

RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

KRZYSZTOF MOSZYŃSKI

Approximation spectral d'un opérateur borné et normal à l'aide de ses fonctions de la densité spectrale

RAIRO. Analyse numérique, tome 17, n° 1 (1983), p. 93-109

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1983__17_1_93_0

© AFCET, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**APPROXIMATION SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR BORNÉ
ET NORMAL A L'AIDE DE SES FONCTIONS
DE LA DENSITÉ SPECTRALE (*)**

par Krzysztof MOSZYŃSKI (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On présente une méthode d'approximation des fonctions de la densité spectrale $\phi_x(\lambda) = \|E(\lambda)x\|^2$ d'un opérateur borné et normal A dont la famille spectrale est $E(\lambda)$. La méthode est basée sur la construction de certaines formules de quadrature approchée en deux dimensions, à coefficients positifs. Les fonctions ϕ_x sont utilisées pour l'approximation du spectre $\sigma(A)$.

Summary. — This paper concerns a method of approximation of the spectral density functions $\phi_x(\lambda) = \|E(\lambda)x\|^2$ of a bounded, normal operator A with the spectral family $E(\lambda)$. The method is based on a construction of certain approximate quadrature formulas in two dimensions, with positive coefficients. The functions ϕ_x are used to approximate the spectrum $\sigma(A)$.

1. INTRODUCTION

Dans [4] on a présenté une méthode d'approximation spectrale applicable aussi dans le cas du spectre continu d'un opérateur autoadjoint. Ce papier généralise certains résultats de [4].

Soit H un espace de Hilbert complexe, muni du produit scalaire $(\cdot)_H$ et $A = \int_{\Omega} \lambda dE(\lambda) : H \rightarrow H$ un opérateur borné et normal quelconque. Ici Ω est un rectangle borné et fermé dans le plan complexe \mathbb{C} :

$$\Omega = \{ \lambda = u + iv = (u, v) \in \mathbb{C} \mid a_1 \leq u \leq a_2, b_1 \leq v \leq b_2 \},$$

contenant le spectre $\sigma(A)$ de A . On dénotera :

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A).$$

(*) Reçu en décembre 1981.

(1) Instytut Matematyczny PAN ul. Sniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Boîte postale 137, Pologne.

Tout rectangle borné et fermé $Q \subset \mathbb{C}$, dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées de \mathbb{C} est appelé ici un rectangle normal. On fixe une fois pour toutes le mode de numération des sommets q_1, q_2, q_3, q_4 d'un tel rectangle :

$$q_1 = (\alpha, \gamma), \quad q_2 = (\beta, \gamma), \quad q_3 = (\beta, \delta), \quad q_4 = (\alpha, \delta)$$

avec $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$.

L'ensemble $LB(Q) = [q_1, q_2] \cup [q_1, q_4]$ est appelé ici la frontière inférieure (lower boundary) de Q [8].

La famille spectrale E de l'opérateur A se décompose d'une telle manière que $E(\lambda) = E_1(u)E_2(v) = E_2(v)E_1(u)$ où E_1 est la famille de la partie réelle $R = \frac{A + A^*}{2}$ de A et E_2 celle de sa partie imaginaire $S = \frac{A - A^*}{2i}$. Il nous sera convenable de modifier éventuellement la définition classique (voir [6]) en posant $E_1(a_1) = 0$ et $E_2(b_1) = 0$. Comme, d'une manière évidente E_1 et E_2 se prolongent en dehors de $[a_1, a_2]$ et $[b_1, b_2]$ respectivement, la famille spectrale E de A devient une fonction définie sur \mathbb{C} entier, dont les valeurs sont des projections orthogonales dans H . D'ailleurs E est continue (fort) de droite par rapport à chacune de ses deux variables u et v dans $\text{Int}(\Omega)$ et s'annule sur $LB(\Omega)$.

Pour tout $x \in H$ fixé, on définit la fonction de la densité spectrale de l'opérateur A $\phi_x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi_x(\lambda) = (E(\lambda)x, x)_H = \|E(\lambda)x\|_H^2 \geq 0.$$

Soit Q un rectangle normal avec les sommets q_1, q_2, q_3, q_4 et f une fonction définie sur \mathbb{C} . Mettons

$$\Delta_Q f = f(q_1) + f(q_3) - f(q_2) - f(q_4).$$

On appelle $\Delta_Q f$ la différence de f sur Q . On dit que la fonction réelle f est entièrement croissante, si pour tout rectangle normal Q , $\Delta_Q f \geq 0$ et si f est croissante par rapport à u et v respectivement sur les deux segments $[q_1, q_2]$ et $[q_1, q_4]$ de $LB(Q)$. On voit facilement que ϕ_x est entièrement croissante.

Pour $\lambda = (u, v) \in \mathbb{C}$ et $h > 0$, définissons le rectangle normal $Q(\lambda, h)$ par ses sommets q_1, q_2, q_3, q_4 :

$$\begin{aligned} q_1 &= (u - h, v - h), & q_2 &= (u + h, v - h), & q_3 &= (u + h, v + h), \\ q_4 &= (u - h, v + h). \end{aligned}$$

Le théorème 1.1 suit directement du matériel classique (pour la démonstration détaillée, voir [5]).

THÉORÈME 1.1 : (i) Pour tout rectangle normal $Q \subset \mathbb{C}$:

- s'il existe $x \in H$ tel que $\Delta_Q \phi_x > 0$, alors $Q \cap \sigma(A) \neq \emptyset$;
- si $\sigma(A) \cap \text{Int}(Q) \neq \emptyset$, alors il existe $x \in H$ tel que $\Delta_Q \phi_x > 0$;

(ii) λ est une valeur propre de A si et seulement si on peut trouver un tel élément $x \in H$ que

$$\Delta_Q(\lambda, h) \phi_x \rightarrow v > 0 \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

D'ailleurs $v = \|\Delta(\lambda) x\|_H^2$ où $\Delta(\lambda) = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{Q(\lambda, h)} E$ (fort) ;

(iii) λ est dans le spectre continu de l'opérateur A si et seulement si pour tout $h > 0$ on peut trouver un $x_h \in H$, tel que $\Delta_{Q(\lambda, h)} \phi_{x_h} > 0$, tandis que $\Delta_{Q(\lambda, h)} \phi_x \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, pour tout $x \in H$. \parallel

Soit Ω un rectangle normal tel que $\sigma(A) \subset \Omega$. Le théorème 1.1 permet de classifier les points de Ω de la manière suivante. Divisons le rectangle Ω à l'aide d'un réseau des axes parallèles aux côtés de Ω pour obtenir sa décomposition en un nombre fini de rectangles normaux, plus petits, de diamètre $\leq h$. Soit Q un tel rectangle. Si $\Delta_Q \phi_x > 0$ pour un $x \in H$, alors on a $Q \cap \sigma(A) \neq \emptyset$. Ainsi on peut se servir de la fonction ϕ_x afin d'approximer une partie du spectre $\sigma(A)$ avec la précision définie par h . Mais en général on ne connaît pas de fonctions ϕ_x . Donc l'approximation des fonctions ϕ_x paraît être un problème intéressant du point de vue pratique. Pour avoir le spectre entier $\sigma(A)$, il faut qu'on puisse approximer ϕ_x pour tout $x \in H$, ce qui, bien sûr, n'est pas exécutable. On peut se servir à cet effet d'un réseau fini de points de H , au moins dans le cas où H est séparable. Par exemple des bases des sous-espaces de dimension finie, approximant H peuvent être appliquées (voir par ex. [1]). Certaines idées concernant ce genre d'approximation sont présentées dans [4]. Les points (i) et (ii) du théorème 1.1 peuvent être utiles pour la classification du spectre même (valeurs propres, spectre continu).

Conclusion : L'approximation des fonctions de la densité spectrale ϕ_x permet d'approximer le spectre $\sigma(A)$ et éventuellement classifier les points du spectre.

On présente ici une méthode d'approximation effective des fonctions ϕ_x . On y trouvera également deux propositions d'algorithmes.

2. QUELQUES LEMMES SUR APPROXIMATION

On se donne une fonction $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un rectangle normal Ω , telle que :

- ϕ est entièrement croissante sur Ω ,

— ϕ est normalisée [8]; c'est-à-dire que :

a) ϕ est continue de droite dans $\text{Int}(\Omega)$ par rapport à chacune de ses variables;

b) ϕ s'annule sur $LB(\Omega)$.

Exemple : fonction de la densité spectrale ϕ_x .

Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda = (u, v)$, $\mu = (r, s)$, soit $H(\lambda, \mu) = H(u, r) \cdot H(v, s)$ avec

$$H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < y \\ 1 & \text{pour } x \geq y \end{cases},$$

pour tous x, y réels. Mettons pour tout d naturel :

$$\phi_d(\lambda) = \sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d H(\lambda, \mu_j^d) \quad (2.1)$$

où $N(d)$ naturel, $B_j^d \geq 0$, $\mu_j^d \in \Omega \setminus LB(\Omega)$, $j = 1, 2, \dots, N(d)$. On vérifie facilement que :

(i) ϕ_d est entièrement croissante et normalisée ;

(ii) la variation totale $\bigvee_{\Omega} \phi_d$ de ϕ_d sur Ω satisfait $\bigvee_{\Omega} \phi_d = \int_{\Omega} d\phi_d(\lambda) = \sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d$,

(iii) $\int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_d(\lambda) = \sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d f(\mu_j^d)$ pour toute fonction continue $f \in C(\Omega)$.

La condition suivante (Q) nous sera utile.

Pour toute fonction réelle continue f

$$(Q) \quad \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_d(\lambda) \rightarrow \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi(\lambda)$$

quand $d \rightarrow \infty$.

Rappelons encore ici la formule d'intégration par parts [8] : Soit Q un rectangle normal, q_1, q_2, q_3, q_4 ses sommets, ∂Q sa frontière, f continue sur Q .

Si $\int_Q f d\phi$ et $\int_{\partial Q} f d\phi$ existent, alors $\int_Q \phi df$ et $\int_{\partial Q} \phi df$ existent, et :

$$\begin{aligned} \int_Q f d\phi &= \Delta_Q(f\phi) + \int_{q_1q_2} \phi df + \int_{q_1q_4} \phi df - \\ &\quad - \int_{q_2q_3} \phi df - \int_{q_4q_3} \phi df + \int_Q \phi df. \end{aligned}$$

LEMME 2.1 : Soit $Q \subset \Omega$ un rectangle normal dont les sommets sont q_1, q_2, q_3, q_4 . Si la condition (Q) est satisfaite, alors

$$\int_Q \phi_d(r, s) dr ds \rightarrow \int_Q \phi(r, s) dr ds \quad \text{quand } d \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Démonstration (l'idée de la démonstration : voir [6]) : Pour tout $\lambda = (u, v) \in \Omega$, soit :

$$\Omega(\lambda) = \{ (r, s) \in \Omega \mid r \leq u \text{ et } s \leq v \},$$

$$\psi(\lambda) = \int_{\Omega(\lambda)} \phi(r, s) dr ds,$$

$$\psi_d(\lambda) = \int_{\Omega(\lambda)} \phi_d(r, s) dr ds.$$

Mettons pour $\lambda \in \Omega$ fixé et $\mu = (\xi, \zeta) \in \mathbb{C}$

$$f_\lambda(\mu) = f_\lambda(\xi, \zeta) = \begin{cases} (u - \xi)(v - \zeta) & \text{pour } (\xi, \zeta) \in \Omega(\lambda) \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Comme f_λ est continue par rapport à ξ et ζ , la condition (Q) entraîne :

$$F_d(f_\lambda) = \int_\Omega f_\lambda(\mu) d\phi_d(\mu) \rightarrow F(f_\lambda) = \int_\Omega f_\lambda(\mu) d\phi(\mu)$$

pour tout $\lambda \in \Omega$, quand $d \rightarrow \infty$.

L'intégration par parts entraîne :

$$F_d(f_\lambda) = \int_\Omega f_\lambda(\mu) d\phi_d(\mu) = \int_{\Omega(\lambda)} f_\lambda(\mu) d\phi_d(\mu) = \int_{\Omega(\lambda)} \phi_d(\xi\zeta) d\xi d\zeta = \psi_d(\lambda)$$

et de la manière analogue $F(f_\lambda) = \psi(\lambda)$.

Donc $\psi_d(\lambda) \rightarrow \psi(\lambda)$ quand $d \rightarrow \infty$ pour tout $\lambda \in \Omega$.

Pour avoir (2.2) il suffit d'observer que

$$\int_Q \phi(r, s) dr ds = \Delta_Q \psi$$

$$\int_Q \phi_d(r, s) dr ds = \Delta_Q \psi_d. \quad \parallel$$

LEMME 2.2 : (l'idée de la démonstration : voir [6]) : Si la condition (Q) est satisfaite, alors pour tout $\lambda = (u, v) \in \text{Int}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} \phi(u - 0, v - 0) - \phi(u, v) &\leq \lim_{d \rightarrow \infty} [\phi(\lambda) - \phi_d(\lambda)] \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} [\phi(\lambda) - \phi_d(\lambda)] \leq \phi(u, v) - \phi(u - 0, v - 0). \end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\lambda = (u, v) \in \text{Int}(\Omega)$. Comme ϕ et ϕ_d sont normalisées et entièrement croissantes, le calcul facile nous amène à la conclusion que

$$\begin{aligned} \frac{1}{kh} \left[\int_{u-h}^u \int_{v-k}^v \phi(r, s) dr ds - \int_u^{u+h} \int_v^{v+k} \phi_d(r, s) dr ds \right] &\leq \\ &\leq \phi(\lambda) - \phi_d(\lambda) \leq \frac{1}{kh} \left[\int_u^{u+h} \int_v^{v+k} \phi(rs) dr ds - \int_{u-h}^u \int_{v-k}^v \phi_d(rs) dr ds \right]. \end{aligned}$$

Passons d'abord à la limite avec $d \rightarrow \infty$, et puis avec $(k, h) \rightarrow (0, 0)$. Il en résulte l'inégalité voulue. \parallel

COROLLAIRE : Si ϕ est continue au point λ , alors

$$\phi_d(\lambda) \rightarrow \phi(\lambda) \quad \text{quand } d \rightarrow \infty.$$

LEMME 2.3 : Si la condition (Q) est satisfaite, alors pour tout $\rho \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \rho(u, v) \phi_d(u, v) du dv \rightarrow \int_{\Omega} \rho(u, v) \phi(u, v) du dv \quad \text{quand } d \rightarrow \infty.$$

Démonstration : Mettons $f(u, v) = \int_{a_2}^u \int_{b_2}^v \rho(r, s) dr ds$, où (a_1, b_1) , (a_2, b_1) , (a_2, b_2) , (a_1, b_2) sont les sommets du rectangle normal Ω . Intégration par parts appliquée à $\int_{\Omega} f(\lambda) d\phi(\lambda)$ et $\int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_d(\lambda)$, la condition de normalité de Ω et la condition (Q) entraînent que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_d(\lambda) &= \int_{\Omega} \rho(r, s) \phi_d(r, s) dr ds \rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi(\lambda) = \int_{\Omega} \rho(r, s) \phi(rs) dr ds \end{aligned}$$

quand $d \rightarrow \infty$. \parallel

LEMME 2.4 : (l'idée de la démonstration : voir [3]) : Soit $S \subset \mathbb{C}$ l'union des rectangles normaux et des segments fermés, bornés, parallèles aux axes des coordonnées de \mathbb{C} .

Soit $\{\phi_d\}$ la suite des fonctions $\phi_d : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, croissantes par rapport à chacune de ses deux variables, telles que $\phi_d(\lambda) \rightarrow \phi(\lambda)$ quand $d \rightarrow \infty$, pour tout $\lambda \in S$. Supposons que $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour tout point $\lambda \in S$.

Dans ce cas ϕ_d converge uniformément vers ϕ sur S .

Démonstration : Soit d'abord S , un rectangle normal. Étant donné $\varepsilon > 0$, divisons S à l'aide d'un réseau des droites parallèles aux côtés de S , pour obtenir un système des rectangles $Q_1, Q_2, \dots, Q_{N(\varepsilon)}$, dont les sommets sont p_1^j, p_2^j, p_3^j et $p_4^j, j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ respectivement.

On suppose, que la condition

$$|\phi(p_k^j) - \phi(p_l^j)| < \varepsilon, k, l = 1, 2, 3, 4 \text{ et } j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$$

est satisfaite (ϕ est uniformément continue sur le compact S).

Pour tout $x \in S$ trouvons un rectangle Q_j tel que $x \in Q_j$.

On a

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi_d(x) &\leq \phi(x) - \phi_d(p_1^j) \leq \\ &\leq |\phi(x) - \phi(p_1^j)| + |\phi(p_1^j) - \phi_d(p_1^j)| \leq \varepsilon + |\phi(p_1^j) - \phi_d(p_1^j)| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi(x) - \phi_d(x) &\geq \phi(x) - \phi_d(p_3^j) \geq \\ &\geq -|\phi(x) - \phi(p_3^j)| - |\phi(p_3^j) - \phi_d(p_3^j)| \geq -\varepsilon - |\phi(p_3^j) - \phi_d(p_3^j)| \end{aligned}$$

donc

$$-\varepsilon - |\phi(p_3^j) - \phi_d(p_3^j)| \leq \phi(x) - \phi_d(x) \leq \varepsilon + |\phi(p_1^j) - \phi_d(p_1^j)|.$$

Comme $\phi_d(\lambda) \rightarrow \phi(\lambda)$ quand $d \rightarrow \infty$ et $\lambda \in S$, on peut trouver M_ε , tel que

$$\begin{aligned} |\phi(p_1^j) - \phi_d(p_1^j)| &< \varepsilon \\ |\phi(p_3^j) - \phi_d(p_3^j)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour $d > M_\varepsilon$ et $j = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$; c'est-à-dire que

$$-2\varepsilon \leq \phi(x) - \phi_d(x) \leq 2\varepsilon$$

si $d > M_\varepsilon$. Le raisonnement pareil s'applique dans le cas de segments, et en conséquence dans le cas de l'union finie des segments et rectangles. |||

COROLLAIRE : Supposons que $\phi_d(\lambda) \geq 0$ pour tout d et $\lambda = (u, v) \in \Omega$. Mettons

$$\psi(\lambda) = \int_{\Omega(\lambda)} \phi(r, s) dr ds, \quad \psi_d(\lambda) = \int_{\Omega_d(\lambda)} \phi_d(r, s) dr ds.$$

Les fonctions $\psi(\lambda)$ et $\psi_d(\lambda)$ sont continues et croissantes par rapport à chacune de ses variables. Il suit du lemme 2. 1, que $\psi_d(\lambda) \rightarrow \psi(\lambda)$ quand $d \rightarrow \infty$ pour tout $\lambda \in \Omega$. Donc

$$\psi_d(\lambda) \rightarrow \psi(\lambda) \quad \text{quand } d \rightarrow \infty$$

uniformément dans Ω . \parallel

3. ALGORITHMES, CONVERGENCE

On présente ici deux algorithmes pour l'approximation de la fonction de la densité spectrale ϕ_x de l'opérateur A .

Dans les deux cas on construit une suite des fonctions en escaliers $\{\phi_{xd}\}$ de la forme (2. 1), entièrement croissantes et normalisées, qui approchent ϕ_x lorsque $d \rightarrow \infty$. Dans les deux cas l'algorithme est basé sur la construction d'une quadrature approchée sur un rectangle normal Ω contenant le spectre $\sigma(A)$, dont les coefficients sont non négatifs. Il faut souligner ici que cette dernière condition est d'une grande importance (voir la section précédente).

ALGORITHME 1 : Soit :

- d un nombre naturel. Mettons $N(d) = (d + 1)(d + 2)/2$;
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(d)}$ une base quelconque de l'espace des polynômes réels du degré $\leq d$, en deux variables réelles;
- $x \in H$ un élément fixé.

a) Calculer les constantes $c_k, k = 1, 2, \dots, N(d)$

$$c_k = (\phi_k(R, S) x; x)_H$$

où R et S sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de A . Observons que les coefficients c_k peuvent être calculés effectivement (au moins approximativement) dans plusieurs cas intéressants.

b) Résoudre le problème suivant : Trouver

$$\mu_j^d \in \Omega \setminus LB(\Omega) \quad \text{et} \quad B_j^d \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N(d)$$

tels que

$$\sum_{j=1}^{N(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, N(d). \quad (3.1)$$

Mettre

$$\phi_{x_d}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d H(\lambda, \mu_j^d), \quad \lambda \in \Omega.$$

Commentaire : Observons que dans le point *b*) il faut résoudre un système de $N(d)$ équations non linéaires avec $2 N(d)$ inconnues $B_1^d, \dots, B_{N(d)}^d$ et $\mu_1^d, \dots, \mu_{N(d)}^d$, satisfaisant aux conditions additionnelles

$$\mu_j^d \in \Omega \setminus LB(\Omega) \quad \text{et} \quad B_j^d \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N(d).$$

En appliquant le théorème spectral, on voit que

$$c_k = (\varphi_k(R; S) x, x)_H = \left(\int_{\Omega} \varphi_k(\lambda) dE(\lambda) x, x \right)_H = \int_{\Omega} \varphi_k(\lambda) d\phi_x(\lambda), \quad (3.2)$$

donc l'équation (3.1) s'écrit comme

$$\sum_{j=1}^{N(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d = \int_{\Omega} \varphi_k(\lambda) d\phi_x(\lambda) \quad k = 1, 2, \dots, N(d). \quad (3.3)$$

Ainsi dans le point *b*) de l'algorithme, on cherche une formule de quadrature avec des coefficients positifs, qui soit exacte pour tous les polynômes du degré $\leq d$. On sait qu'une telle formule existe toujours (voir [9]). Il faut noter ici, qu'en élargissant éventuellement le rectangle Ω , on s'assure que les nœuds $\mu_j^d, j = 1, 2, \dots, N(d)$ se trouveront en dehors de $LB(\Omega)$.

Il reste le problème toujours ouvert d'approximation numérique de la solution de *b*).

THÉORÈME 3.1 : Si $\phi_x(\lambda) = \| E(\lambda) x \|_H^2$ et ϕ_{x_d} sont définies par l'algorithme 1, alors la condition (Q) est satisfaite. Donc dans ce cas :

$$(i) \int_{\Omega} \rho(u, v) \phi_{x_d}(u, v) du dv \rightarrow \int_{\Omega} \rho(u, v) \phi_x(u, v) du dv \quad \text{quand } d \rightarrow \infty$$

$$(ii) \phi_x(u - 0, v - 0) - \phi_x(u, v) \leq \\ \leq \lim_{d \rightarrow \infty} [\phi_x(\lambda) - \phi_{x_d}(\lambda)] \leq \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} [\phi_x(\lambda) - \phi_{x_d}(\lambda)] \\ \leq \phi_x(u, v) - \phi_x(u - 0, v - 0)$$

pour tout $\lambda = (u, v) \in \Omega$ et $\rho \in L^2(\Omega)$.

En plus, si ϕ_x est continue au point $\lambda \in \Omega$, alors

$$\phi_{x_d}(\lambda) \rightarrow \phi_x(\lambda) \quad \text{quand } d \rightarrow \infty.$$

Cette convergence est uniforme dans tout ensemble $S \subset \Omega$ qui est l'union finie des rectangles normaux et des segments bornés et fermés, parallèles aux côtés de Ω , pourvu que ϕ_x soit continue à tout point de S .

Démonstration : Observons qu'il suffit de vérifier que la condition (Q) est satisfaite. Les points (i) et (ii) suivent directement des lemmes 2.2 et 2.3.

Soit Q_m un polynôme quelconque, en deux variables du degré $m \leq d$. Les formules (3.1), (3.2) et (3.3) impliquent

$$\sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d Q_m(\mu_j^d) = \int_{\Omega} Q_m(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) = \int_{\Omega} Q_m(\lambda) d\phi_x(\lambda) \quad (3.4)$$

donc dans le cas particulier $Q_m(\lambda) \equiv 1$ on a

$$\sum_{j=1}^{N(d)} B_j^d = \int_{\Omega} d\phi_{x,d}(\lambda) = \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) = \|x\|_H^2. \quad (3.5)$$

Soit f une fonction continue, $f \in C_R(\Omega)$. On dénotera la norme « sup » dans l'espace des fonctions continues réelles $C_R(\Omega)$ par $\|\cdot\|_{\infty}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver un polynôme Q_{m_ε} de degré m_ε tel que $\|f - Q_{m_\varepsilon}\|_{\infty} < \varepsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) &= \\ &= \int_{\Omega} [f(\lambda) - Q_{m_\varepsilon}(\lambda)] d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} [f(\lambda) - Q_{m_\varepsilon}(\lambda)] d\phi_{x,d}(\lambda) + \\ &\quad + \left[\int_{\Omega} Q_{m_\varepsilon}(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} Q_{m_\varepsilon}(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Si $d \geq m_\varepsilon$, le troisième terme s'annule, donc (voir (3.4) et (3.5)) :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) \right| &\leq \\ &\leq \|f - Q_{m_\varepsilon}\|_{\infty} \left[\int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) + \int_{\Omega} d\phi_{x,d}(\lambda) \right] \leq 2\varepsilon \|x\|_H^2. \end{aligned}$$

Cela prouve la condition (Q). \parallel

ALGORITHME 2 : Dans l'espace $C_k(\Omega)$ des fonctions réelles continues sur Ω introduisons le produit scalaire quelconque, réel $(\cdot, \cdot)_0$, et la norme correspon-

dante $\| \cdot \|_0$, tels que $\| f \|_0 \leq \kappa \| f \|_\infty$ pour toute $f \in C_R(\Omega)$, où κ est une constante.

Soit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(d)}$, $N(d) = (d + 1)(d + 2)/2$, une base quelconque des polynômes en deux variables du degré $\leq d$, orthonormale par rapport au produit scalaire $(\)_0$.

Fixons un élément $x \in H$.

a) Choisir une suite des nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, telle que $\varepsilon_d \rightarrow 0$ quand $d \rightarrow \infty$.

b) A l'aide d'un réseau des axes parallèles aux côtés de Ω , diviser le rectangle Ω en $M(d)$ rectangles plus petits $Q_1^d, Q_2^d, \dots, Q_{M(d)}^d$, d'une telle manière que le diamètre maximal de Q_j^d converge à zéro, quand $M(d) \rightarrow \infty$. Choisir $\mu_j^d \in Q_j^d, j = 1, 2, \dots, M(d)$ d'une manière arbitraire.

c) Calculer $c_k = (\varphi_k(R, S) x, x)_H, k = 1, 2, \dots, N(d)$ où $A = R + iS$.

d) Pour d fixé trouver :

— le nombre $M(d)$,

— les coefficients $B_j^d \geq 0, j = 1, 2, \dots, M(d)$, tels que

$$\min_{B_j^d \geq 0} \sum_{k=1}^{N(d)} \left[\sum_{j=1}^{M(d)} B_j^d \varphi_k(\mu_j^d) - c_k \right]^2 \leq \varepsilon_d. \tag{3.6}$$

e) Mettre

$$\phi_{x,d}(\lambda) = \sum_{j=1}^{M(d)} B_j^d H(\lambda, \mu_j^d).$$

Commentaire : Il y a diverses possibilités du choix d'un système orthonormal $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(d)}$. Par exemple les produits des polynômes orthogonaux d'une variable peuvent être appliqués.

Dans le point d) de l'algorithme 2 on cherche une solution du problème linéaire des moindres carrés avec la condition additionnelle de non-négativité (NNLS — non negative least squares).

La procédure de résolution numérique de ce problème se trouve dans [2]. L'existence de $M(d)$ pour ε_d donné sera démontrée plus loin. Il faut remarquer ici que le plus souvent $M(d) > N(d)$, tandis que la procédure présentée dans [2] s'applique sans aucune réserve au cas où le nombre des colonnes de la matrice ne dépasse pas celui de ses lignes. On peut, quand même, ajouter la condition de minimalisation de la longueur du vecteur $[B_1^d, B_2^d, \dots, B_{M(d)}^d]$.

On voit facilement que cette modification ajoute de son côté $M(d)$ lignes nouvelles à la matrice du problème d). La nouvelle matrice est évidemment du rang $M(d)$, donc la procédure de [2] s'y applique sans aucun doute.

THÉORÈME 3.2 : Étant donné ε_d , on peut toujours trouver $M(d)$ d'une telle manière que la condition (3.6) soit satisfaite.

Démonstration : Soit $Q_j^d, j = 1, 2, \dots, M(d)$ un rectangle de la décomposition de Ω définie dans le point b) de l'algorithme 2. Mettons

$$B_j^d = \Delta_{Q_j^d} \phi_x, \quad j = 1, 2, \dots, M(d).$$

Evidemment, $B_j^d \geq 0$, car la fonction ϕ_x est entièrement croissante. On voit que $\sum_{j=1}^{M(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d, k = 1, 2, \dots, N(d)$ sont les sommes de Riemann-Stieltjes de l'intégrale

$$c_k = \int_{\Omega} \varphi_k(\lambda) d\phi_x(\lambda) \quad k = 1, 2, \dots, N(d).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{N(d)} \left[\sum_{j=1}^{M(d)} \varphi_k(\mu_j^d) - c_k \right]^2 \leq \varepsilon_d$$

pourvu que $M(d)$ soit suffisamment grand. \parallel

THÉORÈME 3.3 : Si $\phi_x(\lambda) = \|E(\lambda)x\|_H^2$ et $\phi_{x,d}$ sont définies par l'algorithme 2, alors la condition (Q) est satisfaite. Cela implique (i) et (ii) du théorème 3.1.

Démonstration : Il suffit de prouver que la condition (Q) est satisfaite. Soit $f \in C_R(\Omega)$. Pour ε arbitraire mais tel que $0 < \varepsilon < \frac{\|f\|_0}{\kappa}$ choisissons un polynôme Q_m du degré $\leq m$ tel que $\|f - Q_m\|_{\infty} < \varepsilon < \frac{\|f\|_0}{\kappa}$.

Nous avons $Q_m = \sum_{j=1}^{N(m)} \gamma_j \varphi_j$ pour d assez grand. L'orthonormalité du système $\{\varphi_j\}$ implique $\gamma_j = (Q_m, \varphi_j)_0$ et $\sum_{j=1}^{N(m)} \gamma_j^2 = \|Q_m\|_0^2$.

Donc

$$\varepsilon \kappa \geq \kappa \|f - Q_m\|_{\infty} \geq \|f - Q_m\|_0 \geq \|Q_m\|_0 - \|f\|_0$$

d'où il suit que

$$\sum_{j=1}^{N(m)} \gamma_j^2 = \|Q_m\|_0^2 \leq [\kappa \varepsilon + \|f\|_0]^2 \leq 4 \|f\|_0^2. \quad (3.7)$$

Comme φ_1 est du degré zéro ($\varphi_1 = \text{Cte}$), donc $c_1 = \varphi_1 \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda)$ et

$$\begin{aligned} \varphi_1^2 \left[\int_{\Omega} d\phi_{x_d}(\lambda) - \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) \right]^2 &= \varphi_1^2 \left[\sum_{j=1}^{M(d)} B_j^d - \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{N(d)} \left[\sum_{j=1}^{M(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d - c_k \right]^2 \leq \varepsilon_d \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \int_{\Omega} d\phi_{x_d}(\lambda) \leq \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) + \frac{\sqrt{\varepsilon_d}}{\varphi_1} \leq 2 \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda) = 2 \|x\|_H^2 \quad (3.8)$$

pour d suffisamment grand. Choisissons maintenant $d \geq m$ et tel que les conditions (3.7), (3.8) et $\sqrt{\varepsilon_d} < \varepsilon$ soient satisfaites.

Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_{x_d}(\lambda) \right| &= \left| \int_{\Omega} [f(\lambda) - Q_m(\lambda)] d\phi_x(\lambda) - \right. \\ &\left. - \int_{\Omega} [f(\lambda) - Q_m(\lambda)] d\phi_{x_d}(\lambda) + \int_{\Omega} Q_m(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} Q_m(\lambda) d\phi_{x_d}(\lambda) \right| \leq \\ &\leq 3 \|f - Q_m\|_{\infty} \|x\|_H^2 + \left| \sum_{k=1}^{N(d)} \gamma_k \left[\sum_{j=1}^{M(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d - c_k \right] \right| \\ &\leq 3 \|x\|_H^2 \varepsilon + \left\{ \sum_{k=1}^{N(d)} \gamma_k^2 \sum_{k=1}^{N(d)} \left[\sum_{j=1}^{M(d)} \varphi_k(\mu_j^d) B_j^d - c_k \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

où on met par définition $\gamma_k = 0$ pour tout k tel que $N(m) < k \leq N(d)$.

Ainsi on arrive à la condition (Q) :

$$\left| \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_x(\lambda) - \int_{\Omega} f(\lambda) d\phi_{x_d}(\lambda) \right| \leq 3 \|x\|_H^2 \varepsilon + 2 \|f\|_0 \sqrt{\varepsilon_d} \leq K\varepsilon$$

où K ne dépend pas de d . \parallel

Remarque : Nous avons déjà remarqué qu'en général $M(d) > N(d)$; donc l'algorithme 1 pourrait être considéré comme plus économique que l'algorithme 2. Observons que l'algorithme 1 nécessite la résolution d'un système des équations non linéaires, tandis que l'algorithme 2 est basé sur un classique problème algébrique de moindres carrés.

Le théorème 3.4 suivant concerne l'ordre de convergence dans le cas spécial : $\lambda \in \rho(A)$. Cette information est bien sûr seulement partielle, mais semble être d'une certaine importance pratique. La convergence de l'algorithme dans $\rho(A)$ est la plus rapide (voir aussi [4]) et donc permet de nous informer relativement vite si le point qui nous intéresse est dans $\rho(A)$.

Dans [4] on trouve beaucoup plus d'informations sur l'ordre de convergence dans le cas où A est autoadjoint.

Soit $\rho_x(A) \subset \mathbb{C}$ un tel ensemble que $\lambda \in \rho_x(A)$ si et seulement si il existe un rectangle normal Q tel que $\lambda \in \text{Int}(Q)$ et $\Delta_Q \phi_x = 0$. On voit que $\rho_x(A)$ est ouvert et que $\rho(A) \subset \rho_x(A)$ (voir théorème 1.1).

Soit maintenant Q un rectangle normal. Si $Q \subset \rho(A) \subset \rho_x(A)$, donc $\Delta_Q \phi_x = 0$. On verra que $\Delta_Q \phi_{x,d}$ satisfait cette relation approximativement et que $\Delta_Q \phi_{x,d}$ converge à zéro très rapidement quand $d \rightarrow \infty$. L'application du théorème 3.4 qui suit nous permet d'approximer l'ensemble $\rho(A)$ en prenant la partie commune des approximations de $\rho_x(A)$ pour x convenablement choisi et d assez grand.

LEMME 3.4 (*Élimination des faux éléments du spectre. Comparer [4]*) :
 Soit $Q \subset \rho_x(A)$ un rectangle normal. Pour tout p et d naturels

$$0 \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d \leq \begin{cases} \frac{C_p(s)}{s^p} & \text{pour l'algorithme 1,} \\ (1 + C\sqrt{\varepsilon_d}) \frac{C_p(s)}{s^p} + C\sqrt{\varepsilon_d} & \text{pour l'algorithme 2,} \end{cases}$$

où C est une constante, $C_p(s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$ pour tout p fixé, $\varepsilon_d \rightarrow 0$ quand $d \rightarrow \infty$ (voir la définition d'algorithme 2), $s = \text{entier}(d/2)$ et $B_j^d \geq 0, j = 1, 2, \dots$ sont les coefficients définis par l'algorithme 1 ou 2.

Démonstration : Soit $Q' \subset \rho_x(A)$ un rectangle normal tel que

$$Q \subset \text{Int}(Q') \subset \rho_x(A).$$

Il existe une fonction $f_Q \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $f_Q(\lambda) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \Omega$, $f_Q(\lambda) = 1$ pour $\lambda \in Q$ et $f_Q(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in \Omega \setminus Q'$. Il est clair que

$$\int_{\Omega} f_Q(\lambda) d\phi_x(\lambda) = 0.$$

Mettons

$$r(d) = \begin{cases} N(d) & \text{pour l'algorithme 1,} \\ M(d) & \text{pour l'algorithme 2.} \end{cases}$$

On a

$$0 \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d \leq \sum_{j=1}^{r(d)} B_j^d f_Q(\mu_j^d) = \int_{\Omega} f_Q(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) = \\ = \int_{\Omega} f_Q(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) - \int_{\Omega} f_Q(\lambda) d\phi_x(\lambda).$$

Soit W un polynôme arbitraire du degré $\leq d$. Donc

$$0 \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d \leq \int_{\Omega} [f_Q(\lambda) - W(\lambda)] d\phi_{x,d}(\lambda) - \\ - \int_{\Omega} [f_Q(\lambda) - W(\lambda)] d\phi_x(\lambda) + \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) - \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_x(\lambda).$$

Comme (la condition (Q)) $\int_{\Omega} d\phi_{x,d}(\lambda) \rightarrow \int_{\Omega} d\phi_x(\lambda)$ quand $d \rightarrow \infty$, la suite

$\left\{ \int_{\Omega} d\phi_{x,d}(\lambda) \right\}$ est bornée et on peut écrire

$$0 \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d \leq \|f_Q - W\|_{\infty} K + \left| \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) - \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_x(\lambda) \right|$$

où K est une constante.

Observons que pour l'algorithme 1 $\int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) = \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_x(\lambda)$.

La méthode déjà appliquée dans la démonstration du théorème 3.3 nous amène à l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_{x,d}(\lambda) - \int_{\Omega} W(\lambda) d\phi_x(\lambda) \right| \leq \|W\|_0 \sqrt{\varepsilon_d}$$

dans le cas d'algorithme 2. Comme $\|W\|_0 \leq \kappa \|W - f_Q\|_{\infty} + \kappa \|f_Q\|_{\infty}$, nous arrivons finalement à la conclusion que

$$0 \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d \leq \begin{cases} \|f_Q - W\|_{\infty} \cdot K & \text{pour l'algorithme 1,} \\ \|f_Q - W\|_{\infty} (K + \kappa \sqrt{\varepsilon_d}) + \kappa \sqrt{\varepsilon_d} & \text{pour l'algorithme 2.} \end{cases}$$

Il nous suffit seulement de majoriser $\|f_Q - W\|_\infty$. Choisissons d'abord la fonction f_Q d'une manière convenable. Soit

$$Q = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \quad \text{et} \quad Q' = [\alpha', \beta'] \times [\gamma', \delta'],$$

$Q \subset \text{Int}(Q') \subset Q' \subset \Omega$ et mettons $f_Q(u, v) = g_1(u) \cdot g_2(v)$ où $g_1 \in C_0^\infty(a_1, a_2)$, $g_2 \in C_0^\infty(b_1, b_2)$, $0 \leq g_1(u) \leq 1$, $0 \leq g_2(v) \leq 1$ et

$$g_1(u) = \begin{cases} 1 & \text{pour } u \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{pour } u \in [a_1, a_2] \setminus [\alpha', \beta'] \end{cases}$$

$$g_2(v) = \begin{cases} 1 & \text{pour } v \in [\gamma, \delta] \\ 0 & \text{pour } v \in [b_1, b_2] \setminus [\gamma', \delta'] \end{cases}.$$

Soit $W(u, v) = W_1(u) W_2(v)$ où W_1 et W_2 sont les polynômes optimaux d'une variable, du degré $\leq s = \text{entier}(d/2)$, choisis pour les fonctions g_1 et g_2 respectivement. On a

$$\|f_Q - W\|_\infty \leq \|g_1 - W_1\|_\infty + \|g_1 - W_1\|_\infty \|g_2 - W_2\|_\infty + \|g_2 - W_2\|_\infty$$

car $\|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = 1$. Appliquons maintenant le théorème de Jackson [7] (W_1 et W_2 sont optimaux !) :

$$\|g_1 - W_1\|_\infty \leq K_p \omega_{1p}(s) \frac{(a_2 - a_1)^p}{s^p}$$

$$\|g_2 - W_2\|_\infty \leq K_p \omega_{2p}(s) \frac{(b_2 - b_1)^p}{s^p}.$$

Ici p est naturel quelconque, K_p est une constante qui dépend de p , mais ne dépend pas de s ; ω_{1p} et ω_{2p} sont quelques modules de continuité, donc $\omega_{ip}(s) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$ quand $s \rightarrow \infty$. Cela termine la démonstration. $\parallel\parallel$

THÉORÈME 3.4 : Soit $Q \subset \rho_x(A)$ un rectangle normal. Si $\phi_{x,d}$ est définie par l'algorithme 1 ou 2, alors

$$0 \leq \Delta_Q \phi_{x,d} \leq \begin{cases} \frac{C_p(s)}{s^p} & \text{pour l'algorithme 1} \\ (1 + C\sqrt{\varepsilon_d}) \frac{C_p(s)}{s^p} + C\sqrt{\varepsilon_d} & \text{pour l'algorithme 2} \end{cases}$$

où p , C , C_p et s sont comme dans le lemme 3.4.

Démonstration : Pour λ fixé mettons

$$K(\lambda) = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid [\operatorname{Re}(\mu) \leq \operatorname{Re}(\lambda)] \text{ et } [\operatorname{Im}(\mu) \leq \operatorname{Im}(\lambda)] \}.$$

Observons que

$$\phi_{.xd}(\lambda) = \sum_{j=1}^{r(d)} B_j^d H(\lambda, \mu_j^d) = \sum_{\mu_j^d \in K(\lambda)} B_j^d$$

$(r(d))$ — comme dans la démonstration du lemme 3.4), donc

$$\Delta_Q \phi_{.xd} = \sum_{\mu_j^d \in Q \setminus LB(Q)} B_j^d \leq \sum_{\mu_j^d \in Q} B_j^d.$$

L'application du lemme 3.4 termine la démonstration. \parallel

RÉFÉRENCES

1. A. K. AZIZ, *Mathematical foundations of the finite element method*. New York, 1972.
2. C. L. LAWSON, R. J. HANSON, *Solving least squares problems*. Prentice-Hall, 1974.
3. S. ŁOJASIEWICZ, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. PWN Warszawa, 1973.
4. K. MOSZYŃSKI, *On approximation of the spectral density function of a selfadjoint operator*. To appear in *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, N° 14, 1979.
5. K. MOSZYŃSKI, *Approximation of the spectrum of a bounded, normal operator with the help of its spectral density functions*. Preprint N° 249. Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, oct. 1981.
6. SZ. F. RIÉSZ, B. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Akademiai Kiado. Budapest, 1952.
7. T. J. RIVLIN, *An introduction to the approximation of functions*. Blaisdell Publ., 1969.
8. A. SARD, *Linear approximation*. AMS 1963.
9. A. H. STROUD, *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice-Hall, 1971.