

PH. DESTUYNDER

**Comparaison entre les modèles tridimensionnels
et bidimensionnels de plaques en élasticité**

RAIRO. Analyse numérique, tome 15, n° 4 (1981), p. 331-369

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_4_331_0

© AFCET, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPARAISON ENTRE LES MODÈLES TRIDIMENSIONNELS ET BIDIMENSIONNELS DE PLAQUES EN ÉLASTICITÉ (*)

par Ph. DESTUYNDER ⁽¹⁾

Communiqué par P G CIARLET

Résumé — Nous comparons les solutions des modèles tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité linéaire lorsque l'épaisseur devient infiniment petite. Nous donnons des résultats de convergence et d'estimation d'erreur, en mettant en évidence le rôle joué par le type des conditions aux limites sur les résultats obtenus.

Abstract. — We compare the solutions of three-dimensional linear plate models and two-dimensional ones as the thickness becomes infinitely small. We prove convergence results and we give error estimates, pointing out the influence of boundary conditions on the obtained results

1. INTRODUCTION

Dans un article précédent [1] avec P. G. Ciarlet, nous avons donné une formulation générale de la méthode des développements asymptotiques introduite par Gol'denveizer [2] pour les plaques, et par Rigolot [3], pour les poutres. Cela nous a permis par exemple de retrouver sans aucune hypothèse a priori le modèle biharmonique pour les plaques en flexion. Nous rappellerons brièvement le formalisme de [1] dans le premier paragraphe de cet article. Dans le second paragraphe, nous appliquons la méthode pour retrouver le modèle bidimensionnel des plaques simplement appuyées. Pour ce type de conditions aux limites, nous donnons une estimation d'erreur optimale entre les solutions des modèles bidimensionnel et tridimensionnel.

Dans le troisième paragraphe, nous abordons l'étude de l'erreur pour les plaques encastées. Nous généralisons la loi de comportement de Hooke utilisée jusqu'ici, au cas d'une loi de comportement pour un milieu anisotrope et inhomogène.

(*) Manuscrit reçu en décembre 1980.

(¹) Service Informatique et Mathématiques Appliquées EDF Direction des Études et Recherches, Clamart

Nous définissons alors le modèle limite de plaque lorsque l'épaisseur devient infiniment petite. L'existence et l'unicité d'une solution sont démontrées sous des hypothèses très générales sur les forces appliquées à la plaque. Nous prouvons également la convergence de la solution du modèle tridimensionnel vers celle du modèle limite. Enfin avec des hypothèses de régularité sur les forces appliquées, nous estimons la vitesse de convergence vis-à-vis de l'épaisseur. Nous mettons ainsi en évidence un phénomène de « couches limites » au voisinage de frontière latérale de la plaque (portion encastree).

Dans la suite, nous ferons appel aux résultats suivants dus respectivement à Brezzi [4] et à Babuška [5].

THÉORÈME 1 : Soient Σ et V deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\cdot\|_{\Sigma}$ et $\|\cdot\|_V$, et soient $a : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $B : \Sigma \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $F : V \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, des formes bilinéaires et linéaires continues, vérifiant

$$\begin{cases} \forall \tau \in \Sigma, a(\tau, \tau) \geq c \|\tau\|_{\Sigma}^2; \\ \forall v \in V, \sup_{\tau \in \Sigma, \tau \neq 0} \frac{B(\tau, v)}{\|\tau\|_{\Sigma}} \geq c \|v\|_V; \end{cases}$$

(c désignant des constantes diverses, indépendantes de τ et de u). Alors, il existe un et un seul élément $(\sigma, u) \in \Sigma \times V$ tel que

$$\begin{cases} \forall \tau \in \Sigma, a(\sigma, \tau) + B(\tau, u) = g(\tau), \\ \forall v \in V, B(\sigma, v) = F(v). \quad \blacksquare \end{cases}$$

THÉORÈME 2 : Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert de produits scalaires notés respectivement $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ et $(\cdot, \cdot)_{H_2}$. Soit $S(\sigma, v)$ une forme bilinéaire sur $H_1 \times H_2$, telle que

- (i) $|S(\sigma, v)| \leq c_1 \|\sigma\|_{H_1} \|v\|_{H_2};$
- (ii) $\forall \sigma \in H_1, \sup_{v \in H_2} \frac{S(\sigma, v)}{\|v\|_{H_2}} \geq c_2 \|\sigma\|_{H_1};$
- (iii) $\forall \sigma \in H_1, S(\sigma, v) = 0 \Rightarrow v = 0.$

Soit, enfin, $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur H_2 . Alors, il existe un et un seul élément σ de H_1 , tel que

$$\forall v \in H_2, S(\sigma, v) = L(v). \quad \blacksquare$$

Par ailleurs, nous ferons la convention que les indices latins varient de 1 à 3 tandis que les indices grecs varient de 1 à 2. Nous ferons aussi la convention de sommation sur les indices répétés.

1.1. Le problème tridimensionnel des plaques [1]

Nous désignerons par ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 ayant une frontière γ régulière. Nous poserons également

$$\begin{aligned} \Omega^\varepsilon &= \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[, & \Gamma_0^\varepsilon &= \gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[, \\ \Gamma_+^\varepsilon &= \omega \times \{ \varepsilon \}, & \Gamma_-^\varepsilon &= \omega \times \{ -\varepsilon \}, \end{aligned}$$

si bien que la frontière de Ω^ε est partitionnée en $\Gamma_0^\varepsilon, \Gamma_+^\varepsilon, \Gamma_-^\varepsilon$. Nous supposons que la plaque considérée occupe le volume $\bar{\Omega}^\varepsilon$ dans \mathbb{R}^3 . Le problème est alors de trouver un champ de déplacements et un champ de contraintes définis sur Ω^ε , satisfaisant simultanément l'équation d'équilibre et l'équation de comportement. Afin de fixer les idées, nous supposons, dans ce paragraphe que les déplacements s'annulent sur Γ_0^ε . Nous avons montré que cette condition redonne des conditions aux limites du type « encastrement » pour le modèle bidimensionnel de plaque [1].

Nous poserons ainsi,

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Sigma}^\varepsilon &= \{ \tau \mid \tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^9, \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, \\ \underline{V}^\varepsilon &= \{ v \mid v = (v_i) \in H^1(\Omega^\varepsilon), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

et le problème tridimensionnel des plaques (qui admet une solution unique) est de

$$\left. \begin{aligned} \text{trouver } (\sigma, u) &\in \underline{\Sigma}^\varepsilon \times \underline{V}^\varepsilon \text{ tel que } \\ \forall \tau \in \underline{\Sigma}^\varepsilon, &a(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0, \\ \forall v \in \underline{V}^\varepsilon, &B(\sigma^\varepsilon, v) = F(v), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} a(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{PP} \tau_{PP} \right), \quad E > 0, 0 < \nu < \frac{1}{2}, \\ B(\tau, v) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \tau_{ij} \partial_i v_j, \\ F(v) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} f_i v_i - \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} g_i v_i. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Les densités de forces (f_i, g_i) sont telles que $F(\cdot)$ définit un élément de $\underline{V}^{\varepsilon'}$ et E et ν désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson de la plaque.

1.2. Changement d'ouvert de référence

La dépendance de la solution (σ, u) de (2) vis-à-vis du paramètre ε est complexe. Afin de pouvoir appréhender le comportement de (σ, u) en fonction de ε , nous utiliserons une technique de changement d'échelle suivant la coordonnée x_3 . Nous poserons pour cela :

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \omega \times]-1, 1[, & \Gamma_0 &= \gamma \times]-1, 1[, \\ \Gamma_+ &= \omega \times \{1\} , & \Gamma_- &= \omega \times \{-1\} , \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et nous définirons, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'application

$$F^\varepsilon : X = (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega} \rightarrow F^\varepsilon(X) = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \bar{\Omega}^\varepsilon ,$$

avec

$$F^\varepsilon(X) = X^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \quad \text{et} \quad x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3 .$$

Ainsi, une fonction ϕ définie sur Ω^ε , se transforme en une fonction ϕ^ε définie sur Ω par

$$\phi^\varepsilon(X) = \phi \circ F^\varepsilon(X) .$$

Nous avons également les correspondances suivantes :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \phi \, d\Omega^\varepsilon = \varepsilon \int_{\Omega} \phi^\varepsilon \, d\Omega ,$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right)^\varepsilon = \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x_\alpha} , \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x_3} .$$

En fait, ce changement d'échelle peut être interprété comme un changement de paramétrisation d'une variété. Il lui correspond donc des changements de coordonnées dans les espaces tangent, co-tangent, etc... qui conduisent à transformer les déplacements, les forces et les contraintes, de la façon suivante :

$$v \in \mathcal{V}^\varepsilon , v = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow \left(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} v_3^\varepsilon \right) , \quad \text{où} \quad v_i^\varepsilon = v_i \circ F^\varepsilon ; \quad (5)$$

$$\tau \in \mathcal{T}^\varepsilon , \tau = (\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha 3}, \tau_{33}) \rightarrow (\tau_{\alpha\beta}^\varepsilon, \varepsilon \tau_{\alpha 3}^\varepsilon, \varepsilon^2 \tau_{33}^\varepsilon) , \quad \text{où} \quad \tau_{ij}^\varepsilon = \tau_{ij} \circ F^\varepsilon ; \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f &= (f_1, f_2, f_3) \rightarrow (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, \varepsilon f_3^\varepsilon) , \\ g &= (g_1, g_2, g_3) \rightarrow \varepsilon (g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon, \varepsilon g_3^\varepsilon) . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

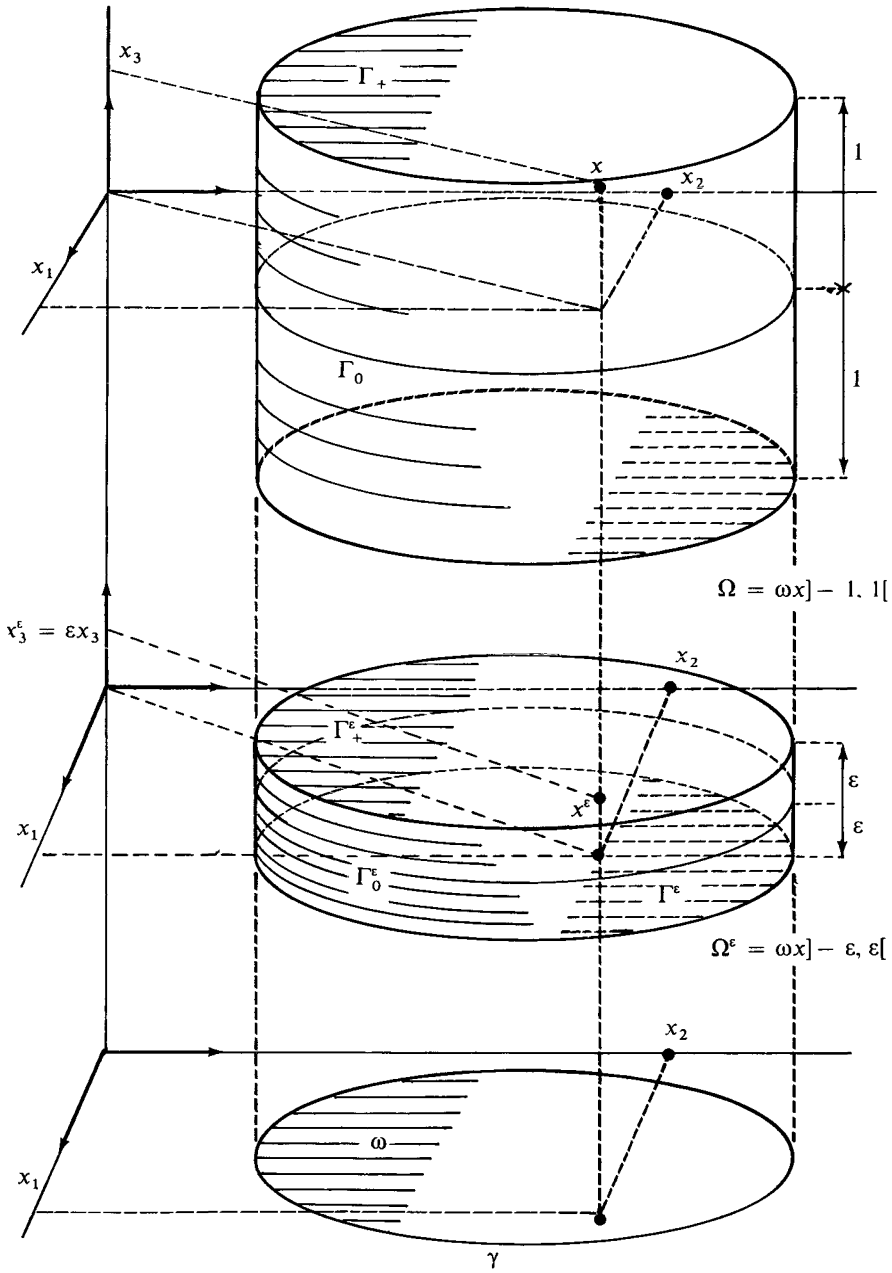


Figure 1.

Remarque 1 : Il peut sembler arbitraire de procéder comme nous l'avons fait, du moins en ce qui concerne les forces appliquées. On peut faire l'observation suivante. Le problème que nous traitons est linéaire. Il est donc bien évident que la solution correspondant à un système de forces appliquées à la plaque est la somme des solutions correspondant aux différentes forces appliquées séparément. Par conséquent, il est tout à fait loisible d'effectuer la transformation linéaire de notre choix sur les forces appliquées et de supposer ensuite qu'elles ne dépendent pas de ε .

Définissons maintenant les espaces

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{V} &= \{ v \mid v = (v_i) \in H^1(\Omega), v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \}, \\ \mathcal{\Sigma} &= \{ \tau \mid \tau = (\tau_{ij}) \in L^2(\Omega), \tau_{ij} = \tau_{ji} \}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

qui seront munis de leur norme naturelle respective

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \|v\|_{\mathcal{V}} = \left[\sum_{i=1,3} \|v_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right]^{1/2}, \\ \tau &\rightarrow \|\tau\|_{\mathcal{\Sigma}} = \left[\sum_{i,j=1,3} \|\tau_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Un simple calcul permet alors d'établir le résultat suivant [1] :

THÉORÈME 3 : Désignons par $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ l'élément construit à partir de (σ, u) , solution de (2), à l'aide des formules (5), (6); alors, $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est l'unique solution de

$$\left. \begin{aligned} &\text{Trouver } (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \mathcal{\Sigma} \times \mathcal{V} \text{ tel que} \\ &\forall \tau \in \mathcal{\Sigma}, a_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0, \\ &\forall v \in \mathcal{V}, B(\sigma^\varepsilon, v) = F(v), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où nous avons posé, pour des éléments σ, τ, v , arbitraires,

$$\begin{aligned} a_0(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu} \tau_{\mu\mu}, \\ a_2(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\alpha 3} - \frac{\nu}{E} \{ \tau_{\mu\mu} \sigma_{33} + \tau_{33} \sigma_{\mu\mu} \}, \\ a_4(\sigma, \tau) &= \int_{\Omega} \frac{1}{E} \sigma_{33} \tau_{33}, \\ F(v) &= - \int_{\Omega} f_i v_i - \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i, \\ B(\tau, v) &= - \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i v_j. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dans [1], nous avons calculé le premier terme (σ^0, u^0) d'un éventuel développement en puissance de ε^2 de la solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$. Avec l'hypothèse $f_\alpha \in H^1(\Omega)$, $f_3 \in L^2(\Omega)$, $g_\alpha \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, $g_3 \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ nous avons montré que (σ^0, u^0) est l'unique solution du système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } (\sigma^0, u^0) \in \underline{\Sigma} \times \underline{V} \text{ tel que :} \\ \forall \tau \in \underline{\Sigma} \quad a_0(\sigma^0, \tau) + B(\tau, u^0) = 0, \\ \forall v \in \underline{V} \quad B(\sigma^0, v) = F(v). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

En explicitant (10), nous avons retrouvé par exemple le modèle biharmonique pour les plaques en flexion. Dans la suite nous étudions l'erreur entre $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et (σ^0, u^0) en discutant sur les conditions aux limites imposées à la plaque. C'est là la contribution de cet article.

2. CONDITIONS AUX LIMITES DU TYPE « PLAQUE SIMPLEMENT POSÉE »

Nous envisagerons le modèle tridimensionnel sous la forme suivante (cf. § 1) :

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } (\sigma, u) \in \underline{\Sigma}^e \times \underline{W}^e \text{ tel que} \\ \forall \tau \in \underline{\Sigma}^e, \int_{\Omega} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{pp} \delta_{ij} \right) \tau_{ij} - \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i u_j = 0, \\ \forall v \in \underline{W}^e, \int_{\Omega} \sigma_{ij} \partial_i v_j = \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

où \underline{W}^e désignera l'espace des déplacements admissibles suivant :

$$\underline{W}^e = \left\{ v \mid v = (v_i) \in (H^1(\Omega^e))^3; v_3 = v_\alpha a_\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e \text{ et } \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} v_\alpha b_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma \right\}, \quad (12)$$

(où $b = (b_\alpha)$ désigne le vecteur unitaire normal à Γ_0^e et $a = (a_\alpha)$ le vecteur tangent unitaire parallèle au plan de ω).

Nous utiliserons également les espaces suivants munis de leurs normes naturelles :

$$\begin{aligned} \underline{\Sigma} &= \{ \tau = (\tau_{ij}) \in (L^2(\Omega))_s^9 \}, \\ \underline{W} &= \left\{ v = (v_i) \in (H^1(\Omega))^3; v_3 = v_\alpha a_\alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \text{ et } \int_{-1}^{+1} v_\alpha b_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

En utilisant les changements de variables et d'inconnues introduits au § 1, nous pouvons écrire le problème (11) sous la forme équivalente ci-dessous :

THÉORÈME 4 : *Si $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ désigne l'élément de $\underline{\Sigma} \times \underline{W}$, construit à partir de (σ, u) , solution de (11) à l'aide des formules (5)-(7) alors $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est l'unique solution du problème*

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \underline{\Sigma} \times \underline{W} \text{ tel que} \\ & \forall \tau \in \underline{\Sigma}, a_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0, \\ & \forall v \in \underline{W}, B(\sigma^\varepsilon, v) = F(v), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

où les notations sont celles introduites au § 1 à l'exception de l'espace \underline{W} , défini en (13). ■

Ici encore nous chercherons la solution $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ sous la forme :

$$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \varepsilon^4(\sigma^4, u^4) + \dots \text{ etc.} \quad (15)$$

En reportant dans (14) l'expression (15) et en identifiant les termes d'ordre zéro en ε , nous obtenons que (σ^0, u^0) doit être solution du problème :

$$\left. \begin{aligned} & \text{Trouver } (\sigma^0, u^0) \in \underline{\Sigma} \times \underline{W} \text{ tel que} \\ & \forall \tau_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4, \int_{\Omega} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^0 \tau_{\mu\mu} - \int_{\Omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta^0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \forall \tau_{\alpha 3} \in (L^2(\Omega))^2, \int_{\Omega} \tau_{\alpha 3} (\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0) = 0, \right\} \quad (17)$$

$$\left. \forall \tau_{33} \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} \tau_{33} \partial_3 u_3^0 = 0, \right\} \quad (18)$$

$$\forall v = \left(\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\alpha v_\beta + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_3 v_\alpha = \int_{\Omega} f_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha v_\alpha, \right. \quad (19)$$

$$\left. (v_\alpha, v_3) \in \underline{W}, \left(\int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^0 \partial_\alpha v_3 + \int_{\Omega} \sigma_{33}^0 \partial_3 v_3 = \int_{\Omega} f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3. \right) \right\} \quad (20)$$

THÉORÈME 5 : *Sous les hypothèses $f_\alpha \in H^1(\Omega)$, $g_\alpha^\pm \in H^1(\omega)$, $f_3 \in L^2(\Omega)$, $g_3^\pm \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, et si la frontière γ est suffisamment régulière, le problème (16)-(20) admet une solution unique obtenue de la façon suivante : u_3^0 peut être identifié avec une fonction de $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ qui est la solution unique, dans cet espace, de l'équation :*

$$\left. \begin{aligned} \forall v_3 \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega), \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \int_{\omega} \{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u_3 \partial_{\alpha\beta} v_3 + \nu \Delta u_3 \Delta v_3 \} = \\ = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f_3 \right) v_3 + \int_{\omega} (g_3^+ + g_3^-) v_3 - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} x_3 f_{\alpha} \right) \partial_{\alpha} v_3 - \int_{\omega} (g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-) \partial_{\alpha} v_3. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Le déplacement horizontal est égal à $\underline{u}_{\alpha}^0 - x_3 \partial_{\alpha} u_3^0$, où $\underline{u}_{\alpha}^0 \in H_0^1(\omega)$ est la solution unique des équations

$$\left. \begin{aligned} \forall v_{\alpha} \in H_0^1(\omega), \frac{2E}{1-\nu^2} \int_{\omega} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}^0) \gamma_{\alpha\beta}(v) + \nu \gamma_{\mu\mu}(\underline{u}^0) \gamma_{\mu\mu}(v) \} = \\ = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f_{\alpha} \right) v_{\alpha} + \int_{\omega} (g_{\alpha}^+ + g_{\alpha}^-) v_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Nous avons également

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{n_{\alpha\beta}^0}{2} + \frac{3x_3}{2} m_{\alpha\beta}^0 \quad (23)$$

où nous avons posé

$$n_{\alpha\beta}^0 = \frac{2E}{(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}^0) + \nu \gamma_{\mu\mu}(\underline{u}^0) \delta_{\alpha\beta} \}, \quad (24)$$

$$m_{\alpha\beta}^0 = \frac{-2E}{3(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^0 + \nu \Delta u_3^0 \delta_{\alpha\beta} \}. \quad (25)$$

Enfin,

$$\sigma_{\alpha 3}^0 = \frac{-E(1-x_3^2)}{2(1-\nu^2)} \partial_{\alpha} \Delta u_3^0 + \frac{g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-}{2} + x_3 \left(\frac{g_{\alpha}^+ + g_{\alpha}^-}{2} \right) - \int_{-1}^{x_3} f_{\alpha} + \left(\frac{1+x_3}{2} \right) \int_{-1}^{+1} f_{\alpha}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^0 = & \left(\frac{2+3x_3-x_3^3}{4} \right) \int_{-1}^{+1} f_3 - \int_{-1}^{x_3} f_3 + \left(\frac{1-x_3^2}{4} \right) \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^+ + g_{\alpha}^-) + \\ & + \left(\frac{x_3-x_3^3}{4} \right) \partial_{\alpha} (g_{\alpha}^+ - g_{\alpha}^-) - \left(\frac{3x_3-x_3^3+2}{4} \right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} \partial_{\alpha} f_{\alpha} + \int_{-1}^{x_3} \int_{-1}^{x_3} \partial_{\alpha} f_{\alpha} \\ & + \frac{g_3^+ - g_3^-}{2} + \frac{x_3(3-x_3^2)}{4} (g_3^+ + g_3^-) + \frac{(x_3+1)(1-x_3^2)}{4} \int_{-1}^{+1} \partial_{\alpha} f_{\alpha}. \end{aligned}$$

La preuve est similaire à celle donnée dans [1], [6].

Posons-nous maintenant le problème de déterminer le terme d'indice 2. L'identification des termes de puissance 2 dans (14) où l'on introduit (15), conduit aux relations suivantes :

$$\forall \tau_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4, \quad \int_{\Omega} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta}^2 \tau_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^2 \tau_{\mu\mu} - \int_{\Omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^2 = \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{33}^0 \tau_{\mu\mu}, \quad (27)$$

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in (L^2(\Omega))^2, \quad \int_{\Omega} \tau_{\alpha 3} (\partial_{\alpha} u_3^2 + \partial_3 u_{\alpha}^2) = \int_{\Omega} \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3}^0 \tau_{\alpha 3}, \quad (28)$$

$$\forall \tau_{33} \in L^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \tau_{33} \partial_3 u_3^2 = - \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^0 \tau_{33}, \quad (29)$$

$$\forall v = \left. \begin{array}{l} (v_{\alpha}, v_3) \in \tilde{W}, \\ \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^2 \partial_{\alpha} v_{\beta} + \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^2 \partial_3 v_{\alpha} = 0, \\ \int_{\Omega} \sigma_{\alpha 3}^2 \partial_{\alpha} v_3 + \int_{\Omega} \sigma_{33}^2 \partial_3 v_3 = 0. \end{array} \right\} \quad (30)$$

Il est facile de voir que si ces équations admettent une solution $(\sigma^2, u^2) \in \Sigma \times \tilde{W}$, alors, elle est unique. Par contre, nous ne pouvons pas toujours montrer l'existence de (σ^2, u^2) dans $\Sigma \times \tilde{W}$. Nous avons néanmoins le

THÉORÈME 6 : Si $\sigma_{\alpha\beta}^0 \in H^2(\Omega)$, $\sigma_{\alpha 3}^0 \in H^1(\Omega)$, $\sigma_{33}^0 \in L^2(\Omega)$, alors on peut déterminer $(\sigma_{\alpha\beta}^2, u^2)$ de façon à ce que (27), (28) et (29) soient vérifiées. ■

Démonstration : L'équation (29) implique

$$\partial_3 u_3^2 = - \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^0 = - \frac{\nu}{E} \left\{ \frac{n_{\mu\mu}^0}{2} + \frac{3 x_3}{2} m_{\mu\mu}^0 \right\}$$

soit

$$u_3^2 = u_3^2 - \frac{\nu}{E} \left\{ \frac{x_3 n_{\mu\mu}^0}{2} + \left(\frac{3 x_3^2 - 1}{4} \right) m_{\mu\mu}^0 \right\}, \quad u_3^2 \in H_0^1(\omega). \quad (32)$$

Considérons maintenant (28), nous obtenons

$$\partial_{\alpha} u_3^2 + \partial_3 u_{\alpha}^2 = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3}^0,$$

soit

$$\partial_3 u_{\alpha}^2 = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{\alpha 3}^0 - \partial_{\alpha} u_3^2 + \frac{\nu}{E} \left\{ \frac{x_3}{2} \partial_{\alpha} n_{\mu\mu}^0 + \left(\frac{3 x_3^2 - 1}{4} \right) \partial_{\alpha} m_{\mu\mu}^0 \right\},$$

dont la solution générale s'écrit

$$u_\alpha^2 = \underline{u}_\alpha^2 - x_3 \partial_\alpha \underline{u}_3^2 + \frac{2(1+\nu)}{E} \left\{ \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3}^0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3}^0 \right\} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{\nu}{2E} \left(x_3^2 - \frac{1}{3} \right) \partial_\alpha n_{\mu\mu}^0 + \frac{\nu}{4E} (x_3^3 - x_3) \partial_\alpha m_{\mu\mu}^0, \underline{u}_\alpha^2 \in H_0^1(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Par ailleurs, nous chercherons \underline{u}_3^2 dans $H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ de façon à ce que $\underline{u}_\alpha^2 \in H^1(\Omega)$.

Il apparaît clairement que les hypothèses $\sigma_{\alpha 3}^0 \in H^1(\Omega)$ et $n_{\mu\mu}^0, m_{\mu\mu}^0 \in H^2(\omega)$ sont nécessaires pour avoir $u_i^2 \in \underline{W}$. En fait, d'après (24), (25) et (26) ces conditions sont remplies si

$$\Delta u_3^0 \in H^2(\omega), \quad g_\alpha^\pm \in H^1(\omega), \quad f_\alpha \in H^1(\Omega).$$

Posons $g = \Delta u_3^0$; nous savons, d'après la définition de u_3^0 que $\Delta g \in L^2(\omega)$, mais aussi que $g \in L^2(\omega)$, et qu'en outre, $g = 0$ sur γ (ce qui a un sens). Par conséquent, si l'ouvert est de classe C^1 ou est convexe et lipschitzien, nous avons (cf. Necas [7]) $g \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$, ce qui assure que

$$\sigma_{\alpha 3}^0 \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad m_{\mu\mu}^0 \in H^2(\omega).$$

Revenons, maintenant, à l'équation définissant \underline{u}_α^0 . Il s'agit d'un problème classique d'élasticité; la régularité de ce type d'équations ayant été étudiée par différents auteurs (cf. Necas [7]), nous savons que, si la frontière γ est de classe C^2 et si $f_\alpha \in H^1(\Omega)$, $g_\alpha^\pm \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, alors $\underline{u}_\alpha^0 \in H^3(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ et, par conséquent, $n_{\mu\mu}^0 \in H^2(\omega)$. Les hypothèses du théorème 4 sont satisfaites si γ est de classe C^2 .

L'équation (17) est équivalente à

$$\sigma_{\alpha\beta}^2 = \frac{n_{\alpha\beta}^2}{2} + \frac{3x_3}{2} m_{\alpha\beta}^2 + \sigma_{P\alpha\beta}^2 \quad (34)$$

où

$$n_{\alpha\beta}^2 = \frac{2E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u^2) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^2) \delta_{\alpha\beta} \} \quad (35)$$

$$m_{\alpha\beta}^2 = \frac{-2E}{3(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^2 + \nu \Delta u_3^2 \delta_{\alpha\beta} \} \quad (36)$$

$$\sigma_{P\alpha\beta}^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u_P^2) + \nu \delta_{\alpha\beta} \gamma_{\mu\mu}(u_P^2) \} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^0 \delta_{\alpha\beta} \quad (37)$$

avec

$$u_{P\alpha}^2 = \frac{2(1+\nu)}{E} \left(\int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3}^0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} \sigma_{\alpha 3}^0 \right) + \frac{\nu}{2E} \left(x_3^2 - \frac{1}{3} \right) \partial_\alpha n_{\mu\mu}^0 + \frac{\nu}{4E} (x_3^2 - 1) x_3 \partial_\alpha m_{\mu\mu}^0. \quad (38)$$

Restreignant dans l'équation (30) les champs v_α à $H_0^1(\omega)$, nous obtenons que u_α^2 est la solution unique du problème

Trouver $u_\alpha^2 \in (H_0^1(\omega))^2$ tel que

$$\left. \begin{aligned} \forall v_\alpha \in (H_0^1(\omega))^2, \int_\omega \frac{2E}{(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u^2) \gamma_{\alpha\beta}(v) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^2) \gamma_{\mu\mu}(v) \} &= \\ &= - \int_\Omega \sigma_{P\alpha\beta}^2 \partial_\alpha v_\beta \\ &= - \frac{\nu}{1-\nu} \int_\omega \left(\int_{-1}^{+1} \sigma_{33}^0 \right) \partial_\alpha v_\alpha - \frac{E}{1-\nu^2} \int_\omega \int_{-1}^{+1} (1-\nu) \gamma_{\alpha\beta}(u_P^2) \gamma_{\alpha\beta}(v) + \\ &\quad + \nu \gamma_{\mu\mu}(u_P^2) \gamma_{\mu\mu}(v). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Reprenons maintenant les deux équations (30) et (31). Pour des déplacements de la forme

$$v_\alpha = -x_3 \partial_\alpha v, \quad v_3 = v, \quad \text{où } v \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega), \quad (40)$$

nous obtenons

$$\int_\omega \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \{ (1-\nu) \partial_{\alpha\beta} u_3^2 \partial_{\alpha\beta} v_3 + \nu \Delta u_3^2 \Delta v_3 \} = - \int_\Omega x_3 \sigma_{P\alpha\beta}^2 \partial_{\alpha\beta} v_3, \quad (41)$$

équation qui détermine u_3^2 de manière unique. ■

Remarque 2 : En général, on ne peut calculer ni $\sigma_{\alpha 3}^2$ ni σ_{33}^2 de telle façon que les équations (30) et (31) soient satisfaites.

Nous avons le résultat suivant sur les vitesses de convergence :

THÉORÈME 7 : *Sous les hypothèses du théorème 6, on a les estimations suivantes :*

$$\| \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^0 - \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^2 \|_{(L^2(\Omega))^4} \leq c\varepsilon^2, \quad (42)$$

$$\| \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^0 \|_{(L^2(\Omega))^2} \leq c\varepsilon, \quad (43)$$

$$\| \sigma_{33}^e - \sigma_{33}^0 \|_{L^2(\Omega)} \leq c, \tag{44}$$

$$\| u^e - u^0 - \varepsilon^2 u^2 \|_W \leq c\varepsilon^2. \quad \blacksquare \tag{45}$$

Démonstration : Introduisons les variables d'écart :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^* &= \sigma_{\alpha\beta}^e - \sigma_{\alpha\beta}^0 - \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^2, \quad u^* = u^e - u^0 - \varepsilon^2 u^2, \\ \sigma_{\alpha 3}^* &= \sigma_{\alpha 3}^e - \sigma_{\alpha 3}^0, \\ \sigma_{33}^* &= \sigma_{33}^e - \sigma_{33}^0. \end{aligned} \right\} \tag{46}$$

Nous avons les inégalités suivantes :

$$\left. \begin{aligned} C \{ &\| \sigma_{\alpha\beta}^* \|_{(L^2(\Omega))_s^4}^2 + \varepsilon^2 \| \sigma_{\alpha 3}^* \|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^4 \| \sigma_{33}^* \|_{L^2(\Omega)}^2 \} \\ &\leq a_0(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^*, \sigma^*) \\ &= -B(\sigma^*, u^e) + B(\sigma^*, u^0) + \varepsilon^2 B(\sigma^*, u^2) + \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^2 \sigma_{33}^* - \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{E} \sigma_{33}^0 \sigma_{33}^* \\ &= -B(\sigma^*, u^*) + \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^2 \sigma_{33}^* - \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{E} \sigma_{33}^0 \sigma_{33}^* \\ &= +\varepsilon^2 \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^2 \partial_{\alpha} u_{\beta}^* + \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^2 \sigma_{33}^* - \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{E} \sigma_{33}^0 \sigma_{33}^*, \end{aligned} \right\}$$

d'où

$$\left\{ \| \sigma_{\alpha\beta}^* \|_{(L^2(\Omega))_s^4}^2 + \varepsilon \| \sigma_{\alpha 3}^* \|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^2 \| \sigma_{33}^* \|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \leq C\varepsilon^2 \{ \varepsilon^2 + \| u^* \|_W \}. \tag{47}$$

D'autre part, nous pouvons également écrire

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma, \quad -B(\tau, u^*) &= a_0(\sigma^*, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^*, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^*, \tau) + \\ &+ \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{1}{E} \sigma_{33}^0 \tau_{33} - \varepsilon^4 \int_{\Omega} \frac{\nu}{E} \sigma_{\mu\mu}^2 \tau_{33} \end{aligned}$$

ce qui, en utilisant l'inégalité de Korn [8] sur W (on vérifie directement sa validité) conduit à

$$\| u^* \|_W \leq C \{ \| \sigma_{\alpha\beta}^* \|_{(L^2(\Omega))_s^4}^2 + \varepsilon^2 \| \sigma_{\alpha 3}^* \|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^2 \| \sigma_{33}^* \|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^4 \}. \tag{48}$$

Le théorème 7 se déduit immédiatement des estimations (47) et (48). \blacksquare

COROLLAIRE 7 : *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 7 nous avons aussi*

$$\left. \begin{aligned} \| \sigma_{\alpha\beta}^e - \sigma_{\alpha\beta}^0 \|_{(L^2(\Omega))_s^4} &\leq c\varepsilon^2, \\ \| u^e - u^0 \|_W &\leq c\varepsilon^2. \quad \blacksquare \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

La preuve est immédiate à l'aide de l'inégalité triangulaire et du théorème 6. ■

Remarque 3 : En revenant à l'ouvert Ω^ε , utilisant pour cela les transformations introduites en (5)-(8), nous obtenons aussi (voir théorème 8) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\| \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{\| \sigma_{\alpha\beta} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}} &\leq c\varepsilon^2, \\ \frac{\| \sigma_{\alpha 3} - \sigma_{\alpha 3}^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{\| \sigma_{\alpha 3} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}} &\leq c\varepsilon^2, \\ \frac{\| \sigma_{33} - \sigma_{33}^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{\| \sigma_{33} \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}} &\leq c\varepsilon^2, \\ \frac{\| u_\alpha - u_\alpha^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{\| u_\alpha \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}} &\leq c\varepsilon^2, \\ \frac{\| u_3 - u_3^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}}{\| u_3 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}} &\leq c\varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

On peut donner différentes interprétations de ces majorations en utilisant les différents moments de ces mêmes quantités vis-à-vis de la surface moyenne. Introduisons, pour cela, les efforts résultants et les moments fléchissants :

$$\left\{ \begin{aligned} n_{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, & m_{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3; \\ n_{\alpha\beta}^0 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3, & m_{\alpha\beta}^0 &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_3 \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3. \end{aligned} \right.$$

Nous avons, à titre d'exemple, le résultat suivant :

THÉORÈME 8 : *Sous les hypothèses du théorème 7, on a les estimations suivantes :*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\| n_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)}}{\| n_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)}} &\leq c\varepsilon^2, \\ \frac{\| m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)}}{\| m_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)}} &\leq c\varepsilon^2. \quad \blacksquare \end{aligned} \right.$$

Démonstration : Nous avons, tout d'abord, d'après l'inégalité de Schwartz,

$$\begin{aligned} \| n_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)}^2 &= \int_\omega \left[\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^0) \right]^2 \leq \varepsilon \int_\omega \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} | \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^0 |^2 \\ &\leq \varepsilon \| \sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2, \end{aligned}$$

quantité qui, d'après le corollaire 7 est majorée par $c\varepsilon^6$. D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire « arrière », nous avons

$$\| n_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)} - \| n_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)} \leq c\varepsilon^3,$$

soit

$$\| n_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)} \geq \| n_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)} - c\varepsilon^3,$$

et en revenant à la définition de $n_{\alpha\beta}^0$, nous en déduisons que

$$\| n_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)} \geq c\varepsilon.$$

Finalement, nous obtenons

$$\frac{\| n_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)}}{\| n_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)}} \leq c\varepsilon^2.$$

Une démonstration analogue peut être faite pour $\frac{\| m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\omega)}}{\| m_{\alpha\beta} \|_{L^2(\omega)}}$. ■

3. CONVERGENCE ET ESTIMATIONS D'ERREURS DANS LE CAS ENCASTRÉ

Préliminaires

Dans la suite de ce travail, nous sommes conduits, de manière naturelle, à introduire des espaces de Hilbert, constitués de fonctions réelles à valeurs vectorielles. Seuls de tels espaces nous permettent une analyse mathématique des méthodes asymptotiques présentées dans ce travail.

Des propriétés fondamentales de ces espaces sont données dans les ouvrages de H. Brezis [10] (annexe 1) et J. L. Lions-E. Magenes [11] T.1. On trouvera également un exposé détaillé, mais dans un cadre abstrait, dans le livre 6 (Intégration) de N. Bourbaki [12].

Afin de faciliter la lecture des développements qui suivent, nous rappellerons quelques propriétés qui nous seront utiles.

On désigne par Ω , l'ouvert de \mathbb{R}^3 tel que $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, ω étant un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 . La variable dans $]-1, 1[$ est désignée par x_3 , tandis que (x_1, x_2) varie dans ω . On appelle $L^2(]-1, 1[; L^2(\omega))$ l'espace des fonctions $x_3 \rightarrow v(x_3) \in L^2(\omega)$ qui sont mesurables (Yosida [13], p. 130). Muni du produit scalaire $(u, v) = \int_{-1}^{+1} \left\{ \int_{\omega} uv \right\}$, cet espace est un Hilbert.

Plus généralement, désignons par X un espace de Hilbert de fonctions définies sur ω , et par $(,)_X$ son produit scalaire. L'espace $L^2(]-1, 1[; X)$

est défini comme l'ensemble des fonctions de $] - 1, 1[$, à valeurs dans X , qui sont mesurables et telles que $\int_{-1}^{+1} \|v\|_X^2 < +\infty$. Muni du produit scalaire

$$(v, u) = \int_{-1}^{+1} (v, u)_X \text{ c'est un espace de Hilbert.}$$

Désignons par X' le dual topologique de X et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité entre X et X' . Alors, nous avons le résultat suivant :

Le dual topologique de $L^2(]-1, 1[; X)$ peut être identifié avec l'espace :

$$L^2(]-1, 1[; X').$$

En outre, la norme sur $L^2(]-1, 1[; X)$ peut s'écrire

$$\|v\|_{L^2(]-1, 1[; X)} = \sup_{\phi \in L^2(]-1, 1[; X')} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \phi, v \rangle}{\|\phi\|_{L^2(]-1, 1[; X')}}.$$

A titre d'exemple, nous poserons donc

$$\begin{cases} (L^2(]-1, 1[; H_0^1(\omega)))' = L^2(]-1, 1[; H^{-1}(\omega)), \\ (L^2(]-1, 1[; H_0^2(\omega)))' = L^2(]-1, 1[; H^{-2}(\omega)). \end{cases}$$

Nous utiliserons également l'espace

$$H^1(]-1, 1[; X) = \left\{ v \in L^2(]-1, 1[; X), \frac{\partial v}{\partial x_3} \in L^2(]-1, 1[; X) \right\}$$

où $\partial v / \partial x_3$ désigne la dérivée de v en x_3 au sens des distributions de

$$D'(]-1, 1[; X)$$

(J. L. Lions-E. Magenes [11], p. 8). Muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{-1}^{+1} (v, u)_X + \int_{-1}^{+1} \left(\frac{\partial v}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)_X$$

c'est un espace de Hilbert.

Il existe une caractérisation simple de cet espace lorsque $X = L^2(\omega)$:

$$H^1(]-1, 1[; L^2(\omega)) = \{ v \in L^2(\Omega), \partial_3 v \in L^2(\Omega) \}.$$

De manière analogue, nous avons, par exemple pour tout r entier naturel,

$$H^1(]-1, 1[; H^r(\omega)) = \{ v \in L^2(\Omega), \partial_\alpha v \in L^2(\Omega) \mid |\alpha| \leq r, \\ \partial_3 v \in L^2(\Omega), \partial_{3\alpha} v \in L^2(\Omega) \mid |\alpha| \leq r \}.$$

Une propriété remarquable est la suivante :

si X est un Hilbert, alors on a l'inclusion suivante (Brezis [10], p. 145)

$$H^1(\cdot - 1, 1[; X) \hookrightarrow C^0(\cdot - 1, 1[; X).$$

Ainsi, pour $X = H^2(\omega)$, nous savons que $H^2(\omega) \rightarrow C^0(\bar{\omega})$, (Adams [14]), si bien que

$$H^1(\cdot - 1, 1[; H^2(\omega)) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}).$$

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de plaque encastree, similaire à celui étudié au § 1. Nous utiliserons une loi de comportement plus générale que la loi de Hooke.

Nous prendrons ainsi en compte le cas des plaques inhomogènes. Nous serons amenés à utiliser deux types d'espaces pour les champs de déplacements. Tout d'abord,

$$\mathcal{V} = \{ v = (v_i) \in H^1(\Omega); v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \},$$

puis

$$\mathcal{W} = \left\{ v = (v_i) \in H^1(\Omega); \int_{-1}^{+1} v_i(x_1, x_2, x_3) dx_3 = 0, \text{ p.p. sur } \gamma \right\}.$$

Le premier espace est l'espace naturel dans lequel le problème tridimensionnel est posé. Le second interviendra pour des raisons essentiellement mathématiques. L'interprétation mécanique des champs de déplacements de \mathcal{W} n'est pas claire pour nous.

Sur un plan mathématique, il est tel que l'on peut y construire un développement asymptotique de la solution tridimensionnelle si les forces appliquées sont de classe C^∞ et ce, dans le cas où $u_i = 0$ sur la frontière latérale de la plaque.

Le problème que nous envisageons, posé sur l'ouvert de référence Ω (§ 1), est donc le suivant :

$$\left. \begin{aligned} &\text{Trouver } (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma \times \mathcal{V} \text{ tel que} \\ &\forall \tau \in \Sigma, a_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0, \\ &\forall v \in \mathcal{V}, B(\sigma^\varepsilon, v) = F(v), \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

où nous définissons, pour des éléments quelconques σ, τ, v de $\Sigma \times \Sigma \times \mathcal{V}$ (Green-Zerna [15], p. 221) :

$$a_0(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta}, \quad (52)$$

$$a_2(\sigma, \tau) = 2 \int_{\Omega} a_{\alpha 3 \beta 3} \sigma_{\alpha 3} \tau_{\beta 3} + \int_{\Omega} a_{\alpha \beta 3 3} (\tau_{3 3} \sigma_{\alpha \beta} + \sigma_{3 3} \tau_{\alpha \beta}), \quad (53)$$

$$a_4(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} a_{3 3 3 3} \sigma_{3 3} \tau_{3 3}. \quad (54)$$

Les coefficients d'élasticité a_{ijkl} sont des éléments de $L^\infty(\Omega)$ et vérifient les propriétés suivantes (Green-Zerna [15], p. 221) :

$$a) \quad \left. \begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma\delta} &= a_{\beta\alpha\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\delta\gamma} = a_{\alpha\beta\delta\gamma} = a_{\gamma\delta\alpha\beta}, \\ a_{\alpha\beta 3 3} &= a_{\beta\alpha 3 3}, a_{\alpha 3 \beta 3} = a_{\beta 3 \alpha 3}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

(on remarquera, en particulier, que $a_{\alpha\beta\gamma 3} = 0$);

b) Il existe des constantes positives k et M telles que

$$\left\{ \begin{aligned} \forall \tau \in \underline{\Sigma}, a_0(\sigma, \sigma) + a_2(\sigma, \sigma) + a_4(\sigma, \sigma) &\geq k \|\sigma\|_{\underline{\Sigma}}^2, \\ \forall \tau \sigma \in \underline{\Sigma} \times \underline{\Sigma}, |a_0(\sigma, \tau) + a_2(\sigma, \tau) + a_4(\sigma, \tau)| &\leq M \|\tau\|_{\underline{\Sigma}} \|\sigma\|_{\underline{\Sigma}}. \end{aligned} \right.$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme de Brezzi [4] qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation (51) dès que F est une forme linéaire continue sur V .

Introduisons maintenant les espaces suivants qui nous permettent de décrire le problème limite (J. L. Lions-E. Magenes [11], T. 1) :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_3^0 &= \{ \sigma_{3 3} \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{-2}(\omega)) \}, \\ \Sigma_s^0 &= \{ \sigma = (\sigma_{\alpha 3}) \in (L^2(\cdot - 1, 1[; H^{-1}(\omega)))^2 \}, \\ \Sigma_t &= \{ \sigma = (\sigma_{\alpha\beta}) \in (L^2(\cdot - 1, 1[; L^2(\omega)))^4 = (L^2(\Omega))^4; \sigma_{12} = \sigma_{21} \}, \\ V_t^0 &= \{ v = (v_\alpha) \in (H^1(\cdot - 1, 1[; H_0^1(\omega)))^2 \}, \\ V_3^0 &= \{ v = v_3 \in H^1(\cdot - 1, 1[; H_0^2(\omega)) \}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Remarque 4 : Les espaces (56) seront munis de leur norme naturelle, ce qui leur confère la structure d'espace de Hilbert. En outre, $L^2(\Omega)$ étant une fois pour tout identifié avec son dual topologique, nous avons

a) le dual de $L^2(\cdot - 1, 1[; H_0^1(\omega))$ est $L^2(\cdot - 1, 1[; H^{-1}(\omega))$;

b) le dual de $L^2(\cdot - 1, 1[; H_0^2(\omega))$ est $L^2(\cdot - 1, 1[; H^{-2}(\omega))$.

Remarque 5 : Nous utiliserons dans la suite les inclusions topologiques suivantes :

$$\left. \begin{aligned} V_t^0 &\subset (V)^2, \\ V_3^0 &\subset V, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

où

$$V = \{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \};$$

et

$$\left. \begin{aligned} L^2(\Omega) &\hookrightarrow \Sigma_3^0, \\ (L^2(\Omega))^2 &\hookrightarrow \Sigma_s^0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Après ces préliminaires, nous abordons le premier résultat de ce chapitre.

3.1. Existence d'une solution unique au problème limite associé à (51)

Par définition, le problème limite associé à (51) s'énonce comme suit :

Trouver $\sigma_{\alpha\beta}^0, \sigma_{\alpha 3}^0, \sigma_3^0, u_\alpha^0, u_3^0 \in \Sigma_t \times \Sigma_s^0 \times \Sigma_3^0 \times \mathcal{V}_t^0 \times \mathcal{V}_3^0$ tel que

$$\forall \tau \in \Sigma_t, \quad \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{\gamma\delta} - \int_{\Omega} \partial_\alpha u_\beta^0 \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad (59)$$

$$\forall \tau \in \Sigma_s^0, \quad \int_{-1}^{+1} \langle \partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0, \tau_{\alpha 3} \rangle = 0, \quad (60)$$

$$\forall \tau_{33} \in \Sigma_3^0, \quad \int_{-1}^{+1} \langle\langle \partial_3 u_3^0, \tau_{33} \rangle\rangle = 0, \quad (61)$$

$$\forall v_\alpha \in \mathcal{V}_t^0, \quad \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\alpha v_\beta + \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^0, \partial_3 v_\alpha \rangle = - F_\alpha(v_\omega), \quad (62)$$

$$\forall v_3 \in \mathcal{V}_3^0, \quad \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^0, \partial_\alpha v_3 \rangle + \int_{-1}^{+1} \langle\langle \sigma_{33}^0, \partial_3 v_3 \rangle\rangle = - F_3(v_3). \quad (63)$$

Dans les équations ci-dessus, le symbole \langle , \rangle désigne la dualité entre $H_0^1(\omega)$ et $H^{-1}(\omega)$, tandis que le symbole $\langle\langle , \rangle\rangle$ désigne la dualité entre $H_0^2(\omega)$ et $H^{-2}(\omega)$, cette différenciation étant faite dans un but mnémotechnique. Par ailleurs, les forces sont décomposées en composantes « horizontales », F_ω , d'une part, et composantes « verticales », F_3 , d'autre part.

Nous nous proposons d'établir le

THÉORÈME 9 : *Sous l'hypothèse que (F_ω, F_3) définit une forme bilinéaire continue sur \mathcal{V} (c'est le cas, entre autres si*

$$F_\alpha(v_\alpha) + F_3(v_3) = - \left\{ \int_{\Omega} f_i v_i + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i v_i \right\},$$

où $f_i \in L^2(\Omega)$, $g_i \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, alors les équations (59)-(63) admettent une solution unique. ■

Démonstration : Nous donnerons une démonstration en trois étapes et, compte tenu des résultats obtenus dans [1], nous nous permettrons de passer rapidement sur quelques détails.

Étape 1 : Les équations (61) et (60) conduisent ici encore à un champ de déplacements de Kirchhoff-Love. Nous introduirons donc l'espace suivant formé de déplacements de Kirchhoff-Love :

$$\underline{V}_{KL} = \{ v \in \underline{V}, v_\alpha = \underline{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3 \quad \text{où} \quad \underline{v}_\alpha \in (H_0^1(\omega))^2, v_3 \in H_0^2(\omega) \}. \quad (64)$$

L'espace \underline{V}_{KL} est caractérisé dans l'espace \underline{V} comme l'ensemble des champs de déplacements, v vérifiant $\gamma_{i3}(v) = 0$. Il s'ensuit donc que \underline{V}_{KL} est un sous-espace fermé de \underline{V} . La norme induite par celle de \underline{V} en fait un espace de Hilbert.

Soit maintenant l'espace produit $(H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega)$; nous définissons alors une injection j , de

$$(H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega) \xrightarrow{j} \underline{V}_{KL},$$

définie par

$$\begin{aligned} \forall v \in (H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega) \quad v = (\underline{v}_\alpha, v_3) &\rightarrow j(v) \in \underline{V}_{KL}, \\ j(v)_3 &= v_3, \quad j(v)_\alpha = \underline{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3. \end{aligned}$$

Nous avons clairement les propriétés suivantes :

- (i) j est bijective ;
- (ii) j est continue.

Le théorème des isomorphismes de Banach (Yosida [13]) nous permet de conclure que j est un isomorphisme et, par conséquent, \underline{V}_{KL} peut être muni de la norme équivalente associée à l'espace $(H_0^1(\omega))^2 \times H_0^2(\omega)$.

Étape 2 : Reprenant l'équation (51) ainsi que les équations (62)-(63) que l'on restreint à des champs de déplacements de Kirchhoff-Love, nous obtenons le problème suivant (nous déterminerons σ_{i3} à l'étape 3 de façon à ce que (61) et (63) soient satisfaites pour des champs de déplacements quelconques) :

$$\left. \begin{aligned} &\text{Trouver } (\sigma^0, u^0) \in \underline{\Sigma}_t \times \underline{V}_{KL} \text{ tel que} \\ &\forall \tau \in \underline{\Sigma}_t, \quad \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{\gamma\delta} - \int_{\Omega} \partial_\alpha u_\beta^0 \tau_{\alpha\beta} = 0, \\ &\forall v \in \underline{V}_{KL}, - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_\alpha v_\beta = F_\alpha(v_\alpha) + F_3(v_3). \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Nous avons alors la :

PROPOSITION 1 : *Sous les hypothèses du théorème 9 les équations (65) admettent une solution unique (ceci assure donc l'existence et l'unicité du déplacement (u_i^0) et du champ de contraintes $(\sigma_{\alpha\beta}^0)$). ■*

Démonstration : Nous allons appliquer le théorème de Brezzi [4]. Nous avons, tout d'abord,

$$\int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \geq c \|\sigma_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_t}^2,$$

en vertu des propriétés des coefficients de l'élasticité (ellipticité). Par ailleurs, nous avons pour tout élément $v \in \mathcal{V}_{KL}$,

$$\sup_{\tau \in \Sigma_t} \frac{\int_{\Omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} v_{\beta}}{\|\tau_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_t}} = \sup_{\tau \in \Sigma} \frac{\int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_i v_j}{\|\tau_{ij}\|_{\Sigma}} \geq b \|v\|_{\mathcal{V}},$$

(en effet, $\gamma_{i3}(v) = 0$). La dernière inégalité résulte de l'inégalité de Korn. L'étude développée à l'étape précédente nous permet donc de remplacer $\|v\|_{\mathcal{V}}$ par $\|v\|_{\mathcal{V}_{KL}}$. Les autres hypothèses du théorème de Brezzi [4] étant aisément vérifiées, la proposition 1 est ainsi établie. ■

Étape 3 : Nous prouvons ici l'existence et l'unicité du terme $\sigma_{\alpha\beta}^0$. Commençons tout d'abord par $\sigma_{\alpha 3}^0$.

(a) Posons

$$\left. \begin{aligned} S_1(\sigma, v) &= \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_{\alpha} \rangle \\ L_1(v) &= \int_{\Omega} f_{\alpha} v_{\alpha} + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_{\alpha} v_{\alpha} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} v_{\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

où $\sigma_{\alpha\beta}^0$ a été calculé à l'étape 2.

Nous avons alors les points suivants qui conduisent à la détermination de $\sigma_{\alpha 3}^0$.

Point 1 : $L_1(\cdot)$ est définie linéaire et continue sur \mathcal{V}_t^0 car

$$|L_1(v)| \leq \sum_{\alpha, \beta=1,2} \{ \|f_{\alpha}\|_{L^2(\Omega)} + \|g_{\alpha}\|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} + \|\sigma_{\alpha\beta}^0\|_{L^2(\Omega)} \} \|v_{\alpha}\|_{H^1(\Omega)};$$

or

$$\|v_{\alpha}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v_{\alpha}\|_{\mathcal{V}^0}.$$

Par ailleurs, $L_1(v) = 0, \forall v \in (H_0^1(\omega))^2$, par définition de $\sigma_{\alpha\beta}^0$ (voir l'étape 2). Remarquons maintenant que $(H_0^1(\omega))^2$ est un sous-espace fermé de \mathcal{V}_t^0 . En effet, si une suite $v^n \in H_0^1(\omega)$ et si v^n converge vers v dans \mathcal{V}_t^0 , alors l'égalité $\partial_3 v^n = 0$ implique $\partial_3 v = 0$ et, par conséquent, v peut être identifiée avec un élément de $H_0^1(\omega)$. Finalement, nous avons prouvé que $L_1(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2$.

Point 2 : La suite d'inégalités ci-dessous traduit l'invariance de la forme bilinéaire $S_1(\cdot, \cdot)$ vis-à-vis des fonctions de $(H_0^1(\omega))^2$:

$$\left\{ \begin{aligned} |S_1(\sigma, v)| &= \left| \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle \right| \\ &\leq \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\Sigma_s^0} \| \partial_3 v_\alpha \|_{L^2([-1, 1]; H_0^1(\omega))} \\ &\leq \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\Sigma_s^0} \| \partial_3 (v_\alpha + \omega_\alpha) \|_{L^2([-1, 1]; H_0^1(\omega))} \\ &\leq \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\Sigma_s^0} \| v_\alpha + \omega_\alpha \|_{\mathcal{V}_t^0}, \quad \forall \omega_\alpha \in H_0^1(\omega). \end{aligned} \right.$$

Finalement,

$$|S_1(\sigma, v)| \leq \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\Sigma_s^0} \| v_\alpha \|_{(\mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2)},$$

où $\mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2$ désigne l'espace quotient de \mathcal{V}_t^0 par $(H_0^1(\omega))^2$. La forme bilinéaire $S_1(\cdot, \cdot)$ est donc bicontinue sur l'espace $\Sigma_s^0 \times \mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2$.

Point 3 : Nous avons

$$\sup_{v \in \mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2} \frac{S_1(\sigma, v)}{\| v \|_{(\mathcal{V}_t^0/(H_0^1(\omega))^2)}} \geq \sup_{v \in \mathcal{V}_t^0} \frac{S_1(\sigma, v)}{\| v \|_{\mathcal{V}_t^0}}.$$

Posons alors

$$v_\alpha = \int_0^{x_3} w_\alpha(x_1, x_2, t) dt, \tag{67}$$

où w_α est un élément quelconque de $L^2([-1, 1]; H_0^1(\omega))$. D'une part, on a

$$\int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle = \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, w_\alpha \rangle,$$

et d'autre part,

$$\sup_{\omega_\alpha \in L^2([-1, 1]; H_0^1(\omega))} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, w_\alpha \rangle}{\| w_\alpha \|_{L^2([-1, 1]; H_0^1(\omega))}} = \| \sigma_{\alpha 3} \|_{L^2([-1, 1]; H^{-1}(\omega))}.$$

Nous avons ensuite, pour v donné par (67)

$$v \in \mathcal{V}_t^0 \quad \text{et} \quad \|v\|_{\mathcal{V}^p} \leq c \|w\|_{L^2(\Omega-1, 1; H_0^1(\omega))}$$

puisque

$$\partial_3 v_\alpha = w_\alpha \in L^2(\Omega-1, 1; H_0^1(\omega)),$$

et que par ailleurs

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1,2} \int_{-1}^{+1} \|v_\alpha\|_{H_0^1(\omega)}^2 &= \int_{-1}^{+1} \left\{ \int_\omega v_\alpha v_\alpha + \int_\omega \partial_\beta v_\alpha \partial_\beta v_\alpha \right\} \\ &= \int_{-1}^{+1} \left\{ \int_\omega \int_0^{\alpha_3} w_\alpha w_\alpha + \int_\omega \int_0^{\alpha_3} \partial_\beta w_\alpha \partial_\beta w_\alpha \right\} \\ &\leq c \sum_{\alpha=1,2} \|w_\alpha\|_{L^2(\Omega-1, 1; H_0^1(\omega))}^2. \end{aligned}$$

Finalement

$$\sup_{v \in \mathcal{V}_t^0} \frac{S_1(\sigma, v)}{\|v\|_{\mathcal{V}^p}} \geq c \|\sigma_{\alpha 3}\|_{\Sigma_3^0}.$$

Point 4 : Soit

$$v \in (\mathcal{V}_t^0 / (H_0^1(\omega))^2)$$

vérifiant

$$\forall \tau \in \Sigma_3^0, S_1(\sigma, v) = 0 \Rightarrow \partial_3 v_\alpha = 0,$$

alors

$$v_\alpha = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{V}_t^0 / (H_0^1(\omega))^2.$$

Nous sommes ainsi dans les conditions d'application du théorème de Babuška [5]. Il existe donc σ_s^0 tel que l'équation (62) soit satisfaite, c'est-à-dire

$$\sigma_s^0 \in \Sigma_s^0$$

et

$$\forall v \in \mathcal{V}_t^0, \quad S_1(\sigma_s^0, v) = L_1(v).$$

(b) Posons maintenant

$$\begin{cases} S_2(\sigma, v) = \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{33}, \partial_3 v_3 \rangle, \\ L_2(v) = \int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 - \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^0, \partial_3 v_\alpha \rangle. \end{cases}$$

Nous avons les points suivants qui nous conduiront à l'existence et à l'unicité de σ_{33}^0 , par le théorème de Babuška [5].

Point 1 : $S_2(\cdot, \cdot)$ est définie, bilinéaire et bicontinue sur $\Sigma_3^0 \times (V_3^0/H_0^2(\omega))$. En effet,

$$\left\{ \begin{aligned} |S_2(\sigma, v)| &= \left| \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{33}, \partial_3 v_3 \rangle \right| \leq \int_{-1}^{+1} \|\sigma_{33}\|_{H^{-1}(\omega)} \|\partial_3 v_3\|_{H_0^2(\omega)} \\ &\leq \|\sigma_{33}\|_{\Sigma_3^0} \|v_3 + w_3\|_{V_3^0}, \forall w_3 \in H_0^2(\omega). \end{aligned} \right.$$

Point 2 : La « coercivité » de $S_2(\cdot, \cdot)$ résulte de

$$\left\{ \begin{aligned} \sup_{v \in V_3^0/H_0^2(\omega)} \frac{S_2(\sigma, v)}{\|v\|_{V_3^0/H_0^2(\omega)}} &\geq \sup_{v \in V_3^0} \frac{S_2(\sigma, v)}{\|v\|_{V_3^0}} \\ &\geq \frac{1}{c} \sup_{w_3 \in L^2(\Gamma_{-1,1}; H_0^2(\omega))} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{33}, w_3 \rangle}{\|w_3\|_{L^2(\Gamma_{-1,1}; H_0^2(\omega))}} \\ &\geq \frac{1}{c} \|\sigma_{33}\|_{\Sigma_3^0}. \end{aligned} \right.$$

Dans les inégalités ci-dessus, nous avons posé

$$v = \int_0^{x_3} w_3, \quad \text{donc} \quad \|v\|_{V_3^0} \leq c \|w\|_{L^2(\Gamma_{-1,1}; H_0^2(\omega))}.$$

Point 3 : Le résultat de séparation suivant est vrai : soit $v \in (V_3^0/H_0^2(\omega))$ et si nous avons $\forall \tau \in \Sigma_3^0, S_2(\tau, v) = 0$, alors $\partial_3 v_3 = 0$, d'où $v = 0$ dans $(V_3^0/H_0^2(\omega))$.

Point 4 : La forme linéaire $L_2(\cdot)$ vérifie

$$|L_2(v)| \leq \{ \|f_3\|_{L^2(\Omega)} + \|g_3\|_{L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \} \|v_3\|_{V_3^0} + \int_{-1}^{+1} |\langle \sigma_{\alpha 3}^0, \partial_\alpha v_3 \rangle|$$

soit

$$|L_2(v)| \leq c \{ \|v_3\|_{V_3^0} + \|\sigma_{\alpha 3}^0\|_{(L^2(\Gamma_{-1,1}; H^{-1}(\omega)))^2} \|v\|_{V_3^0} \}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^2(\omega), L_2(v) &= \int_{\Omega} f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 - \\ &\quad - \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^0, \partial_\alpha v_3 \rangle + \int_{\Omega} x_3 \sigma_{\alpha\beta} \partial_{\alpha\beta} v_3 \end{aligned}$$

(d'après (62)). Finalement, nous avons

$$\forall v \in H_0^2(\omega), \quad L_2(v) = 0,$$

d'après la définition de $\sigma_{\alpha\beta}^0$ (équation (65)).

En conclusion et compte tenu des points (1), (2), (3), (4), nous pouvons ici encore appliquer le lemme de Babuška [5] qui nous assure l'existence et l'unicité de σ_{33}^0 dans Σ_3^0 , en tant que solution de l'équation (63), c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases} \sigma^0 \in \Sigma_3^0, \\ \forall v \in V_3^0, \quad S_2(\sigma_2, v) = L_2(v). \quad \blacksquare \end{cases}$$

3.2. Convergence de $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vers (σ^0, u^0)

Nous nous proposons ici de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 10 : *Sous les hypothèses du théorème 9, et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous avons au sens des topologies fortes :*

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sigma_{\alpha\beta}^0, & u_i^\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega)} u_i^0, \\ \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(]-1,1[;H^{-1}(\omega))} \sigma_{\alpha 3}^0, & \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0, \\ \sigma_{33}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(]-1,1[;H^{-2}(\omega))} \sigma_{33}^0, & \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} 0. \quad \blacksquare \end{cases}$$

Démonstration : Elle est donnée en trois étapes.

Étape 1 : A l'aide des équations (51), nous obtenons de manière classique :

$$\sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \sum_{\alpha=1,2} \|\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{Cte} \quad (67)$$

et

$$\|u_i\|_{H^1(\Omega)} \leq \text{Cte} \quad (i = 1, 2, 3).$$

En effet, en choisissant $\tau = \sigma^\varepsilon$ et $v = u^\varepsilon$ dans (51), nous obtenons immédiatement

$$\|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{\Sigma_\varepsilon}^2 + \varepsilon^2 \|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^4 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \sum_{i=1,2,3} \|u_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par ailleurs, de l'inégalité de Korn, nous déduisons de (51) :

$$\|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{\Sigma_\varepsilon} + \varepsilon \|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2} + \varepsilon^2 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq c \sum_{i=1,2,3} \|u_i^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'estimation (67) résulte donc de ces deux dernières inégalités. L'équation (51) qui conduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v_\alpha \in \underline{V}_\alpha^0, \quad \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \partial_3 v_\alpha = \int_\Omega f_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha v_\alpha - \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \partial_\alpha v_\beta, \\ \forall v_3 \in V_3^0, \quad \int_\Omega \sigma_{33}^\varepsilon \partial_3 v_3 = \int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 - \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \partial_\alpha v_3, \end{array} \right.$$

nous fournit les estimations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte, \\ \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq Cte. \end{array} \right\} \quad (68)$$

La compacité faible des bornés des espaces utilisés nous permet d'extraire des sous-suites que nous noterons encore, sans confusion possible, $(\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon, \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon, \sigma_{33}^\varepsilon, u_i^\varepsilon)$, et telles que :

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sigma_{\alpha\beta}^*, & u_i^\varepsilon \xrightarrow{H^1(\Omega)} u_i^*; \\ \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} X_{\alpha 3}^*, & \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sigma_{\alpha 3}^*, \\ \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} X_{33}^*, & \sigma_{33}^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\Omega)} \sigma_{33}^*, \end{array} \right\} \quad (69)$$

au sens des topologies faibles.

Étape 2 : Passage à la limite faible dans les équations (51). Ceci conduit à

$$\left. \begin{array}{l} \forall \tau_t \in \underline{\Sigma}_t, \quad \int_\Omega a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^* \tau_{\gamma\delta} + \int_\Omega a_{\alpha\beta 33} \tau_{\alpha\beta} X_{33}^* - \int_\Omega \partial_\alpha u_\beta^* \tau_{\alpha\beta} = 0, \\ \forall \tau_s \in \underline{\Sigma}_s^0, \quad - \int_{-1}^{+1} \langle \partial_\alpha u_3^* + \partial_3 u_\alpha^*, \tau_{\alpha 3} \rangle = 0, \\ \forall \tau_{33} \in \underline{\Sigma}_{33}^0, \quad - \int_{-1}^{+1} \langle \partial_3 u_3^*, \tau_{33} \rangle = 0, \\ \forall v_t \in \underline{V}_t^0, \quad \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta}^* \partial_\alpha v_\beta + \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^*, \partial_3 v_\alpha \rangle = \int_\Omega f_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha v_\alpha, \\ \forall v_3 \in V_3^0, \quad \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^*, \partial_\alpha v_3 \rangle + \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{33}^*, \partial_3 v_3 \rangle = \int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3. \end{array} \right\} \quad (70)$$

Remarquons que les deux dernières équations sont obtenues par passage à la limite dans (51) après avoir restreint v_α à V_t^0 et v_3 à V_3^0 . Ceci est justifié par l'inclusion

$$V_t^0 \times V_3^0 \subset V.$$

D'autre part, en multipliant l'équation (51) par ε^2 , nous obtenons par passage à la limite :

$$\forall v_3 \in V_3^0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \langle \varepsilon^2 \sigma_{33}^\varepsilon, \partial_3 v_3 \rangle = \int_\Omega X_{33}^* \partial_3 v_3 = 0,$$

soit

$$X_{33}^* = 0.$$

De la même façon, en multipliant (51) par ε , nous obtenons

$$\forall v_\alpha \in V_t^0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \langle \varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon, \partial_3 v_\alpha \rangle = \int_\Omega X_{\alpha 3}^* \partial_3 v_\alpha = 0,$$

d'où

$$X_{\alpha 3}^* = 0.$$

L'unicité de la solution du problème (59)-(63) permet de conclure à la convergence faible de toute la suite $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ vers $(\sigma^0, u^0) = (\sigma^*, u^*)$.

Étape 3 : Convergence forte. Posons

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^0, & \bar{u}_i = u_i^\varepsilon - u_i^0, \\ \bar{\sigma}_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^0, \\ \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}^\varepsilon - \sigma_{33}^0. \end{cases}$$

Compte tenu des propriétés des coefficients de l'élasticité, nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha, \beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \sum_{\alpha=1,2} \|\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^4 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_\Omega a_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \bar{\sigma}_{\gamma\delta} + 2 \varepsilon^2 \int_\Omega a_{\alpha 3\beta 3} \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon + \varepsilon^4 \int_\Omega a_{3333} \sigma_{33}^\varepsilon \sigma_{33}^\varepsilon + \\ & \quad + 2 \varepsilon^2 \int_\Omega a_{\alpha\beta 33} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \sigma_{33}^\varepsilon \\ & = \int_\Omega \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta^\varepsilon - \int_\Omega \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta^0 + \int_\Omega (\partial_\alpha u_3^\varepsilon + \partial_3 u_\alpha^\varepsilon) \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon + \int_\Omega \partial_3 u_3^\varepsilon \sigma_{33}^\varepsilon - \\ & \quad - 2 \varepsilon^2 \int_\Omega a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0 \sigma_{33}^\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^{\epsilon} \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\epsilon} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\epsilon} + \int_{\Omega} (\partial_{\alpha} u_3^{\epsilon} + \partial_3 u_{\alpha}^{\epsilon}) \sigma_{\alpha 3}^{\epsilon} + \int_{\Omega} \partial_3 u_3^{\epsilon} \sigma_{33}^{\epsilon} - \\
 &\quad - \left\{ \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^0 + 2 \epsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0 \sigma_{33}^{\epsilon} \right\} \\
 &= \int_{\Omega} f_i u_i^{\epsilon} + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i u_i^{\epsilon} - \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\epsilon} - \left\{ \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u_{\beta}^0 + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \epsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0 \sigma_{33}^{\epsilon} \right\}
 \end{aligned}$$

or

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_i u_i^{\epsilon} + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i u_i^{\epsilon} = \int_{\Omega} f_i u_i^0 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i u_i^0,$$

et

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} u_{\beta}^{\epsilon} = \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} u_{\beta}^0.$$

Enfin, de

$$\int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^0 \partial_{\alpha} u_{\beta}^0 = \int_{\Omega} f_i u_i^0 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_i u_i^0,$$

nous déduisons

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \\
 &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \|\sigma_{\alpha 3}^{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \\
 &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \|\sigma_{33}^{\epsilon}\|_{L^2(\Omega)} = 0.
 \end{aligned} \right. \quad (71)$$

La convergence forte des déplacements est alors obtenue aisément à partir de (71) de l'inégalité de Korn [8] et de l'identité :

$$\forall \tau \in \Sigma, \int_{\Omega} \tau_{ij} \partial_j (u_j^{\epsilon} - u_j^0) = \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (\sigma_{\alpha\beta}^{\epsilon} - \sigma_{\alpha\beta}^0) \tau_{\gamma\delta} + 2 \epsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha 3 \beta 3} \sigma_{\alpha 3}^{\epsilon} \tau_{\alpha 3} + \epsilon^4 \int_{\Omega} a_{3333} \sigma_{33}^{\epsilon} \tau_{33} + \epsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} [(\sigma_{\alpha\beta}^{\epsilon} - \sigma_{\alpha\beta}^0) \tau_{33} + \tau_{\alpha\beta} \sigma_{33}^{\epsilon}] + \epsilon^2 \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0 \tau_{33}. \quad (72)$$

Nous obtenons ainsi

$$\sum_{i=1,2,3} \|\bar{u}_i\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left\{ \sum_{\alpha,\beta=1,2} \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \sum_{\alpha=1,2} \|\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \right\}. \quad (73)$$

La démonstration du théorème 10 se termine alors en utilisant les inégalités suivantes :

$$(i) \quad c \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{\Sigma_3^0} \leq \sup_{v \in V_3^0} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \bar{\sigma}_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle}{\|v\|_{V_3^0}},$$

$$(ii) \quad c \|\bar{\sigma}_{33}\|_{\Sigma_3^0} \leq \sup_{v_3 \in V_3^0} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle\langle \bar{\sigma}_{33}, \partial_3 v_3 \rangle\rangle}{\|v_3\|_{V_3^0}}.$$

Nous savons en effet que

$$\forall v_\alpha \in V_\alpha^0, \int_{-1}^{+1} \langle \bar{\sigma}_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle = - \int_\Omega \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta,$$

et compte tenu de $\|v_\alpha\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq c \|v_\alpha\|_{V_\alpha^0}$,

nous déduisons de (i) et de (71)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{\Sigma_3^0} = 0. \quad (74)$$

De manière analogue, en sachant que

$$\forall v_3 \in V_3^0, \int_{-1}^{+1} \langle\langle \bar{\sigma}_{33}, \partial_3 v_3 \rangle\rangle = - \int_{-1}^{+1} \langle \bar{\sigma}_{\alpha 3}, \partial_\alpha v_3 \rangle,$$

nous déduisons de (ii),

$$c \|\bar{\sigma}_{33}\|_{\Sigma_3^0} \leq \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{\Sigma_3^0},$$

ce qui entraîne à l'aide de (74) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{\sigma}_{33}\|_{\Sigma_3^0} = 0. \quad (75)$$

Le théorème 10 est alors établi. ■

3.3. Résultat de régularité pour l'opérateur limite

Dans ce paragraphe, nous définirons dans quel espace se trouve la solution des équations (61)-(65) lorsque les seconds membres de ces équations sont suffisamment réguliers. Nous donnerons également des estimations à priori. Ces résultats sont nécessaires pour préciser les hypothèses sous lesquelles les différents termes d'un développement de $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ en puissance de ε existent.

Nous commencerons par un théorème d'existence général (théorème 11). Nous donnerons ensuite (corollaire 11) une caractérisation de l'opérateur limite sous la forme d'un résultat de régularité.

Nous envisageons le problème suivant :

Trouver $(\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha 3}, \sigma_{33}, u_\alpha, u_3) \in \Sigma_t \times \Sigma_s^0 \times \Sigma_3^0 \times \mathcal{V}_t^0 \times \mathcal{V}_3^0$ tel que

$$\forall \tau_{\alpha\beta} \in \Sigma_t, \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} - \int_{\Omega} \tau_{\alpha\beta} \partial_\alpha u_\beta = \int_{\Omega} L_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta}, \tag{76}$$

$$\forall \tau_{\alpha 3} \in \Sigma_s^0, \int_{-1}^{+1} \langle \tau_{\alpha 3}, \partial_\alpha u_3 + \partial_3 u_\alpha \rangle = \int_{-1}^{+1} \langle L_{\alpha 3}, \tau_{\alpha 3} \rangle, \tag{77}$$

$$\forall \tau_{33} \in \Sigma_3^0, \int_{-1}^{+1} \langle\langle \tau_{33}, \partial_3 u_3 \rangle\rangle = \int_{-1}^{+1} \langle\langle L_{33}, \tau_{33} \rangle\rangle, \tag{78}$$

$$\forall v_\alpha \in \mathcal{V}_t^0, \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta + \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle = - F_\alpha(v_\alpha), \tag{79}$$

$$\forall v_3 \in \mathcal{V}_3^0, \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_3 \rangle + \int_{-1}^{+1} \langle\langle \sigma_{33}, \partial_3 v_3 \rangle\rangle = - F_3(v_3). \tag{80}$$

Nous avons le

THÉORÈME 11 : Si $L_{\alpha\beta} \in (L^2(\Omega))_s^4$, $L_{\alpha 3} \in L^2(-1, 1[; H_0^1(\omega))$,

$$L_{33} \in L^2(-1, 1[; H_0^2(\omega)), \quad F_\alpha \in H^1(-1, 1[; H_0^1(\omega))', \\ F_3 \in H^1(-1, 1[; H_0^2(\omega))'$$

(où X' désigne le dual de X), alors les équations (76)-(80) admettent une solution unique. En outre, nous avons les estimations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} & \| \sigma_{\alpha\beta} \|_{\Sigma_t} + \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\Sigma_s^0} + \| \sigma_{33} \|_{\Sigma_3^0} + \| u_\alpha \|_{\mathcal{V}_t^0} + \| u_3 \|_{\mathcal{V}_3^0} \leq \\ & \leq C \left\{ \| L_{\alpha\beta} \|_{\Sigma_t} + \| L_{\alpha 3} \|_{[L^2(-1, 1[; H_0^1(\omega))]^2} \right. \\ & \quad \left. + \| L_{33} \|_{L^2(-1, 1[; H_0^2(\omega))} + \| F_\alpha \|_{[H^1(-1, 1[; H_0^1(\omega))]'} \right. \\ & \quad \left. + \| F_3 \|_{[H^1(-1, 1[; H_0^2(\omega))]'} \right\}. \end{aligned} \right\} \tag{81} \quad \blacksquare$$

Démonstration : Nous la donnons en 3 étapes.

Étape 1 : De (71) nous déduisons

$$u_3 = \underline{u}_3 + \int_{-1}^{x_3} L_{33} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} L_{33} \tag{82}$$

où \underline{u}_3 est une fonction quelconque de $H_0^2(\omega)$, et de $L_{33} \in L^2(-1, 1[; H_0^2(\omega))$ nous avons $u_3 \in H^1(-1, 1[; H_0^2(\omega))$. De (77) nous déduisons

$$u_\alpha = \underline{u}_\alpha - x_3 \partial_\alpha \underline{u}_3 + u_\alpha^P = \tilde{u}_\alpha + u_\alpha^P, \tag{83}$$

où \underline{u}_α désigne une fonction quelconque de $H_0^1(\omega)$ et où nous avons posé

$$\left. \begin{aligned} u_3^P &= \int_{-1}^{x_3} L_{33} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} L_{33} \\ u_\alpha^P &= \int_{-1}^{x_3} L_{\alpha 3} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} L_{\alpha 3} - \int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha u_3^P + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha u_3^P. \end{aligned} \right\} \tag{84}$$

Étape 2 : De (76) et (83), nous déduisons

$$\forall \tau_{\alpha\beta} \in \underline{\Sigma}_t, \int_\Omega a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} - \int_\Omega \tau_{\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{u}_\beta = \int_\Omega (L_{\alpha\beta} + \partial_\alpha u_\beta^P) \tau_{\alpha\beta} \tag{85}$$

et si nous restreignons v à \underline{V}_{KL} dans (79) et (80), nous obtenons

$$\forall v \in \underline{V}_{KL}, \int_\Omega \sigma_{\alpha\beta} \partial_\alpha v_\beta = - F_\alpha(v_\alpha) - F_3(v_3), \tag{86}$$

et l'existence et l'unicité de (σ, u) s'obtiennent à l'aide du théorème 9.

Étape 3 : Nous posons $\tau = \sigma$ et $v = u$ dans (76)-(80). Nous obtenons (en omettant d'indiquer les normes car elles sont évidentes) :

$$\| \sigma_{\alpha\beta} \|_{\underline{\Sigma}_t}^2 \leq C \{ \| L_{\alpha\beta} \|_{\underline{\Sigma}_t}^2 + \| L_{\alpha 3} \| \cdot \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\underline{\Sigma}_3^0} + \| L_{33} \| \cdot \| \sigma_{33} \|_{\underline{\Sigma}_3^0} + \| F_\alpha \| \cdot \| v_\alpha \|_{\underline{V}_\alpha^0} + \| F_3 \| \cdot \| u_3 \|_{\underline{V}_3^0} \}. \tag{87}$$

Mais, de (79) et (80) nous déduisons (cf. théorème 9) :

$$\left. \begin{aligned} \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\underline{\Sigma}_3^0} &\leq C \sup_{v_\alpha \in \underline{V}_\alpha^0} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha \rangle}{\| v_\alpha \|_{\underline{V}_\alpha^0}} \leq C \{ \| F_\alpha \| + \| \sigma_{\alpha\beta} \|_{\underline{\Sigma}_t} \} \\ \| \sigma_{33} \|_{\underline{\Sigma}_3^0} &\leq C \sup_{v_3 \in \underline{V}_3^0} \frac{\int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{33}, \partial_3 v_3 \rangle}{\| v_3 \|_{\underline{V}_3^0}} \leq C \{ \| F_3 \| + \| \sigma_{\alpha 3} \|_{\underline{\Sigma}_3^0} \}, \end{aligned} \right\} \tag{88}$$

et finalement, en utilisant l'inégalité de Korn bidimensionnelle et les relations (82)-(83)-(84)-(85) et (87), nous déduisons le théorème 11. ■

Dans la suite de ce chapitre, nous ferons l'hypothèse que les coefficients de la loi de comportement vérifient :

$$a_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) = a_{ijkl}(x_1, x_2, -x_3).$$

De plus, pour donner une forme explicite aux forces appliquées, nous supposerons que $F_\alpha(\cdot)$ (resp. $F_3(\cdot)$) peuvent s'écrire :

$$F_\alpha(v_\alpha) = - \left\{ \int_\Omega f_\alpha v_\alpha + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_\alpha v_\alpha \right\}, \quad F_3(v_3) = - \left\{ \int_\Omega f_3 v_3 + \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} g_3 v_3 \right\},$$

où $f_\alpha \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-1}(\omega))$ et $g_\alpha \in H^{r-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$ (respectivement

$$f_3 \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-2}(\omega)) \quad \text{et} \quad g_3 \in H^{r-2}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-).$$

Les coefficients a_{ijkl} et la frontière de ω , soit γ , sont supposés aussi réguliers que nécessaire.

COROLLAIRE 11 : Si $L_{\alpha\beta} \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^r(\omega))$,

$$\begin{aligned} L_{\alpha 3} &\in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r+1}(\omega) \cap H_0^1(\omega)), \quad L_{33} \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r+2}(\omega) \cap H_0^2(\omega)), \\ f_\alpha &\in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-1}(\omega)), \quad f_3 \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-2}(\omega)), \\ g_\alpha &\in H^{r-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-), \quad g_3 \in H^{r-2}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-), \end{aligned}$$

où $r \geq 2$ (pour simplifier les écritures, mais le résultat est vrai si $r \geq 0$), alors $\sigma_{\alpha\beta} \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^r(\omega))$,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &\in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-1}(\omega)), \quad \sigma_{33} \in L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-2}(\omega)), \\ u_\alpha &\in H^1(\cdot - 1, 1[; H^{r+1}(\omega) \cap H_0^1(\omega)), \quad u_3 \in H^1(\cdot - 1, 1[; H^{r+2}(\omega) \cap H_0^2(\omega)), \end{aligned}$$

et de plus, on a les estimations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} &\| \sigma_{\alpha\beta} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^r(\omega))} + \| \sigma_{\alpha 3} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-1}(\omega))} + \| \sigma_{33} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-2}(\omega))} \\ &\quad + \| u_\alpha \|_{H^1(\cdot - 1, 1[; H^{r+1}(\omega))} + \| u_3 \|_{H^1(\cdot - 1, 1[; H^{r+2}(\omega))} \\ &\leq C \{ \| L_{\alpha\beta} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^r(\omega))} + \| L_{\alpha 3} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r+1}(\omega))} + \\ &\quad + \| L_{33} \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r+2}(\omega))} + \| g_\alpha \|_{H^{r-1}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} \\ &\quad + \| g_3 \|_{H^{r-2}(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)} + \| f_\alpha \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-1}(\omega))} \\ &\quad + \| f_3 \|_{L^2(\cdot - 1, 1[; H^{r-2}(\omega))} \} \end{aligned} \right.$$

où (σ, u) (resp. (L_{ij}, F)) désigne la solution de (76)-(80) (resp. le second membre). Dans le second membre de l'inégalité ci-dessus, il y a sommation sur les indices α et β . ■

Démonstration : Nous savons déjà (cf. (84)) que u_3^p et u_α^p satisfont les appartenances énoncées dans le corollaire 11. Revenant aux équations (85)-(86) nous obtenons, compte tenu des hypothèses faites sur les coefficients $a_{i,jhk}$, que u_α et u_3 (cf. (82)-(83)) sont respectivement solutions de

$$-\partial_\beta \left(\int_{-1}^{+1} a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} \right) \gamma_{\gamma\delta}(u) = \int_{-1}^{+1} f_\alpha + g_\alpha^+ + g_\alpha^- + \partial_\alpha \left(\int_{-1}^{+1} a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} (L_{\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\delta}(u^p)) \right) \quad (85)_2$$

$$+\partial_{\alpha\beta} \left(\int_{-1}^{+1} x_3^2 a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} \right) \partial_{\gamma\delta} u_3 = \int_{-1}^{+1} f_3 + g_3^+ + g_3^- + \partial_\alpha (g_\alpha^+ - g_\alpha^-) + \int_{-1}^{+1} x_3 \partial_\alpha f_\alpha - \partial_{\alpha\beta} \left(\int_{-1}^{+1} x_3 a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1} (L_{\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\delta}(u^p)) \right). \quad (86)_2$$

En utilisant les résultats de régularité des systèmes elliptiques (cf. Nečas [7], p. 260 et Geymonat [16]), nous déduisons les estimations du corollaire 11 pour u_α , $\sigma_{\alpha\beta}$ et u_3 (dans les expressions ci-dessus, $a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{-1}$ désigne l'inverse de l'opérateur $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui applique l'ensemble des matrices 2×2 dans lui-même). De l'expression explicite de $\sigma_{\alpha 3}$

$$\sigma_{\alpha 3} = - \int_{-1}^{x_3} f_\alpha - \int_{-1}^{x_3} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{g_\alpha^+ - g_\alpha^-}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_\alpha + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \partial_\beta \sigma_{\alpha\beta},$$

nous déduisons les résultats énoncés concernant $\sigma_{\alpha 3}$. De la même façon, de l'expression de σ_{33}

$$\sigma_{33} = - \int_{-1}^{x_3} f_3 - \int_{-1}^{x_3} \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3} + \frac{g_3^+ - g_3^-}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f_3 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}$$

nous déduisons le corollaire 11. ■

3.4. Calcul du terme (σ^2, u^2)

a) Nous ferons, dans ce paragraphe, l'hypothèse suivante :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^0 &\in L^2(-1, 1[; H^2(\omega)), \\ \sigma_{\alpha 3}^0 &\in L^2(-1, 1[; H^1(\omega)), \\ \sigma_{33}^0 &\in L^2(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Ceci nous permettra de calculer (σ^2, u^2) .

En utilisant le corollaire 11, il apparaît que (89) est satisfaite dès que

$$\begin{cases} f_\alpha \in L^2(]-1, 1[; H^1(\omega)), & g_\alpha \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-), \\ f_3 \in L^2(\Omega), & g_3 \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-). \end{cases}$$

Alors (σ^2, u^2) sera déterminé en tant qu'une solution du système d'équations obtenu en identifiant les termes en ε^2 dans les équations tridimensionnelles où l'on remplace $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ par $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \text{etc.}$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &\in \underline{\Sigma}_v, \int_{\Omega} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^2 \tau_{\gamma\delta} - \int_{\Omega} \partial_\alpha u_\beta^2 \tau_{\alpha\beta} = - \int_{\Omega} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{33}^0 \tau_{\alpha\beta}, \\ \tau_{\alpha 3} &\in \underline{\Sigma}_s^0, \int_{-1}^{+1} \langle \tau_{\alpha 3}, \partial_\alpha u_3^2 + \partial_3 u_\alpha^2 \rangle = 2 \int_{-1}^{+1} \langle a_{\alpha 3 \beta 3} \sigma_{\alpha 3}^0, \tau_{\beta 3} \rangle, \\ \tau_{33} &\in \underline{\Sigma}_3^0, \int_{-1}^{+1} \langle\langle \tau_{33}, \partial_3 u_3^2 \rangle\rangle = \int_{-1}^{+1} \langle\langle a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^0, \tau_{33} \rangle\rangle, \\ v_\alpha &\in \underline{V}_t^0, \int_{\Omega} \sigma_{\alpha\beta}^2 \partial_\alpha v_\beta + \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^2, \partial_3 v_\alpha \rangle = 0, \\ v_3 &\in V_3^0, \int_{-1}^{+1} \langle \sigma_{\alpha 3}^2, \partial_\alpha v_3 \rangle + \int_{-1}^{+1} \langle\langle \sigma_{33}^2, \partial_3 v_3 \rangle\rangle = 0. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Nous avons, tout d'abord, le

THÉORÈME 12 : *Sous l'hypothèse (89) les équations (90) admettent une solution unique dans un espace plus grand que $\underline{\Sigma}_t \times \underline{\Sigma}_s^0 \times \Sigma_3^0 \times \underline{V}_t^0 \times V_3^0$. Cet espace est noté $\underline{\Sigma}_t^0 \times \underline{\Sigma}_s^0 \times \Sigma_3^0 \times \underline{W}_t^0 \times W_3^0$, avec*

$$\underline{W}_t^0 = \{ v = (v_\alpha) \in H^1(]-1, 1[; H^1(\omega)) : \int_{-1}^{+1} v_\alpha(x_1, x_2, t) dt = 0 \text{ p.p. sur } \gamma \}$$

$$W_3^0 = \{ v = (v_3) \in H^1(]-1, 1[; H^2(\omega)) : \int_{-1}^{+1} v_3(x_1, x_2, t) dt = 0 \text{ p.p. sur } \gamma \}. \quad \blacksquare$$

Remarque 7 : Avec les hypothèses supplémentaires

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^0 &\in L^2(]-1, 1[; H_0^2(\omega)), \\ \sigma_{\alpha 3}^0 &\in L^2(]-1, 1[; H_0^1(\omega)), \end{aligned} \quad (91)$$

l'unique solution de (90) est en fait telle que

$$(u_2) \in \mathcal{V}_t^0 \text{ et } u_3 \in \mathcal{V}_3^0. \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème 12 : Reprenant la première étape du théorème 11, nous avons (avec les mêmes notations) $u_3^P \in W_3^0$ et $u_\alpha^P \in \mathcal{W}_t^0$. La preuve se termine alors comme au théorème 11. \blacksquare

Dans la suite, nous noterons $u_i^{2,P}$ la solution particulière u_i^P associée à u_i^2 .

Le terme u^2 que nous venons de déterminer ne satisfait pas les conditions aux limites voulues. Nous sommes donc amenés à modifier la définition du terme (σ^2, u^2) de telle sorte que les conditions aux limites soient satisfaites. Remarquons néanmoins que, dans le cas d'une plaque simplement appuyée, le terme (σ^2, u^2) précédent satisfait les bonnes conditions aux limites, et dans ce cas, aucun correcteur n'est nécessaire pour obtenir une estimation d'erreur, comme nous l'avons montré au § 2.

3.5. Estimation d'erreur

Nous allons donner l'estimation d'erreur entre la solution du problème tridimensionnel et celle du problème limite. C'est avec le théorème 7, le résultat essentiel de cet article.

THÉORÈME 13 : *Sous l'hypothèse $f_\alpha \in L^2(\cdot) - 1, 1[; H^1(\omega)), g_\alpha^\pm \in H^1(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, $f_3 \in L^2(\Omega)$, $v_3^\pm \in L^2(\Gamma_+ \cup \Gamma_-)$, on a les estimations d'erreur suivantes :*

$$\left. \begin{aligned} & \| \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^0 \|_{L^2(\Omega)} && \leq c\sqrt{\varepsilon}, \\ & \| \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^0 \|_{L^2(\cdot) - 1, 1[; H^{-1}(\omega))} && \leq c\sqrt{\varepsilon}, \\ & \| \sigma_{33}^\varepsilon - \sigma_{33}^0 \|_{L^2(\cdot) - 1, 1[; H^{-2}(\omega))} && \leq c\sqrt{\varepsilon}, \\ & \varepsilon \| \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^2 \| \sigma_{33}^\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} && \leq c\sqrt{\varepsilon}, \\ & \| u^\varepsilon - u^0 \|_{\mathcal{V}} && \leq c\sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

où c désigne une constante positive indépendante de ε . \blacksquare

Démonstration : Commençons par rappeler un résultat de base en théorie de la couche limite, donné par J. L. Lions [9], p. 126.

« Si φ désigne une fonction de $H^1(\omega)$, pour tout $\lambda > 0$, il existe $\varphi_0(\lambda)$ et $\varphi_1(\lambda)$, éléments de $H_0^1(\omega)$ et de $H^1(\omega)$, telles que

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda) \text{ sur } \omega, \\ & \| \varphi_0(\lambda) \|_{H^1(\omega)} \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \| \varphi \|_{H^1(\omega)}, \\ & \| \varphi_1(\lambda) \|_{L^2(\omega)} \leq c\sqrt{\lambda} \| \varphi \|_{L^2(\omega)}. \end{aligned} \right. \gg$$

A l'aide d'une démonstration calquée sur celle de J. L. Lions, on montre que, pour toute fonction φ de $L^2(-1, 1[; H^2(\omega))$, et pour tout $\lambda > 0$, il existe deux fonctions $\varphi_0(\lambda)$ et $\varphi_1(\lambda)$, éléments de $L^2(-1, 1[; H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega))$ et de $L^2(-1, 1[; H^2(\omega))$, telles que ($H^2(\omega)$ n'est pas indispensable)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0(\lambda) + \varphi_1(\lambda), \\ \|\varphi_0(\lambda)\|_{L^2(-1, 1[; H^1(\omega))} \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \|\varphi\|_{L^2(-1, 1[; H^1(\omega))}, \\ \|\varphi_1(\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \leq c\sqrt{\lambda} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Appliquons ce résultat au tenseur $\sigma_{\alpha\beta}^0$. Sous les hypothèses du théorème 13 nous avons montré que $\sigma_{\alpha\beta}^0 \in L^2(-1, 1[; H^2(\omega))$. Il existe donc deux tenseurs, soient $\sigma_{\alpha\beta}^{00}$ et $\sigma_{\alpha\beta}^{01}$, éléments de $L^2(-1, 1[; H_0^1(\omega) \cap H^2(\omega))$ et de $L^2(-1, 1[; H^2(\omega))$, tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^{00} + \sigma_{\alpha\beta}^{01} \\ \|\sigma_{\alpha\beta}^{00}\|_{L^2(-1, 1[; H^1(\omega))} \leq \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}, \\ \|\sigma_{\alpha\beta}^{01}\|_{L^2(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Définissons a priori une solution particulière de l'équation

$$\partial_3 v_3^2 = a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{00}$$

par

$$v_3^2 = \int_{-1}^{x_3} a_{\alpha\beta 33} \sigma_{\alpha\beta}^{00}.$$

Compte tenu de ce que $\sigma_{\alpha\beta}^{00}$ s'annule sur Γ_0 , l'élément v_3^2 ainsi défini est bien dans l'espace V des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur Γ_0 .

Enfin, nous utilisons les variables d'écart suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^0, \\ \bar{\sigma}_{\alpha 3} = \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon - \sigma_{\alpha 3}^0, \\ \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33}^\varepsilon - \sigma_{33}^0, \\ \bar{u}_\alpha = u_\alpha^\varepsilon - u_\alpha^0, \\ \bar{u}_3 = u_3^\varepsilon - u_3^0 - \varepsilon^2 v_3^2. \end{array} \right.$$

Nous avons alors

$$\left\{ \begin{aligned}
 & c \{ \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_\tau}^2 + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^4 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)}^2 \} \\
 & \leq a_0(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}) + \varepsilon^2 a_2(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}) + \varepsilon^4 a_4(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}) \\
 & = a_0(\sigma^\varepsilon, \bar{\sigma}) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \bar{\sigma}) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \bar{\sigma}) - a_0(\sigma^0, \bar{\sigma}) \\
 & \quad - \varepsilon^2 a_2(\sigma^0, \bar{\sigma}) - \varepsilon^4 a_4(\sigma^0, \bar{\sigma}) \\
 & = -B(\bar{\sigma}, u^\varepsilon) + B(\bar{\sigma}, u^0) - \varepsilon^4 a_4(\sigma^0, \bar{\sigma}) \\
 & \quad - \varepsilon^2 a_2(\sigma_{\alpha\beta}^{01}, \bar{\sigma}) + \varepsilon^2 B(\bar{\sigma}, v_3^2) + \varepsilon^2 \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\alpha 3} \partial_\alpha v_3^2 \\
 & \leq -B(\bar{\sigma}, \bar{u}) + c\varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} \|\partial_\alpha v_3^2\|_{(L^2(\Omega))^2} \\
 & \quad + c\varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)} \{ \varepsilon^2 + \|\sigma_{\alpha\beta}^{01}\|_{\Sigma_\tau} \} \\
 & \leq -B(\sigma^\varepsilon, \bar{u}) + B(\sigma^0, \bar{u}) + c\varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\} \\
 & \quad + c\varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)} \{ \sqrt{\varepsilon} \} \\
 & \leq c\varepsilon^{3/2} \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} + c\varepsilon^{5/2} \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned} \right.$$

et finalement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$(i) \quad \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_\tau}^2 + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \varepsilon^4 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c\varepsilon.$$

Par ailleurs, de

$$\left\{ \begin{aligned}
 -B(\tau, \bar{u}) & = -B(\tau, u^\varepsilon) + B(\tau, u^0) + \varepsilon^2 B(\tau, v_3^2) \\
 & = a_0(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) - a_0(\sigma^0, \tau) + \varepsilon^2 B(\tau, v_3^2) \\
 & \leq (\|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_\tau} + \varepsilon \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)}) \|\tau\|_{\Sigma} + c\varepsilon^{3/2} \|\tau\|_{\Sigma}
 \end{aligned} \right.$$

et en utilisant l'inégalité de Korn sur Ω , on obtient :

$$(ii) \quad \|\bar{u}\|_V \leq c(\varepsilon^{3/2} + \|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_\tau} + \varepsilon \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)}).$$

Finalement, à l'aide de (i) et (ii), nous obtenons

$$\|\bar{\sigma}_{\alpha\beta}\|_{\Sigma_\tau} + \varepsilon \|\bar{\sigma}_{\alpha 3}\|_{(L^2(\Omega))^2} + \varepsilon^2 \|\bar{\sigma}_{33}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u}\|_V \leq c\sqrt{\varepsilon},$$

d'où nous déduisons, par l'inégalité triangulaire :

$$\|\sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon - \sigma_{\alpha\beta}^0\|_{\Sigma_\tau} + \varepsilon \|\sigma_{\alpha 3}^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^2} + \varepsilon^2 \|\sigma_{33}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u}\|_V \leq c\sqrt{\varepsilon}.$$

Pour terminer la démonstration du théorème 13, il suffit de reprendre les estimations obtenues à l'étape 3 du théorème 10 :

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\alpha 3}^e - \sigma_{\alpha 3}^0\|_{(L^2(\Gamma-1,1]; H^{-1}(\omega))} &\leq c \|\sigma_{\alpha\beta}^e - \sigma_{\alpha\beta}^0\|_{\Sigma_\varepsilon} \\ \|\sigma_{33}^e - \sigma_{33}^0\|_{L^2(\Gamma-1,1]; H^{-2}(\omega))} &\leq c \|\sigma_{\alpha 3}^e - \sigma_{\alpha 3}^0\|_{(L^2(\Gamma-1,1]; H^{-1}(\omega))}^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. CONCLUSION

Nous avons comparé dans ce travail les solutions des modèles bidimensionnels et tridimensionnels de plaques. Nous avons trouvé en particulier que l'approximation est meilleure dans le cas de plaques « simplement supportées » (§ 2). Dans le cas encastré (§ 3), nous avons mis en évidence un phénomène de couche limite au voisinage de la frontière latérale de la plaque. Seule la prise en compte de cette couche limite à l'aide de fonctions correctrices permet d'améliorer l'approximation du modèle tridimensionnel [6], [17].

L'étude que nous avons développée ici peut s'étendre à d'autres problèmes de plaques correspondant à diverses conditions aux limites sur Γ_0^e .

On obtient aussi des résultats analogues pour les coques, mais avec des difficultés supplémentaires liées à la courbure de la surface moyenne [6]. Enfin, par la méthode exposée ici, P. G. Ciarlet et S. Kesavan [18] ont étudié la dégénérescence des modèles de plaques en vibrations.

REFERENCES

- [1] P. G. CIARLET, Ph. DESTUYNDER, *A justification of the two espace dimensional linear plate model*, J. de Mécanique, 18 (1979), 315-344.
- [2] A. L. GOL'DENVEIZER, *Derivation of an approximate theory of bending of a plate by a method of asymptotic integration of the equations in the theory of elasticity*, J. Appl. Math., 19 (1963), 1000-1025.
- [3] A. RIGOLOTTI, *Sur une théorie asymptotique des poutres droites*, Thèse d'état, Paris, 1973.
- [4] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, R.A.I.R.O., R2 (1974), 129-151.
- [5] I. BABUŠKA, *Error bounds for finite element method*, Numer. Math., 16 (1971), 323-333.
- [6] Ph. DESTUYNDER, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'état, Paris, 1979.
- [7] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

- [8] G. DUVAUT, J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1973.
- [9] J. L. LIONS, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 323, Springer Verlag, Berlin, 1973.
- [10] H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones*, Mathematics Studies N° 5, North Holland, Amsterdam and New York, 1952.
- [11] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, T. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [12] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques, Livre VI : Intégration*, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1175, Hermann, Paris, 1952.
- [13] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin 1975 (4^e ed.).
- [14] R. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1976.
- [15] A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford Press, 1975.
- [16] G. GEYMONAT, *Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici*, Annali di Matematica Pura e Applicata, *LXIX* (1965), 207-284.
- [17] K. O. FRIEDRICHS, R. F. DRESSLER, *A boundary layer theory for elastic plates*, C.P.A.M., *XIV*, 1961, 1-33.
- [18] P. G. CIARLET, S. KESAVAN, *Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problems in plate theory*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. (1981).