

ZAHER MAHJOUB

Réduction de la résolution d'un problème de réseau maillé

RAIRO. Analyse numérique, tome 16, n° 2 (1982), p. 143-160

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1982__16_2_143_0

© AFCET, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉDUCTION DE LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE RÉSEAU MAILLÉ (*)

par Zaher MAHJOUB (1)

Communiqué par F ROBERT

Résumé — Pour la détermination des débits et pressions dans les conduites d'un réseau maillé de distribution d'eau on se ramène à la résolution d'un système d'équations non linéaires. On présente dans ce papier une méthode permettant de réduire sensiblement la taille du système dont la résolution devient plus simple.

Abstract — To compute flows and pressures in pipelines of a water distribution looped network we have to solve a system of non linear equations. We present in this paper a method which leads to the reduction of the system which resolution becomes easier.

I. INTRODUCTION

Dans le cadre des écoulements en régime permanent de fluides sous pression l'étude des réseaux dits maillés tient une place importante due à ses applications pratiques surtout dans le domaine de la distribution d'eau potable.

Ce genre de problèmes où il s'agit de déterminer les débits et pressions dans le réseau était résolu avant l'avènement des calculateurs surtout par des techniques de simulation où le réseau hydraulique était simulé par un réseau électrique « équivalent ». En 1936 Hardy Cross [5] a mis au point une méthode numérique quoique laborieuse mais utilisable manuellement.

Depuis, les méthodes plus ou moins basées sur Newton ont foisonné mais elles souffrent dans certains cas de support théorique et de justification acceptable. Notre objectif est de formaliser un ensemble d'algorithmes et les lier à une même source. Dans ce papier nous verrons une technique de réduction substantielle du problème basée sur des notions de théorie des graphes, dans un second nous étudierons en particulier la méthode de Cross et ses dérivées.

(*) Reçu en juin 1981

(1) Ecole Nationale d'Ingenieurs de Tunis (ENIT), B P 37 Belvédère-Tunis-Tunisie & ENSEEIHT, 2, rue Camichel, 31071 Toulouse Cedex, France

Par mesure de simplification nous traiterons le cas d'un réseau maillé (connexe) ayant un seul réservoir et adopterons une certaine formulation du problème posé.

1. Description d'un réseau maillé

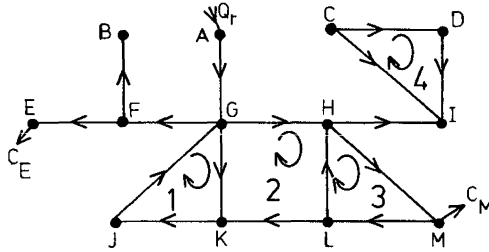


Figure 1. — Schéma d'un réseau maillé.

- | | | | |
|---|---|---|------------|
| { | ● A noeud de référence (réservoir) | | |
| | ● A, B, M ... noeuds | | nombre n |
| | ● BF, HG ... tronçons (ou conduites) orientés | — | t |
| | ● AG, EF ... tronçons antennes | — | t_a |
| | ● GKJG, CDIC ... mailles orientées | — | m |
| | ● C_E, C_M ... débits aux noeuds | | |

On considère un réseau maillé \mathcal{R} constitué de n noeuds (dont un sera de référence) et t tronçons. A partir du graphe associé on définit m cycles élémentaires indépendants [19] appelés mailles (cf. III.3), m étant le nombre cyclomatique [3], [19].

2. Problème type

Disposant d'un tel réseau où s'écoule un certain fluide — l'eau ici — il s'agit, à partir des données suivantes :

- Caractéristiques des conduites : longueur, diamètre, matériau.
- Débit Q_r et charge H_r en un noeud du réseau (réservoir).
- Débits des consommations aux noeuds,

de déterminer :

- Les débits q_i dans toutes les conduites avec leurs sens.
- Les pressions p_j (ou les charges h_j) aux noeuds.

On se ramène alors à la résolution d'un système d'équations dont les inconnues sont q_i et ζ_i , ζ_i étant la perte de charge entre les noeuds amont et aval. (Ayant ζ_i et les altitudes des noeuds on en déduit les pressions.)

3. Position du problème

Une relation fort connue en théorie des graphes donne pour un graphe (connexe) son nombre cyclomatique m

$$m = t - n + 1 \text{ (} t \text{ arcs, } n \text{ noeuds) soit } t = n + m - 1 \tag{1}$$

\mathcal{R} sera considéré connexe dans toute la suite.

** Principes de mise en équations*

On applique les lois de continuité de Kirchhoff :

- équilibre aux noeuds : en chaque noeud la somme des débits entrants (positifs) et sortants (négatifs) est nulle ;
- équilibre dans les mailles : dans chaque maille la somme des pertes de charge le long des tronçons la constituant est nulle. On convient de considérer comme positive la perte de charge pour un tronçon orienté selon le sens de parcours de la maille, négative sinon ;
- la relation entre le débit et la perte de charge s'écrit

$$\zeta = h(q) \tag{2}$$

où h est de la forme $aq |q|^\lambda$, a constante de la conduite et λ réel positif (≈ 1). (On convient sans perte de généralité de ne pas indiquer h .)

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \sum_{j=1}^t e_j^i q_j = b_i \quad i = 1 \dots n \quad e_j^i = \pm 1,0 \quad (n) \\ 2. \sum_{j=1}^t \varepsilon_j^i \zeta_j = 0 \quad i = 1 \dots m \quad \varepsilon_j^i = \pm 1,0 \quad (m) \\ 3. \zeta_j - h(q_j) = 0 \quad j = 1 \dots t \quad (t). \end{array} \right.$$

Soit $e = n + m + t = 2t + 1$ équations à $2t$ inconnues (q_j, ζ_j). Compte tenu de la loi de conservation une équation aux noeuds est redondante. En supprimant une telle équation on obtient le système d'ordre $2t$:

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{l} \sum_j e_j^i q_j = b_i \quad i = 1 \dots n - 1 \\ \sum_j \varepsilon_j^i \zeta_j = 0 \quad i = 1 \dots m \\ \zeta_j - h(q_j) = 0 \quad j = 1 \dots t \end{array} \right.$$

qui se décompose en

$$(S_1) \quad \text{ordre } t \quad \begin{cases} \sum_j e_j^i q_j = b_i \\ \sum_j e_j^i h(q_j) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \zeta_j = h(q_j) \\ j = 1 \dots t. \end{cases}$$

On aura donc à résoudre le système (S_1) qui peut s'écrire

$$(S_1) \quad \begin{cases} A Q = B & (S_{10}) \\ D \cdot H(Q) = 0 & (S_{11}) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} G(Q) = 0 \\ G : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^t \end{cases}$$

- (S_{10}) partie linéaire, A matrice $(n-1, t)$ et $B \in \mathbb{R}^{n-1}$,
- (S_{11}) partie non linéaire, D matrice (m, t) et H fonction de \mathbb{R}^t dans \mathbb{R}^t :
 $H(Q) = (h(q_1) \dots h(q_t))^T$.

Remarque :

• A et D sont deux matrices formées de $+1$ et -1 , A ayant au plus deux éléments non nuls ($+1, -1$) par colonne (en ajoutant à A la ligne correspondant à l'équation au nœud supprimée on obtient la matrice d'incidence de \mathcal{R}).

• D est une sous-matrice de la matrice des cycles de \mathcal{R} . Une colonne D_j de D totalement nulle signifie que le tronçon j est une antenne (n'appartient à aucune maille).

II. TRANSFORMATION DU SYSTÈME (S_1)

Nous supposons dans toute la suite l'existence et l'unicité de la solution de (S_1) (la démonstration basée sur des considérations physiques ne fait pas l'objet de ce papier [1], [9]).

1. Newton pour résoudre (S_1)

(S_1) qui s'écrit $G(Q) = 0$ résolu par la méthode de Newton donne :

$$\begin{cases} Q^0 \text{ donné} \\ Q^{r+1} = Q^r - [G'(Q^r)]^{-1} G(Q^r) \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots$$

$G'(Q^r)$ étant la jacobienne. On sait qu'en posant $Z^r = Q^{r+1} - Q^r$ on se ramène à résoudre à chaque itération le système d'ordre t

$$G'(Q^r) \cdot Z^r = -G(Q^r) \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Précisons que la jacobienne qu'on notera J_G^r s'écrit

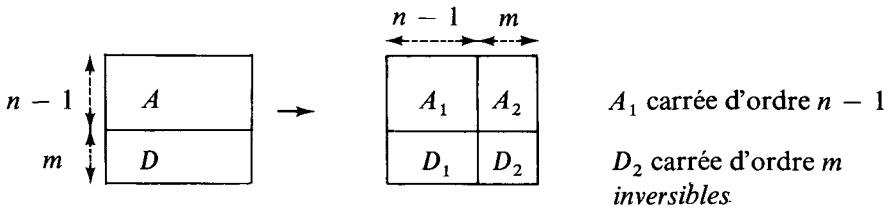
$$J_G^r = \begin{bmatrix} A \\ D^r \end{bmatrix} \text{ avec } D^r = D \cdot \begin{bmatrix} \cdot & 0 \\ h'(q_i^r) \\ 0 & \cdot \end{bmatrix} = DE^r .$$

2. Changement de variables. Décomposition

* (a) Effectuons le changement de variable $Q = Q^0 + Y$ (Q^0 vecteur initial). (S_1) devient alors

$$\left. \begin{aligned} A(Q^0 + Y) &= B \quad (4.1) \\ DH(Q^0 + Y) &= 0 \quad (4.2) \Rightarrow \sum_{j=1}^l \varepsilon_j^i h(q_j^0 + y_j) = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* (b) Décomposons les matrices A et D comme suit (avec au besoin des permutations des colonnes).



* (c) Choisissons une distribution initiale Q^0 qui soit d'équilibre i.e. vérifiant

$$AQ^0 = B. \quad (5)$$

Pour cela grâce à la décomposition précédente on obtient :

$$A_1 Q_1^0 + A_2 Q_2^0 = B \Rightarrow A_1 Q_1^0 = B - A_2 Q_2^0 : Q_1^0 \in \mathbb{R}^{n-1}, Q_2^0 \in \mathbb{R}^m .$$

En choisissant Q_2^0 arbitrairement (i.e. on fixe les débits initiaux dans m conduites du réseau) nul par exemple, nous aurons à résoudre le système linéaire d'ordre $n-1$.

$$A_1 Q_1^0 = B \quad (6)$$

Q^0 étant déterminé on obtient :

$$(4.1) \quad AY = -AQ^0 + B \Rightarrow \text{d'après (5)} \quad (5)$$

$$(6.1) \quad AY = 0$$

(4.3) donne $A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 0 \Rightarrow Y_1 = -A_1^{-1} A_2 Y_2$.

* (d) D_2^T étant inversible (car D_2 l'est) effectuons le changement de variable :

$$Y_2 = D_2^T X \quad Y_2, X \in \mathbb{R}^m. \quad (7)$$

Dans ce cas $Y_1 = -A_1^{-1} A_2 D_2^T X$.

Un résultat connu de théorie des graphes [3], [19] permet d'écrire pour le réseau \mathcal{R} :

$$AD^T = 0 \quad (8)$$

ce qui traduit l'orthogonalité des vecteurs cycles (D) et cocycles (A) dans un graphe.

Avec la décomposition (4.3) on a

$$A_1 D_1^T + A_2 D_2^T = 0 \Rightarrow -A_1^{-1} A_2 D_2^T = D_1^T \Rightarrow Y_1 = D_1^T X. \quad (9)$$

En définitive (7) et (9) donnent

$$Y = D^T X \quad (10)$$

qui s'explique en

$$y_j = \sum_{i=1}^m \varepsilon_j^i x_i \quad j = 1 \dots t$$

(4) devient

$$\begin{cases} AD^T X = 0 \\ DH(Q^0 + D^T X) = 0. \end{cases}$$

Avec la relation (8), $AD^T X = 0$ devient une identité redondante, nous aurons en fin de compte à ne résoudre que le système d'ordre m : $DH(Q^0 + D^T X) = 0$ soit :

$$\sum_{j=1}^t \varepsilon_j^i h\left(q_j^0 + \sum_{l=1}^m \varepsilon_j^l x_l\right) = 0 \quad i = 1 \dots m \quad (11)$$

soit

$$(\bar{S}) : F(X) = 0$$

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Ainsi en partant d'un Q^0 d'équilibre le système (S_1) d'ordre t et d'inconnues Q a été transformé en un système (\bar{S}) d'ordre inférieur m et d'inconnues X .

Remarque : Pour les tronçons antennes j (n'appartenant à aucune maille) nous avons $\varepsilon_j^i = 0(\forall i)$ donc d'après (10) : $y_j = 0$. Ceci signifie que q_j^0 est le débit solution. De ce fait la détermination de Q^0 fournit directement la solution pour les tronçons antennes.

Le système (\bar{S}) ne concerne donc que les tronçons non antennes dont le nombre est $\bar{t} = t - t_a$.

3. Détermination de A_1, A_2, D_1 et D_2

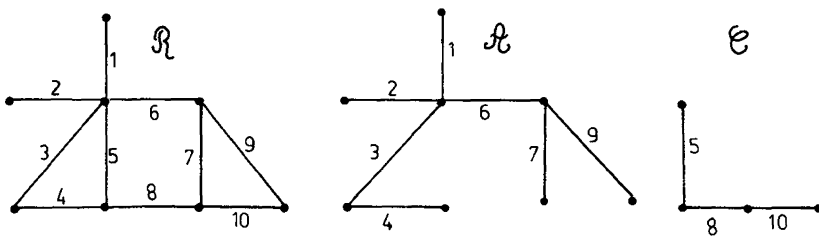
La décomposition de A et D afin d'avoir A_1 et D_2 inversibles se base sur des résultats de théorie des graphes. On opère de la manière suivante :

- A partir du graphe associé à \mathcal{R} on définit un « arbre maximal » \mathcal{A} (sous-graphe de \mathcal{R} ayant les mêmes n noeuds et qui est un arbre). \mathcal{A} aura $n - 1$ arcs. Le sous-graphe complémentaire \mathcal{C} qui a $t - (n - 1)$ soit m arcs (appelés cordes) est le coarbre associé.

- En décomposant les colonnes de A et D en colonnes correspondant aux arcs de \mathcal{A} et à ceux de \mathcal{C} on aura le résultat cherché [2]

$$\begin{cases} A \rightarrow A_1, A_2 \\ \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}, \mathcal{C} & A_1, D_2 \text{ régulières.} \\ D \rightarrow D_1, D_2 \end{cases}$$

On se ramène donc à extraire de \mathcal{R} un arbre maximal ce qui est très simple. On peut de plus montrer qu'en renumérotant arcs et noeuds de \mathcal{R} on aboutit à une matrice A_1 triangulaire ce qui simplifie le calcul de Q_1^0 .



$t=10 . n=8 . m=3$

Figure 2. — Décomposition d'un graphe.

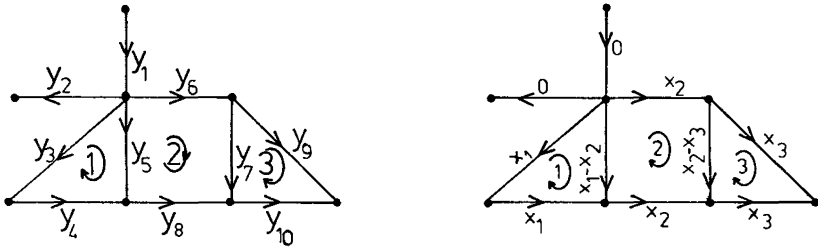


Figure 3. — Systèmes (S₁) et (S̄).

4. Résolution de (S̄) par Newton

Le système (S̄) obtenu s'explique comme précisé en : $F(X) = 0$ soit

$$f_i(X) \equiv \sum_{j=1}^i \varepsilon_j^i h\left(q_j^0 + \sum_{l=1}^m \varepsilon_j^l x_l\right) = 0 \quad i = 1 \dots m. \tag{12}$$

La méthode de Newton s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l} X^0 \text{ donné (nul)} \\ X^{r+1} = X^r - [C^r]^{-1} F(X^r) \quad r = 0, 1, \dots \end{array} \right\} \tag{13}$$

où $C^r = F'(X^r)$ jacobienne de F en X^r , matrice qui a comme on le verra une structure bien particulière.

En posant $Z^r = X^{r+1} - X^r$ et $P^r = -F(X^r)$ nous aurons à résoudre à chaque itération le système d'ordre m

$$C^r Z^r = P^r \quad r = 0, 1, \dots \tag{14}$$

En définitive nous avons

$$\left. \begin{array}{l} Q^0 \text{ d'équilibre : } AQ^0 = B \\ X^0 \text{ donné (nul)} \\ C^r Z^r = P^r \\ X^{r+1} = X^r + Z^r \\ Q^{r+1} = Q^0 + D^T X^{r+1} \end{array} \right\} \tag{15}$$

Remarque : Nous avons

$$AQ^r = A(Q^0 + D^T X^r) = AQ^0 + AD^T X^r$$

or

$$AD^T = 0 \quad \text{donc} \quad AQ^r = AQ^{r-1} = \dots = AQ^0 = B \Rightarrow$$

$$AQ^r = B \quad r = 0, 1, \dots \quad (16)$$

L'équilibre des débits aux nœuds est donc toujours conservé.

Récapitulation : La méthode de Newton appliquée à (S_1) et (\bar{S}) donne :

- * (S_1) : Résolution à chaque pas d'un système linéaire d'ordre t
- * (\bar{S}) : Résolution d'un système simple d'ordre $n - 1$ (pour Q^0). Résolution à chaque pas d'un système linéaire d'ordre m .

Il faut préciser que m est petit devant t (de l'ordre de 30 % en gros pour un grand réseau) d'où la simplification.

5. Sur la convergence de la méthode de Newton

Nous avons supposé pour (S_1) (donc (\bar{S})) l'existence et l'unicité de la solution Q^* (donc X^*).

La forme de la fonction perte de charge vue en (2) (avec $\lambda = 1$) indique que h est continue et deux fois dérivable donc f_i l'est également et $\partial f_i / \partial x_j$ ainsi que $\partial^2 f_i / \partial x_k \partial x_j$ sont définis. Nous sommes donc dans le contexte du théorème d'Ostrowsky [14] relatif à la convergence locale de la méthode de Newton. Nous aurons donc à partir d'un vecteur Q^0 (X^0 est pris nul) proche de la solution Q^* .

Les données physiques du problème peuvent donner des indications à ce sujet. En tout cas les résultats numériques qui nous intéressent ici montrent qu'il y a convergence quel que soit Q^0 .

III. ÉTUDE DE LA STRUCTURE DE (\bar{S})

1. Définitions

- $\mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_m$ les mailles de \mathcal{R}
- $\mathcal{D} = \{ \mathcal{M}_1 \dots \mathcal{M}_m \}$ appelée description de \mathcal{R}
- $\tau_1 \dots \tau_t$ les tronçons de \mathcal{R}
- $M_i = \{ k \in (1 \dots t) / \tau_k \in \mathcal{M}_i \}$ $i = 1 \dots m$ (tronçons de \mathcal{M}_i)
- $M_{ij} = \{ k \in (1 \dots t) / \tau_k \in \mathcal{M}_i \text{ et } \tau_k \in \mathcal{M}_j \}$ $i, j = 1 \dots m, i \neq j$ (tronçons communs à \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_j).
- $\mathcal{S}_k = \{ i \in (1 \dots m) / \tau_k \in \mathcal{M}_i \}$ $k = 1 \dots t$: numéros des mailles $\ni \tau_k$
- $\delta_k = \text{card}(\mathcal{S}_k)$, $k = 1 \dots t$ appelé degré de τ_k ($\delta_k = 0$ signifie que le tronçon τ_k est une antenne). δ_k est en fait le nombre d'éléments non nuls de la k -ième colonne de D .

- $\delta = \sum_{k=1}^t \delta_k$
- $\theta_i = \text{card}(M_i) \ i = 1 \dots m$ appelée taille de la maille \mathcal{M}_i
- $\theta = \sum_{i=1}^m \theta_i$ taille de la description \mathcal{D}
- t_a nombre d'antennes, $\bar{t} = t - t_a$.

2. Etude de C^r et de P^r

D'après (11) et (12) on a

$$c_{ij}^r = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^r) = \sum_{k=1}^t \varepsilon_k^i \varepsilon_k^j h' \left(q_k^0 + \sum_{l=1}^m \varepsilon_k^l x_l^r \right)$$

avec les définitions précédentes on obtient

$$c_{ij}^r = \sum_{k \in M_{i,j}} \varepsilon_k^i \varepsilon_k^j h' \left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \right) \quad i \neq j$$

$$c_{ii}^r = \sum_{k \in M_i} h' \left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \right) \quad \text{car } \varepsilon_k^i \varepsilon_k^i = 1 \text{ ici.}$$

On démontre d'autre part facilement que

$$\forall k_1, k_2 \in M_{i,j} : \varepsilon_{k_1}^i \varepsilon_{k_1}^j = \varepsilon_{k_2}^i \varepsilon_{k_2}^j = \varepsilon_{i,j} = \pm 1.$$

En effet puisqu'il y a deux orientations possibles pour une maille ou un tronçon on a 12 cas de figures qui se ramènent à cause de la symétrie aux 4 suivants :

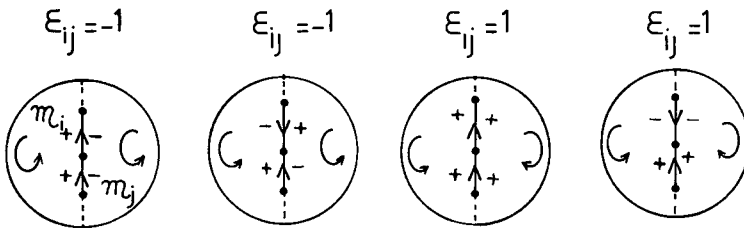


Figure 4. — Mailles adjacentes et tronçons communs.

d'où

$$\left. \begin{aligned} c_{ij}^r &= \varepsilon_{i,j} \sum_{k \in M_{i,j}} h' \left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \right) \quad i \neq j \\ c_{ii}^r &= \sum_{k \in M_i} h' \left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

On obtient de la même manière pour $P^r (= -F(X^r))$:

$$p_i^r = - \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i h \left(q_k^0 + \sum_{l \in \mathcal{D}_k} \varepsilon_k^l x_l^r \right). \tag{17}$$

Propriétés de C^r

- Puisque $M_{ij} = M_{ji}$ donc (16) $\Rightarrow C^r$ symétrique ($\forall r$).
- C^r creuse : si M_i et M_j n'ont aucun tronçon commun alors $c_{ij}^r = 0$ ($\forall r$).
- C^r conserve une structure unique (emplacement des éléments nuls) $\forall r$.

Pour le réseau de la figure 1 nous avons

$$C^r = \begin{bmatrix} * & * & 0 & | & 0 \\ * & * & * & | & 0 \\ 0 & * & * & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & * \end{bmatrix} \quad \swarrow \text{maille isolée}$$

- C^r est d'autant « plus creuse » que les couples de mailles ayant des tronçons communs sont moins nombreux.

Or ceci dépend étroitement du choix des m mailles de la description \mathcal{D} du réseau.

- Lorsque \mathcal{R} comporte des isthmes (voir fig. 1, tronçon HI) donc des sous-ensembles indépendants de mailles, le système (\bar{S}) peut se décomposer en autant de sous-systèmes indépendants qui seront traités isolément.

- Comme $h(q) = aq |q| \Rightarrow h'(q) \geq 0$. Pour une maille donnée on ne peut avoir tous les débits aux tronçons nuls donc $c_{ii}^r > 0, \forall r, i$.

- Lorsque \mathcal{R} est planaire un choix judicieux des mailles conduit (après la décomposition sus-mentionnée) à une matrice C^r qui est irréductiblement à diagonale dominante [22] donc non singulière. Elle sera alors symétrique définie positive (nous y reviendrons au second papier).

3. Description du réseau

a) *Définition*

A partir d'un graphe \mathcal{R} ayant n noeuds et t arcs il est possible de définir σ cycles élémentaires [8], [19]. A chacun des σ cycles C_i associons le vecteur \tilde{C}_i :

$$\tilde{C}_i \in \mathbb{R}^t : \tilde{C}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ssi l'arc } j \notin C_i \\ 1 & \text{ssi l'arc } j \in C_i \text{ et est de même sens que } C_i \\ -1 & \text{ssi l'arc } j \in C_i \text{ et est de sens opposé.} \end{cases} \tag{18}$$

Les σ vecteurs \tilde{C}_i forment un espace vectoriel V_σ dont la dimension est précisément le nombre cyclomatique m du graphe (réseau) \mathcal{R} . Pour avoir une description \mathcal{D} de \mathcal{R} il suffit d'exhiber une base de V_σ (le nombre γ de bases possibles de V_σ est toujours majoré par C_σ^m).

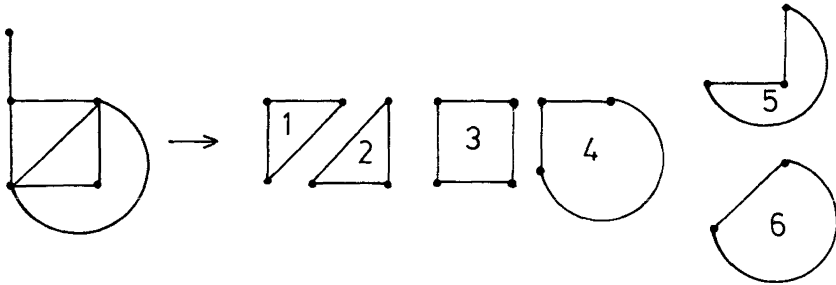


Figure 5. — Cycles élémentaires d'un graphe.

$\{M_1, M_2, M_5\}$ est une base alors que $\{M_1, M_2, M_3\}$ ne l'est pas.

b) Détermination de \mathcal{D}

En utilisant des résultats de théorie des graphes on opère comme suit

- On extrait de \mathcal{R} un arbre maximal \mathcal{A} et son coarbre associé \mathcal{C} qui a m cordes.
- Par définition une corde de \mathcal{C} crée dans \mathcal{A} un cycle élémentaire unique. Les m cordes introduites puis supprimées une par une créeront m cycles élémentaires qui forment par définition [8] une base de cycles d'où la description \mathcal{D} .

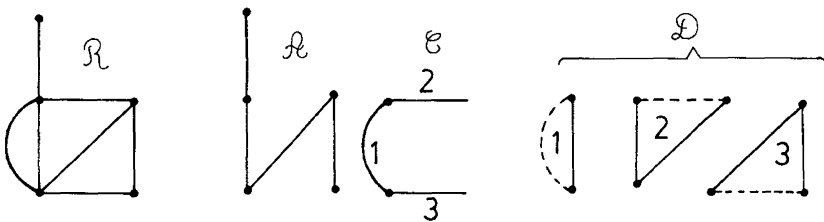


Figure 6. — Détermination d'une base de cycles.

La nature de la description \mathcal{D} se répercute sur la structure de la matrice C' . En fait on peut dire qu'en général C' est d'autant plus creuse que la taille de \mathcal{D} est faible. Il convient donc de chercher à « optimiser » \mathcal{D} i.e. minimiser θ .

Ce problème de base de taille minimale est connue en théorie des graphes [20]. On en verra l'extrême importance dans le second papier

4. Complexité du calcul

a) *Evaluations*

Posons

$$q_k^r = q_k^0 + \sum_{i \in \mathcal{S}_k} \varepsilon_k^i x_i^r \quad k = 1, \dots, t \tag{19}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} c_{ij}^r &= \varepsilon_{ij} \sum_{k \in M_{ij}} h'(q_k^r) \\ c_{ii}^r &= \sum_{k \in M_i} h'(q_k^r) \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

$$p_i^r = - \sum_{k \in M_i} \varepsilon_k^i h(q_k^r). \tag{21}$$

A chaque itération le calcul des éléments de C^r et P^r exige l'évaluation des quantités $h(q_k^r)$ et $h'(q_k^r)$.

Nous avons remarqué en II.2 que dans le système (\bar{S}) les t_a tronçons antennes n'interviennent pas, de ce fait le nombre de tronçons (donc d'inconnues q_k) rentrant dans le calcul est $\bar{t} = t - t_a$.

Si η_h^r et $\eta_{h'}^r$ sont les nombres d'évaluations de h et h' par itération nous aurons

$$\eta_h^r = \eta_{h'}^r = \eta_h = \eta_{h'} = \bar{t} \quad \forall r \tag{22}$$

ces nombres sont donc constants et indépendants de la description \mathcal{D} .

b) *Occurrences*

Au cours d'une itération les valeurs $h(q_k^r)$ et $h'(q_k^r)$ (évaluées une fois pour toutes) interviennent en fait plusieurs fois. On peut facilement montrer que les nombres d'occurrences μ_k^r et $\bar{\mu}_k^r$ de $h(q_k^r)$ et $h'(q_k^r)$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mu_k^r &= \mu_k = \text{card}(\mathcal{S}_k) = \delta_k (= |\{ i \in (1 \dots m) / k \in M_i \}|) \quad \forall r \\ \bar{\mu}_k^r &= \bar{\mu}_k = |\{ i \in (1 \dots m) / k \in M_i \}| \\ &\quad + 2 |\{ (i, j) \in (1 \dots m)^2, \quad i \neq j / k \in M_{ij} \}| \quad \forall t \\ &= \delta_k + 2 C_{\delta_k}^2 = (\delta_k)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \mu &= \sum \mu_k = \delta = \theta \quad \text{en fait} \\ \bar{\mu} &= \sum \bar{\mu}_k = \sum (\delta_k)^2 < \theta^2. \end{aligned} \right.$$

On remarque donc que la minimisation de θ , d'une part maximise le nombre d'éléments nuls de C^r et d'autre part minimise le nombre d'opérations dans le calcul des coefficients de C^r et P^r .

Remarque : Pour réduire θ nous avons procédé comme suit : on détermine comme précisé une base quelconque de cycles ensuite par des opérations d'intersections logiques entre les cycles on en déduit des bases dont les tailles décroissent de plus en plus jusqu'à stabilisation. (Le minimum obtenu est un minimum local en fait.)

IV. EXPÉRIMENTATIONS NUMÉRIQUES

1. Réseaux étudiés

Nous avons traité un ensemble de 4 réseaux de distribution d'eau potable provenant de 3 villes tunisiennes : Testour bas (1), Testour haut (2), Medjez-El Bab (3), La Chebba (4).

TABLEAU 1
Caractéristiques des 4 réseaux

Réseau	n	t	t_a	\bar{t}	m	θ	α	θ^0	α^0
1	7	9	1	8	3	10	77,8	12	100
2	12	16	1	15	5	19	52,0	26	60
3	26	34	8	26	9	37	35,8	42	46,7
4	36	52	10	42	17	69	24,6	80	30,8

(θ^0 taille de la description de départ, α^0 le pourcentage d'éléments non nuls de C' , θ taille de la description adoptée et α le pourcentage associé).

Il est à remarquer que plus le réseau est grand plus C' est creuse, ainsi pour un réseau non traité ici provenant de la ville de Tunis on a obtenu :

n	t	t_a	\bar{t}	m	θ	α	θ^0	α^0
130	228	5	223	99	413	5,76	668	18,25

2. Données calculatoires

* La relation débit-perte de charge a été prise sous la forme

$$\zeta = aq |q| \quad (23)$$

où a est une constante positive se notant

$$a = \gamma l/d^5 \quad (24)$$

l étant la longueur de la conduite et d son diamètre ; γ dépend entre autres du matériau et du nombre de Reynolds (pour être plus rigoureux disons que dans certains cas γ dépend aussi du débit q).

* Les calculs préliminaires donnant la description \mathcal{D} et la distribution Q^0 de départ bien que programmés ont été effectués ici à la main vue leur simplicité (ce ne fut pas le cas pour le grand réseau de Tunis).

3. Tests comparatifs

Afin de mieux voir l'originalité de la technique de décomposition étudiée (méthode 1) nous avons effectué les tests suivants :

* Résolution directe du système (S_1) d'ordre t par la méthode de Newton (méthode 3).

* Vue la structure particulière de la jacobienne J'_G nous avons adopté la technique de partitionnement suivante (méthode 2)

$$J'_G = \begin{bmatrix} A \\ D^r \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc|c} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n-1} \\ \xleftrightarrow{m} \end{array} & & \\ \hline & \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \end{array} & \begin{array}{c} \updownarrow n-1 \\ \updownarrow m \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{cc} D'_1 & D'_2 \end{array} & & \\ \hline \end{array} \quad A_1, D'_2 \text{ inversibles}$$

Pour obtenir une telle décomposition on procédera comme on l'a déjà fait auparavant (II.3) pour A et D c'est-à-dire grâce à la détermination d'un arbre maximal et du coarbre associé dans \mathcal{R} .

Remarque : Nous avons vu que $D^r = DE^r$ où E^r est une matrice diagonale d'ordre t (voir II.1) dont le terme général est $h'(q'_i)$ ($i = 1 \dots t$). De ce fait on aura

$$\begin{cases} D'_1 = D_1 E'_1 \\ D'_2 = D_2 E'_2 \end{cases} \quad [D] [E^r] \rightarrow [D_1 \quad | \quad D_2] \quad \begin{bmatrix} E'_1 & | & 0 \\ \hline 0 & | & E'_2 \end{bmatrix}$$

Le système (3.1) devient alors

$$(25) \quad \begin{cases} A_1 Z'_1 + A_2 Z'_2 = -AQ^r + B & (25.1) \\ D'_1 Z'_1 + D'_2 Z'_2 = -DH(Q^r) & (25.2) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} Z_1^r &= -A_1^{-1} A_2 Z_2^r + A_1^{-1} (B - A Q^r) \\ (D_2^r - D_1^r A_1^{-1} A_2) Z_2^r &= -DH(Q^r) - D_1^r A_1^{-1} (B - A Q^r) \end{aligned} \quad (25.3)$$

soit : le système d'ordre m

$$\tilde{D}^r Z_2^r = \tilde{P}^r \quad (26)$$

on se ramène donc à :

- inverser la matrice A_1 d'ordre $n - 1$;
- résoudre à chaque itération le système (26) ce qui fournit Z_2^r . On en déduira Z_1^r à partir de (25.3).

Il convient de préciser puisque A_1^{-1} est calculée qu'on peut introduire quelques simplifications en partant d'un Q^0 d'équilibre ($AQ^0 = B$). De plus la matrice \tilde{D}^r , à la différence de C^r n'est pas symétrique (on peut montrer que $C^r = T \cdot D^r$ où T est une matrice d'ordre m régulière).

3. Résultats

- * Les calculs ont été exécutés sur miniordinateur IBM 1130.
- * Le critère d'arrêt des itérations a été :

$$|h(q_k^{r+1}) - \bar{h}(q_k^r)| \leq \varepsilon \quad \forall k \quad (\varepsilon \text{ fixé}).$$

Le tableau suivant donne le nombre d'itérations nit pour avoir la précision ε et les temps d'exécution ω_i (l'unité importe peu ici, ce sont les rapports qui sont à noter).

Réseau	ε	nit	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1/ω_2	ω_1/ω_3
1	10^{-3}	5					
	10^{-4}	5					
	10^{-5}	6	6	8	13	0,75	0,46
2	10^{-3}	6					
	10^{-4}	7					
	10^{-5}	7	11	21	42	0,52	0,26
3	10^{-3}	5					
	10^{-4}	6					
	10^{-5}	7	23	100	287	0,23	0,08
4	10^{-3}	9					
	10^{-4}	10					
	10^{-5}	10	95	513	1 362	0,19	0,07

$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 : \text{temps méthode 1} \\ \omega_2 : \text{temps méthode 2} \\ \omega_3 : \text{temps méthode 3} \end{array} \right.$ en secondes.

Remarques

• Comme on a choisi de partir du même Q^0 pour les trois méthodes le nombre d'itérations est le même.

• Les rapports entre les temps de calcul sont significatifs et illustrent l'intérêt de la méthode de réduction 1. Le gain augmente en fait avec la taille du réseau, de plus la structure particulière de C^r (creuse et symétrique) permet de choisir des techniques adéquates lors de la résolution du système $C^r Z^r = P^r$.

Conclusion : Nous avons essayé dans ce papier de présenter une méthode simple pour la résolution d'un problème de réseau maillé de distribution d'eau. La théorie des graphes a été un support fondamental.

Dans un second papier nous procéderons à l'analyse d'autres méthodes dont celle de H. Cross encore assez utilisée et qui démarre du système (\bar{S}) mis en évidence ici.

RÉFÉRENCES

- [1] A D'AURIAC, *A propos de l'unicité de la solution dans les problèmes de réseaux mailles*, La Houille Blanche, mai-juin 1947, pp 209-211
- [2] M S BAZARAA, J J JARVIS, *Linear Programming and Network Flows* John Wiley & Sons
- [3] C BERGE, *Graphes et Hypergraphes* Dunod
- [4] C CAO, *Sulla convergenza del metodo di Cross* VIII Convegno di Idraulica Pisa-Apr 1963 Com D 8, 12 p
- [5] H CROSS, *Analysis of flow in networks of conduits or conductors* Bull 286 Eng Exp St-Univ of Illinois Urbana Nov 1936, 29 p
- [6] Ch DUBIN, *Le calcul des réseaux mailles, contribution à l'application pratique de la méthode Hardy Cross* La Houille Blanche, mai-juin 1947, pp 213-217
- [7] Ch DUBIN, *Le calcul des réseaux de distribution d'eau par la méthode de Hardy Cross* La tech Sanitaire et Mun, nov-déc 1948, pp 129-134
- [8] J KUNTZMANN, *Théorie des réseaux* Graphes Dunod
- [9] P F LEMIEUX, *New developments in water distribution system solution* Canadian Hydraulics conf Univ of Alberta, Edmonton May 1973, 10 p
- [10] K T H LIU, *The numerical analysis of water supply networks by digital computers* Com I A H R, vol 1, Subj A, sept 1969, pp A5, 1-A 5 8
- [11] Z MAHJOUR, *Etude et résolution de réseaux de distribution d'eau par la méthode de Hardy Cross* Com Col Meth Num dans les Sc de l'Ing, Tunis, mai 1980
- [12] Z MAHJOUR, *Sur la méthode de Hardy Cross pour la résolution de problèmes de réseaux mailles* Sem A N, Grenoble, janv 1981, 36 p
- [13] Z MAHJOUR, *Autour de la résolution d'un problème de réseau maille* Com Col A N Aussois, mai 1981
- [14] J M ORTEGA, W C RHEINOLDT, *Iterative solution of Nonlinear Equations in Several Variables* Academic Press, 1970
- [15] Y OUELLET, *Théorie de base du balancement hydraulique d'un réseau d'acqueduc* Com Col Balancement hyd des réseaux d'acqueduc, A Q T E, oct 1974, 123 p
- [16] P RENOARD, *Réseaux mailles* Tech de l'Ing, sept 1971, pp A 740 1-A 740 5
- [17] F ROBERT, *Matrices non négatives et normes vectorielles* Cours INP, Grenoble, 1974
- [18] F ROBERT, *Analyse numérique itérative* Cours INP, Grenoble, 1975
- [19] M SAKAROVITCH, *Techniques mathématiques de la recherche opérationnelle* II El de th graphes, cours USM, Grenoble, 1977
- [20] M M SYSLO, *On characterizations of cycle graphs* Com Col CNRS Pbs Comb et th graphes, Orsay, juill 1976, 4 p
- [21] Cl THIRRIOT, E HADJ-TAIEB, Z MAHJOUR, *Etude du projet optimal de distribution d'eau de la chebba* Rpt ENIT SONEDE, Tunis, nov 1978
- [22] R S VARGA, *Matrix iterative analysis* Prentice-Hall, 1962