|_W^2 + ((v^{n+1} - v^n, v^n))_W \right), \end{aligned}$$

or

$$((v^{n+1} - v^n, v^n))_W \leq \frac{1}{3} \|v^{n+1} - v^n\|_W^2 + \frac{3}{4} \|v^n\|_W^2,$$

d'où

$$\|v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,jk,W)}^2 \geq \frac{k}{4} \sum_{n=0}^{j-1} \|v^n\|_W^2. \quad (\text{III.40})$$

Remarquons que l'inégalité

$$\|v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,jk,W)}^2 \geq \frac{k}{4} \sum_{n=0}^{j-1} \|v^n\|_W^2$$

est symétrique de (III.40).

D'où, finalement,

$$\|v_{\bar{h}}\|_{L^2(0,jk,W)}^2 \geq \frac{k}{8} \sum_{n=0}^j \|v^n\|_W^2.$$

• Cas $p = \infty$: Il est clair que

$$\sup_{0 \leq n \leq j} \|v^n\|_W \leq \|v_{\bar{h}}\|_{L^\infty(0,jk,W)}.$$

On obtient alors la majoration (III.39) pour tout p , $2 \leq p \leq +\infty$, par un argument d'interpolation.

Maintenant nous allons démontrer que, pour $\sigma > 1$, les hypothèses du théorème III.1 sont vérifiées.

Soit $\mathcal{P}_{\bar{h}}$ l'opérateur de projection de \mathcal{X} sur $\mathcal{X}_{\bar{h}}$. On démontre alors, par un argument de densité et en utilisant les propriétés (II.33) et (II.48), que, pour tout élément v de \mathcal{X} , l'hypothèse (III.5) est satisfaite. De plus, pour tout élément v de \mathcal{X} , on a :

$$\|\mathcal{P}_{\bar{h}} v\|_{\mathcal{X}} \leq \|v\|_{\mathcal{X}}. \quad (\text{III.41})$$

En procédant comme dans la démonstration de la proposition III.1, on montre qu'il existe un nombre réel γ_0 (resp. γ_I) avec $1 - 2\gamma_0 \leq 1$, $0 < 1 - 2\gamma_0 < D/2$, (resp. $1 - 2\gamma_I \leq 1$, $0 < 1 - 2\gamma_I < D/2$) tel que g soit de classe \mathcal{C}^1 de $L^{\frac{2}{1-2\gamma_0}}(0, T; L^{\frac{2D}{D-2(1-2\gamma_0)}}(\Omega))$ dans \mathcal{Y}_0 (resp. de $L^{\frac{2}{1-2\gamma_I}}(0, T; L^{\frac{2D}{D-2(1-2\gamma_I)}}(\Omega))$ dans \mathcal{Y}_I).

On fixera dans la suite de tels nombres réels γ_0 et γ_I et on les notera tous les deux γ pour simplifier. On posera aussi $q = \frac{2}{1-2\gamma}$ et $r = \frac{2D}{D-2(1-2\gamma)}$.

Montrons maintenant que l'hypothèse (III.6) est vérifiée. On a :

$$\|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(u)\|_{\mathcal{G}} \leq \|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{G}} + \|g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(u)\|_{\mathcal{G}}.$$

Or $\|g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(u)\|_{\mathcal{G}} \leq C(u) \|u - \mathcal{P}_{\bar{h}} u\|_{\mathcal{G}}$ où $C(u)$ est une constante ne dépendant que de u .

Grâce à la propriété (III.5) et aux deux inégalités ci-dessus, il nous reste à montrer que

$$\lim_{\bar{h} \rightarrow 0} \|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{G}} = 0. \tag{III.42}$$

Si $\mathcal{P}_{\bar{h}} u = \sum_{n=0}^N u_h^n \varphi^n$, introduisons l'élément $\tilde{u}_{\bar{h}} = \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n \chi^n$. On a :

$$\|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{G}} \leq \|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\tilde{u}_{\bar{h}})\|_{\mathcal{G}} + \|g(\tilde{u}_{\bar{h}}) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{G}}. \tag{III.43}$$

Or

$$\|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\tilde{u}_{\bar{h}})\|_{\mathcal{G}} = \left\| \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^n|^\sigma (u_h^{n+1} - u_h^n) \chi^n \right\|_{\mathcal{G}},$$

d'où, comme dans la démonstration de la proposition III.1,

$$\begin{aligned} \|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\tilde{u}_{\bar{h}})\|_{\mathcal{G}} &\leq C \left\| \sum_{n=0}^{N-1} u_h^n \chi^n \right\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}^\sigma \times \\ &\times \left\| \sum_{n=0}^{N-1} (u_h^{n+1} - u_h^n) \chi^n \right\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}. \end{aligned} \tag{III.44}$$

D'après la forme de g , on obtient, d'autre part,

$$\begin{aligned} \|g(\tilde{u}_{\bar{h}}) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{G}} &\leq C \text{Sup} (\|\mathcal{P}_{\bar{h}} u\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}^\sigma, \|\tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}) \times \\ &\times \|\mathcal{P}_{\bar{h}} u - \tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}. \end{aligned} \tag{III.45}$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\begin{aligned} \text{Sup} \left(\|\mathcal{P}_{\bar{h}} u - \tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}, \left\| \sum_{n=0}^{N-1} (u_h^{n+1} - u_h^n) \chi^n \right\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} \right) &\leq \\ &\leq Ck^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^r(\Omega)}^q \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{III.46}$$

D'après les majorations (III.43) à (III.46), il nous reste à montrer que $\|\tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))}$ est borné et que $k^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^r(\Omega)}^q \right)^{1/q}$ converge vers 0 quand \bar{h} tend vers 0.

Rappelons que, d'après (III.34), on a l'injection continue

$$H^{1-2\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega).$$

En tenant compte de cette inclusion et de (III.41), on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} &\leq Ck^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_{H^{1-2\gamma}(\Omega)}^q \right)^{1/q}, \\ \|\tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} &\leq C \|\mathcal{P}_{\bar{h}} u\|_{L^q(0,T;H^{1-2\gamma}(\Omega))}, \end{aligned}$$

d'où, enfin.

$$\|\tilde{u}_{\bar{h}}\|_{L^q(0,T;L^r(\Omega))} \leq C \|\mathcal{P}_{\bar{h}} u\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}}. \tag{III.47}$$

D'après le lemme III.1, on a

$$\begin{aligned} k^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^r(\Omega)}^q \right)^{1/q} &\leq C_q \left(\left\| \sum_{n=0}^{[N/2]} (u_h^{n+1} - u_h^n) \varphi^n \right\|_{L^q(0,[N/2]k;H^{1-2\gamma}(\Omega))} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{[N/2]+1}^N (u_h^n - u_h^{n-1}) \varphi^n \right\|_{L^q([N/2]k,T;H^{1-2\gamma}(\Omega))} \right) \end{aligned}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} k^{1/q} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^r(\Omega)}^q \right)^{1/q} &\leq \\ &C \left(\|\mathcal{P}_{\bar{h}} u(\cdot + k) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\cdot)\|_{L^q(0,2T/3;H^{1-2\gamma}(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathcal{P}_{\bar{h}} u(\cdot) - \mathcal{P}_{\bar{h}} u(\cdot - k)\|_{L^q(T/3,T;H^{1-2\gamma}(\Omega))} \right). \end{aligned} \right\} \tag{III.48}$$

Finalement, on déduit des majorations (III.43) à (III.48), l'inégalité

$$\left. \begin{aligned} \|g_{\bar{h}}(\mathcal{P}_{\bar{h}} u) - g(\mathcal{P}_{\bar{h}} u)\|_{\mathcal{D}} &\leq C \text{Sup} (1, \|u\|_{\mathcal{X}}, \|u\|_{\mathcal{X}}^{\sigma}) (\|u - \mathcal{P}_{\bar{h}} u\|_{\mathcal{X}} + \\ &+ \|u(\cdot + k) - u(\cdot)\|_{L^q(0, 2T/3; H^{1-2\gamma}(\Omega))} \\ &+ \|u(\cdot) - u(\cdot - k)\|_{L^q(T/3, T; H^{1-2\gamma}(\Omega))}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.49})$$

Grâce à la densité de $\mathcal{D}([0, T] \times \bar{\Omega})$ dans $L^q(0, T; H^{1-2\gamma}(\Omega))$, on montre que les deux derniers termes du membre de droite de (III.49) convergent vers 0 quand k tend vers 0. L'hypothèse (III.6) est donc vérifiée.

Pour démontrer les hypothèses (III.7) et (III.8), on utilise les mêmes techniques que dans la démonstration de l'hypothèse (III.6) et un argument de compacité.

Du théorème III.1 et des théorèmes II.4 et II.6, on déduit une majoration d'erreur pour $\|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}}$.

PROPOSITION III.5 :

1° Si u appartient à $\mathcal{X}_l(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$, et à $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et si $Au(0)$ appartient à $L^2(\Omega)$, sous l'hypothèse (II.6), on a la majoration d'erreur

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_l} \leq C(\|u\|_{\mathcal{X}_l}) \{ h^{l+1} \|u\|_{\mathcal{X}_l(l)} + k(\|u\|_{H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} + \|Au(0)\|_{0, \Omega}) \}, \quad (\text{III.50})$$

2° Si u appartient à $\mathcal{X}_0(l)$ pour un entier l , $0 \leq l \leq q$, et à $H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; L^2(\Omega))$, on a la majoration d'erreur

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{\mathcal{X}_0} \leq C(\|u\|_{\mathcal{X}_0}) \{ h^{l+1} \|u\|_{\mathcal{X}_0(l)} + k \|u\|_{H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; L^2(\Omega))} \}, \quad (\text{III.51})$$

où $C(\|u\|_{\mathcal{X}})$ est une constante ne dépendant que de $\|u\|_{\mathcal{X}}$.

Sous des hypothèses de régularité plus faibles, on déduit des propositions II.9 et II.11 et du théorème III.2 une majoration d'erreur pour $\|u - u_{\bar{h}}\|_{L^2(Q)}$.

PROPOSITION III.6 : On suppose l'ouvert Ω convexe, la forme a étant définie par (II.13).

1° Dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_l$, si u appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^{3/2}(0, T; H^{-1}(\Omega))$,

sous l'hypothèse (II.6), on a la majoration d'erreur

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + k), \quad (\text{III.52})$$

2° Dans le cas $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0$, si u appartient à $L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, on a la majoration d'erreur

$$\|u - u_{\bar{h}}\|_{L^2(Q)} \leq C(h^2 + k), \quad (\text{III.53})$$

où C est une constante ne dépendant que de u .

Remarque III.5 : On peut traiter de la même façon les non-linéarités

$$g(v) = \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^\sigma \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad \left(\text{resp. } g(v) = |v|^\sigma \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)$$

en définissant sur $\mathcal{X}_{\bar{h}}$ les « analogues discrets »

$$g_{\bar{h}}(v_{\bar{h}}) = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\partial v^n}{\partial x_j} \right|^\sigma \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_j} \chi^n$$

$$\left(\text{resp. } g_{\bar{h}}(v_{\bar{h}}) = \sum_{n=0}^{N-1} |v^n|^\sigma \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_j} \chi^n \right)$$

et on obtient des résultats identiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1975).
- [2] C. BERNARDI, *Numerical approximation of a periodic linear parabolic problem*, SIAM J. Numer. Anal. 19, 1196-1207 (1982).
- [3] C. BERNARDI, *Approximation of Hopf bifurcation*, Numer. Math. 39, 15-37 (1982).
- [4] C. BERNARDI, *Optimal finite element interpolation on curved domains* (à paraître).
- [5] F. BREZZI, J. RAPPAZ, P.-A. RAVIART, *Finite-dimensional approximation of non-linear problems, Part I : branches of nonsingular solutions*. Numer. Math. 36, 1-25 (1980).
- [6] F. BREZZI, J. RAPPAZ, P.-A. RAVIART, *Finite-dimensional approximation of non-linear problems, Part II : limit points*. Numer. Math. 37, 1-28 (1981).
- [7] F. BREZZI, J. RAPPAZ, P.-A. RAVIART, *Finite-dimensional approximation of non-linear problems, Part III : simple bifurcation points*. Numer. Math. 38, 1-30 (1981).
- [8] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland (1978).
- [9] P. CLEMENT, *Approximation by finite element functions using local regularization*, R.A.I.R.O. 9, n° 2, 77-84 (1975).
- [10] J. DOUGLAS JR, T. DUPONT, *Galerkin methods for parabolic problems*, SIAM J. Numer. Anal. 7, 575-626 (1970).
- [11] V. GIRAULT, P.-A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics 749, Springer-Verlag (1979).

- [12] V GIRAULT P -A RAVIART *An analysis of upwind schemes for the Navier-Stokes equations* SIAM J Numer Anal 19, 312-333 (1982)
 - [13] P GRISVARD, *Boundary value problems in non-smooth domains*, Lecture notes University of Maryland (1980)
 - [14] J L LIONS, E MAGENES, *Problemes aux limites non homogenes et applications*, volume I Dunod Paris (1968)
 - [15] J L LIONS, E MAGENES *Problemes aux limites non homogenes et applications*, volume II Dunod Paris (1968)
 - [16] R TEMAM, *Navier-Stokes equations Theory and numerical analysis*, North-Holland Amsterdam (1977)
- Des resultats similaires pour le probleme lineaire sont demontres dans
- [17] C BAIOCCHI, F BREZZI, *Optimal error estimates for linear parabolic problems under minimal regularity assumptions*, Calcolo XX n° 2, 101 (1983)