RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

D. CAILLERIE

Homogénéisation des équations de la diffusion stationnaire dans les domaines cylindriques aplatis

RAIRO. Analyse numérique, tome 15, nº 4 (1981), p. 295-319

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_4_295_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 15, nº 4, 1981, p. 295 à 319)

HOMOGÉNÉISATION DES ÉQUATIONS DE LA DIFFUSION STATIONNAIRE DANS LES DOMAINES CYLINDRIQUES APLATIS (*)

par D. CAILLERIE ([1])

Communiqué par J. L. LIONS

Résumé. — *Nous étudions un problème de passages à la limite à deux petits paramètres dans les équations aux dérivées partielles de la diffusion stationnaire dans un domaine cylindrique de* $\mathbb{R}^3$. *L'un des petits paramètres e est l'épaisseur du domaine, l'autre* ε *est l'ordre de grandeur de la période des coefficients des équations. Nous constatons que les deux passages à la limite* $e \to 0$ *et* $\varepsilon \to 0$ *ne commutent pas. Nous étudions ensuite le passage à la limite* $e \to 0$ *et* $\varepsilon \to 0$ *avec* $\varepsilon = \lambda e$ *; enfin, en faisant tendre* λ *vers l'infini (resp. vers zéro) nous retrouvons le résultat des passages à la limite successifs* ($e \to 0$ *puis* $\varepsilon \to 0$) (*resp.* ($\varepsilon \to 0$ *puis* $e \to 0$)).

Summary. — *We study a problem of convergence of solutions of the stationnary heat equations in a cylindrical domain of* $\mathbb{R}^3$. *There are two small parameters, one of them e is the thickness of the domain, the other,* ε *is the size of the period of the coefficients of the equations. We establish that the two processes* $e \to 0$ *and* $\varepsilon \to 0$ *do not commute. Then we study the process* $e \to 0$ *and* $\varepsilon \to 0$ *when* $\varepsilon = \lambda e$ *; lastly when* λ *goes to infinity (resp. to zero) we find again the result of the process* ($e \to 0$ *the* $\varepsilon \to 0$) (*resp.* ($\varepsilon \to 0$ *puis* $e \to 0$)).

1. INTRODUCTION

On étudie un problème de diffusion stationnaire dans un corps cylindrique d'épaisseur $2e$ petite, et de structure périodique dans son plan, la période petite, étant de l'ordre de ε. On se propose d'étudier le comportement limite des solutions de ce problème quand e et ε tendent vers zéro.

L'analogue de ce problème en élasticité est l'homogénéisation des plaques périodiques. Les équations des plaques en flexion peuvent être obtenues par un développement asymptotique, en fonction de l'épaisseur de la plaque, des équations de l'élasticité tridimensionnelle [4] ; quand on recherche le comportement asymptotique d'une plaque élastique à structure périodique [5], on suppose donc que l'épaisseur de la plaque est très petite devant la taille des

(*) Manuscrit reçu en juillet 1980.
([1]) Laboratoire de Mécanique Théorique, Université P. et M.-Curie, Paris.

cellules qui la composent. On peut se demander quel est le comportement de cette plaque quand les cellules sont plus grandes ou du même ordre que l'épaisseur.

L'objet de cet article est de traiter ces cas pour un problème de diffusion stationnaire. Il fait apparaître un comportement limite qui dépend en général du rapport ε/e quand e et ε tendent vers 0. Le premier cas envisagé est celui où l'épaisseur est beaucoup plus petite que ε, on fait donc tendre e vers zéro puis ε, on étudie ensuite le cas inverse par les passages à la limite successifs $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$. Dans les deux cas, le problème limite obtenu est un problème de diffusion stationnaire bidimensionnel, mais les deux passages à la limite $e \to 0$ et $\varepsilon \to 0$ ne commutent pas, en effet les deux processus donnent des matrices de diffusion bidimensionnelles différentes. On étudie en troisième lieu une situation intermédiaire où ε et e tendent vers zéro simultanément ($\varepsilon = \lambda e$, λ fixé), la matrice de diffusion bidimensionnelle obtenue dépend de λ et elle est différente des deux précédentes. Enfin, on fait varier λ, quand λ tend vers l'infini (resp. zéro) le problème limite obtenu est le même que lors du passage à la limite $e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$ (resp. $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$).

Après avoir précisé le problème au § 2, on établit au § 3 des estimations à priori qui à l'aide des études des limites de flux faites au § 4 permettent d'effectuer les différents passages à la limite. Ceux-ci sont exposés au § 5 pour le processus $e \to 0$ puis $\varepsilon \to 0$, au § 6 pour le processus $\varepsilon \to 0$ puis $e \to 0$ et au § 8 pour les passages à la limite simultanés $\varepsilon \to 0$ et $e \to 0$ avec $\varepsilon = \lambda e$, dans ce dernier paragraphe on étudie aussi les limites $\lambda \to \infty$ et $\lambda \to 0$. Le § 7 est consacré à un problème bidimensionnel donc plus simple, qui permet de mettre en évidence la différence des matrices de diffusion bidimensionnelle trouvées aux §§ 5 et 6.

Les méthodes utilisées sont les méthodes de l'homogénéisation exposées dans [1] et des méthodes mises au point pour d'autres problèmes [6], [2].

Les principaux résultats qui avaient été annoncés dans un précédent article [3] sont donnés par les théorèmes 5.1, 6.2, 8.1 et 8.2.

Notations

ω	domaine de $\mathbb{R}^2$	variables z_1, z_2
Ω_e	domaine de $\mathbb{R}^3 = \omega \times]-e, e[$	variables x_1, x_2, x_3
Ω	domaine de $\mathbb{R}^3 = \omega \times]-1, 1[$	variables z_1, z_2, z_3
Y	domaine de $\mathbb{R}^2 =]0, Y_1[\times]0, Y_2[$	variables y_1, y_2
$\mathcal{Y}$	domaine de $\mathbb{R}^3 = Y \times]-1, 1[$	variables y_1, y_2, y_3

$$z^\varepsilon = (z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon, z_3^\varepsilon) = \left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) \qquad \forall z \in \Omega.$$

Matrices utilisées

Nom	Dimension	Domaine de définition	Propriétés Définitions
$a_{ij}(y)$	3×3	$\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$	Périodique en y_1, y_2 de période $\mathcal{Y}$. Voir (2.1), (2.2)
$a_{ij}^{\varepsilon}(z)$	3×3	Ω	Périodique en z_1, z_2 de période $\varepsilon Y \times]-1, 1[$ $a_{ij}(z) = a_{ij}(z^{\varepsilon})$
$\overline{a}_{ij}^{e\varepsilon}(z)$	3×3	Ω	Périodique en z_1, z_2 de période $\varepsilon Y \times]-1, 1[$. Voir (3.3)
$\tilde{a}_{ij}^{e}(x)$	3×3	Ω_e	Périodique en x_1, x_2 de période $\varepsilon Y \times]-e, e[$. Voir (2.3)
$a_{ij}^{\lambda}(y)$	3×3	$\bar{\mathcal{Y}}$	Voir (8.1)
$b_{\alpha\beta}(y)$	2×2	$\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$	Périodique en y_1, y_2 de période $\mathcal{Y}$ $b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - \dfrac{a_{\alpha 3}\, a_{3\beta}}{a_{33}}$
$b_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(z)$	2×2	Ω	Périodique en z_1, z_2 de période $\varepsilon Y \times]-1, 1[$ $b_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(z) = b_{\alpha\beta}(z^{\varepsilon})$
$c_{\alpha\beta}(y_1, y_2)$	2×2	$\mathbb{R}^2$	Périodique en y_1, y_2 de période Y $c_{\alpha\beta}(y_1, y_2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} b_{\alpha\beta}(y_1, y_2, y_3)\, dy_3$
$c_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(z_1, z_2)$	2×2	ω	Périodique de période εY $c_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(z_1, z_2) = c_{\alpha\beta}\left(\dfrac{z_1}{\varepsilon}, \dfrac{z_2}{\varepsilon}\right) = \displaystyle\int_{-1}^{1} b_{\alpha\beta}^{\varepsilon}(z_1, z_2, z_3)\, dz$
$d_{\alpha\beta}(z_1, z_2)$	2×2	ω	Indépendante de z_1, z_2 homogénéisée de $c_{\alpha\beta}^{\varepsilon}$. Voir (5.3)
$p_{ij}(z)$	3×3	Ω	Indépendante de z_1, z_2 homogénéisée de a_{ij}^{ε}. Voir (6.4)
$\overline{p}_{ij}^{e}(z)$	3×3	Ω	Indépendante de z_1, z_2. Voir (6.5)
$q_{\alpha\beta}(z_1, z_2)$	2×2	ω	Indépendante de z_1, z_2 $q_{\alpha\beta} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(p_{\alpha\beta} - \dfrac{p_{\alpha 3}\, p_{3\beta}}{p_{33}}\right) dz_3$
$s_{\alpha\beta}^{\lambda}(z_1, z_2)$	2×2	ω	Indépendante de z_1, z_2. Voir (8.10)

Espaces fonctionnels

$$V_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma_0} = 0 \}$$

$$W(Y) = \left\{ v \in H^1(Y) \mid v|_{y_\alpha = 0} = v|_{y_\alpha = Y_\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{et} \quad \int_Y v \, dy_1 \, dy_2 = 0 \right\}$$

$$\mathscr{W}(\mathscr{Y}) = \left\{ v \in H^1(\mathscr{Y}) \mid v|_{y_\alpha = 0} = v|_{y_\alpha = \mathscr{Y}_\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \ \text{et} \int_{\mathscr{Y}} v \, dy_1 \, dy_2 \, dy_3 = 0 \right\}.$$

Limites de fonctions

$u^{*\varepsilon}$ limite faible dans $V_0(\Omega)$ de $u^{e\varepsilon}$ quand $e \to 0$
u^{*e} limite faible dans $V_0(\Omega)$ de $u^{e\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0$
$u^{*\lambda}$ limite faible dans $V_0(\Omega)$ de $u^{e\varepsilon}$ quand $e \to 0$ et $\varepsilon \to 0$ avec $\varepsilon = \lambda e$
u^{*1} limite faible dans $H_0^1(\omega)$ de $u^{*\varepsilon}$ quand $\varepsilon \to 0$
u^{*2} limite faible dans $V_0(\Omega)$ de u^{*e} quand $e \to 0$.

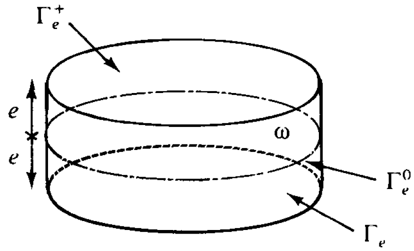
2. ÉNONCÉ DU PROBLÈME

On considère dans $\mathbb{R}^2$ un domaine borné ω de frontière γ régulière et dans $\mathbb{R}^3$ le domaine

$$\Omega_e = \{ x \mid (x_1, x_2) \in \omega, \mid x_3 \mid < e \}$$

e nombre positif donné.

On définit
$$\Gamma_e^\pm = \{ x \mid (x_1, x_2) \in \omega, x_3 = \pm e \}$$
$$\Gamma_e^0 = \{ x \mid (x_1, x_2) \in \gamma, \mid x_3 \mid < e \}.$$



n_3 normale extérieure sur $\Gamma_e^+ \cup \Gamma_e^-$

On considère dans Ω_e le problème suivant

Trouver $\tilde{u}^{e\varepsilon}$ tel que : $\qquad \tilde{\sigma}_i^{e\varepsilon} = \tilde{a}_{ij}^{e\varepsilon} \dfrac{\partial \tilde{u}_i^{e\varepsilon}}{\partial x_j}$

$$\tilde{\sigma}_{i,i}^{e\varepsilon} + \tilde{f} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_e \quad \tilde{\sigma}_3^{e\varepsilon} n_3 = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_e^+ \cup \Gamma_e^-$$
$$g = g^+ \ (\text{resp. } g^-) \quad \text{sur} \quad \Gamma_e^+ \ (\text{resp. } \Gamma_e^-)$$
$$\tilde{u}^{e\varepsilon} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_e^0 .$$

Le problème étudié est celui de la propagation stationnaire de la chaleur dans le domaine Ω_e ; la fonction $\tilde{f}$ représente l'apport de chaleur en volume, les fonctions g^+ et $-g^-$ représentent les flux de chaleur sur les faces Γ_e^+ et Γ_e^-, la température $\tilde{u}^{e\varepsilon}$ est maintenue nulle sur le bord latéral Γ_e^0. Les coefficients $\tilde{a}_{ij}^{e\varepsilon}$ forment la matrice de conductivité.

On suppose que $\tilde{f}$ (resp. g^+, g^-) est donnée et appartient à $L^\infty(\Omega_e)$ (resp. $L^2(\omega)$).

Les coefficients $\tilde{a}_{ij}^{e}$ sont périodiques en (x_1, x_2) la période étant de l'ordre de ε. De façon plus précise, on considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $Y = (]0, Y_1[\times]0, Y_2[)$ et dans $\mathbb{R}^3$ le domaine $\mathcal{Y} = (Y \times]-1, 1[)$; on appelle $\mathcal{Y}^{\pm} = \{ y \mid (y_1, y_2) \in Y, y_3 = \pm 1 \}$; on se donne sur $\mathbb{R}^2 \times (]-1, 1[)$ des fonctions $a_{ij}(y)$ $i, j = 1, 2, 3$ périodique de période $\mathcal{Y}$ telles que :

$$a) \qquad \forall i, j = 1, 2, 3 \qquad a_{ij}\,|_y \in L^\infty(\mathcal{Y}) \tag{2.1}$$

$$b) \qquad \exists m > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$m w_j w_j \leqslant a_{ij}(y)\, w_i w_j \quad pp \text{ en } y\,. \tag{2.2}$$

On définit alors $\tilde{a}_{ij}^{\varepsilon}(x)$ par

$$\tilde{a}_{ij}^{e\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{e}\, a_{ij}\!\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{e}\right) \qquad i, j = 1, 2, 3\,. \tag{2.3}$$

On se propose de chercher la limite de $\tilde{u}^{e\varepsilon}$ quand e et ε tendent vers 0, séparément ou simultanément (on posera alors $\varepsilon = \lambda e$, λ réel fixé).

3. FORMULATION VARIATIONNELLE ET ESTIMATION A PRIORI

3.1. Formulation variationnelle

On dilate le domaine Ω_e en un domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ indépendant de e. On pose :

$$\begin{aligned} z_\alpha &= x_\alpha \qquad \alpha = 1, 2 \qquad z_3 = \frac{x_3}{e} \\ u^{e\varepsilon}(z_1, z_2, z_3) &= \tilde{u}^{e\varepsilon}(z_1, z_2, e z_3) \\ f(z_1, z_2, z_3) &= \tilde{f}(z_1, z_2, e z_3) \\ \sigma_i^{e\varepsilon}(z_1, z_2, z_3) &= e\tilde{\sigma}_i^{e\varepsilon}(z_1, z_2, e z_3) \qquad i = 1, 2, 3 \\ z^\varepsilon &= \left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

On définit a_{ij}^{ε} $i, j = 1, 2, 3$ par :

$$a_{ij}^{\varepsilon}(z) = a_{ij}(z^\varepsilon) \tag{3.2}$$

et $\overline{a}^{e\varepsilon}_{ij}$ $i, j = 1, 2, 3$ par

$$\left.\begin{array}{lr} \overline{a}^{e\varepsilon}_{\alpha\beta}(z) = a^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(z) & \alpha, \beta = 1, 2 \\ \overline{a}^{e\varepsilon}_{\alpha 3}(z) = \frac{1}{e}\, a^{\varepsilon}_{\alpha 3}(z) & \alpha = 1, 2 \\ \overline{a}^{e\varepsilon}_{3\alpha}(z) = \frac{1}{e}\, a^{\varepsilon}_{3\alpha}(z) & \alpha = 1, 2 \\ \overline{a}^{e\varepsilon}_{33}(z) = \frac{1}{e^2}\, a_{33}(z) & \end{array}\right\} . \tag{3.3}$$

Remarque 3.1 : On a $\tilde{a}^{e\varepsilon}_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{e}\, a^{\varepsilon}_{ij}\left(x_1, x_2, \frac{x_3}{e}\right)$. ∎

Dans cette dilatation Γ^+_e (resp. Γ^-_e, Γ^0_e) devient Γ^+ (resp. Γ^-, Γ^0).
Dans Ω le problème posé (noté P) est :
Trouver $u^{e\varepsilon}$ vérifiant :

$$\left.\begin{array}{c} \sigma^{e\varepsilon}_{\alpha} = \overline{a}^{e\varepsilon}_{\alpha j} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \qquad \sigma^{e\varepsilon}_{3} = e\overline{a}^{e\varepsilon}_{3j} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \\ \sigma^{e\varepsilon}_{\alpha,\alpha} + \frac{1}{e}\, \sigma^{e\varepsilon}_{3,3} + ef = 0 \\ e\sigma^{e\varepsilon}_3 = g^+ (\text{resp.} - g^-) \quad \text{sur} \quad \Gamma^+ (\text{resp.}\ \Gamma^-) \\ u^{e\varepsilon} = 0 \quad \text{sur}\ \Gamma^0 . \end{array}\right\} . \tag{3.4}$$

Soit $$V_0(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma^0} = 0 \}$$

La formulation variationnelle du problème P s'écrit :
Trouver $u^{e\varepsilon} \in V_0(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\Omega} \overline{a}^{e\varepsilon}_{ij} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \frac{\partial v}{\partial z_i}\, dz = e \int_{\Omega} fv\, dz + \int_{\Gamma^+} g^+ v\, d\Gamma + \int_{\Gamma^-} g^- v\, d\Gamma \quad \forall v \in V_0(\Omega) . \tag{3.5}$$

3.2. Étude de la matrice $\overline{a}^e_{ij}$

Soit $w \in \mathbb{R}^3$, on pose $W = (W_1, W_2, W_3) = \left(w_1, w_2, \frac{w_3}{e}\right)$ et on a

$$w_i\, a^{e\varepsilon}_{ij}\, w_j = W_i\, a_{ij}\, W_j .$$

Et d'après l'hypothèse (2.2) on a :

$$m\left(w_1^2 + w_2^2 + \frac{w_3^2}{e^2}\right) \leqslant w_i\, \overline{a}^{e\varepsilon}_{ij}\, w_j .$$

Dans la suite e sera fixe ou tendra vers 0, donc $1/e$ est minoré par 1 si e est inférieur à 1 et on a :

$$m(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \leqslant w_i \, \overline{a}_{ij}^{e\varepsilon} \, w_j . \tag{3.6}$$

La forme bilinéaire intervenant dans (3.5) est coercive. *Donc d'après le théorème de Lax Milgram le problème (P) admet une solution unique.*

3.3. Estimations à priori

Dans (3.5) on prend $v = u^{e\varepsilon}$ et on a, compte tenu de (3.6) :

$$m \sum_{i=1}^{3} \left\| \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant \int_{\Omega} \overline{a}_{ij}^{e\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_i} \, dz \leqslant e \, \| f \|_{L^2(\Omega)} \, \| u^{e\varepsilon} \|_{L^2(\Omega)} + $$
$$+ \, C(\| g^+ \|_{L^2(\omega)} + \| g^- \|_{L^2(\omega)}) \, \| u^{e\varepsilon} \|_{H^1(\Omega)} .$$

Le premier membre de l'inégalité est proportionnel au carré d'une norme équivalente à celle de V_0 donc :

$$\| u^{e\varepsilon} \|_{V_0(\Omega)} \leqslant C . \tag{3.7}$$

Ici et dans la suite, C désigne différentes constantes indépendantes de e et de ε.

$V_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert et $u^{e\varepsilon}$ est borné dans $V_0(\Omega)$, on peut donc énoncer le lemme suivant :

LEMME 3.1 : *Quand e ou ε tendent vers 0, on peut extraire une sous-suite de $u^{e\varepsilon}$ (toujours notée $u^{e\varepsilon}$) qui converge vers u^* dans $V_0(\Omega)$ faible.*

Remarque 3.2 : L'unicité de la limite u^* (qui sera démontrée par la suite) permet de dire que toute la suite $u^{e\varepsilon}$ tend vers u^*. ■

Remarque 3.3 : D'après (3.7) les différentes limites faibles u^* vérifient :

$$\| u^* \|_{V_0(\Omega)} \leqslant C . \quad ■$$

Notation : La limite u^* est notée

$u^{*\varepsilon}$ quand $e \to 0$ ε fixe .

u^{*e} quand $\varepsilon \to 0$ e fixe .

$u^{*\lambda}$ quand e et $\varepsilon \to 0$ avec $\varepsilon = \lambda e$

λ réel fixé.

Ces notations seront adoptées pour les limites d'autres quantités ($\sigma_{ij}^{e\varepsilon}$ par exemple). ■

Du remplacement de v par $u^{e\varepsilon}$ dans (3.5) et de (3.7), on a aussi :

$$\left\| \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_1} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{e^2} \left\| \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_3} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C . \tag{3.8}$$

Donc quand e tend vers 0, $\partial u^{e\varepsilon}/\partial z_3$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ fort d'où le lemme :

LEMME 3.2 : *Les limites $u^{*\varepsilon}$ et $u^{*\lambda}$ vérifient :*

$$\frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial z_3} = \frac{\partial u^{*\lambda}}{\partial z_3} = 0 .$$

On peut identifier $u^{*\varepsilon}$ et $u^{*\lambda}$ à des fonctions de $H^1(\omega)$.

4. ÉTUDE DES CONTRAINTES ET DES MOYENNES DES CONTRAINTES

On a d'après (3.4)

$$\sigma_\alpha^{e\varepsilon} = \overline{a}_{\alpha j}^{e\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \qquad \alpha = 1, 2 ; \quad \sigma_3^{e\varepsilon} = e\overline{a}_{3j}^{e\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} . \tag{4.1}$$

LEMME 4.1 : *Quand e ou ε tendent vers 0, les $\sigma_i^{e\varepsilon}$ restent bornées dans $L^2(\Omega)$, on peut donc en extraire des sous-suites (notées $\sigma_i^{e\varepsilon}$) qui convergent vers σ_i^*, $i = 1, 2, 3$ dans $L^2(\Omega)$ faible.*

Démonstration : On a en utilisant (2.1), (3.8)

$$\| \sigma_\alpha^{e\varepsilon} \|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\overline{a}_{\alpha j}^{e\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \right)^2 dz \leqslant C \int_\Omega (\overline{a}_{\alpha j}^{e\varepsilon})^2 \left(\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j} \right)^2 dz \leqslant$$

$$\leqslant C \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_2} \right)^2 + \frac{1}{e^2} \left(\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_3} \right)^2 \right] dz \leqslant C .$$

Pour $\sigma_3^{e\varepsilon}$ on a le même résultat. ∎

LEMME 4.2 : *La moyenne de $\sigma_\alpha^{*\lambda}$: $t_\alpha^{*\lambda} = \int_{-1}^{1} \sigma_\alpha^{*\lambda} \, dz_3$ $\alpha = 1, 2$ vérifie :*

$$\int_\omega (g^+ + g^-) \, v \, d\omega = \int_\omega t_\alpha^{*\lambda} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} d\omega \qquad \forall v \in H_0^1(\omega) .$$

Démonstration : Dans (3.5) on prend v indépendant de z_3 qu'on identifie à une fonction de $H_0^1(\omega)$ on a :

$$e \int_\Omega fv \, dz + \int_\omega (g^+ + g^-) \, v \, d\omega = \int_\Omega \sigma_\alpha^{e\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} d\Omega .$$

En passant à la limite $e \to 0$ avec $\varepsilon = \lambda e$ et en tenant compte de l'indépendance de v vis-à-vis de z_3 on a le lemme 4.2. ■

LEMME 4.3 : *La limite $\sigma_3^{*\varepsilon}$ est nulle.*

Démonstration : Soit φ une fonction de $\mathscr{D}(\Omega)$. Dans (3.5) on prend

$$v = \int_0^{z_3} \varphi(z_1, z_2, s)\, ds$$

on a :

$$e \int_\Omega fv\, dz = \int_\Omega \sigma_\alpha^{e\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, dz + \frac{1}{e} \int_\Omega \sigma_3^{e\varepsilon}\, \varphi\, dz\,.$$

En faisant tendre e vers 0 (ε fixé) après avoir multiplié l'expression précédente par e on obtient :

$$0 = \int_\Omega \sigma_3^{*\varepsilon}\, \varphi\, dz$$

donc $\sigma_3^{*\varepsilon} = 0$. ■

5. HOMOGÉNÉISATION D'UN CORPS INFINIMENT MINCE

Dans ce paragraphe, on commence par approcher le corps tridimensionnel par un corps bidimensionnel, on fait donc tendre e vers 0 ; puis on homogénéise ce corps bidimensionnel en faisant tendre ε vers 0.

5.1. Détermination de $u^{*\varepsilon}$

En utilisant (4.1), (3.3) et (3.2) on peut écrire

$$\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_3} = \left(\frac{\sigma_3^{e\varepsilon}}{e} - \bar{a}_{3\alpha}^{e\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_\alpha}\right) \frac{1}{\bar{a}_{33}^{e\varepsilon}} = \left(\sigma_3^{e\varepsilon} - a_{3\alpha}^{\varepsilon} \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_\alpha}\right) \frac{e}{a_{33}^{\varepsilon}}\,.$$

On reporte cette expression dans (3.5) où v est pris indépendant de z_3, il vient :

$$\int_\Omega \left[\left(a_{\alpha\beta}^{\varepsilon} - \frac{a_{\alpha 3}^{\varepsilon}\, a_{3\beta}^{\varepsilon}}{a_{33}^{\varepsilon}}\right) \frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} + \frac{a_{\alpha 3}^{\varepsilon}}{a_{33}^{\varepsilon}}\, \sigma_3 \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\right] dz = e \int_\Omega fv\, dz + \\ + \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega\,. \quad (5.1)$$

On pose :

$$b_{\alpha\beta} = a^{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{a_{\alpha 3}\, a_{3\beta}}{a_{33}} \quad \text{et} \quad c_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{1} b_{\alpha\beta}\, dz_3 \tag{5.2}$$

$$b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}(z_1, z_2, z_3) = a^{\varepsilon}_{\alpha\beta} - \frac{a^{\varepsilon}_{\alpha 3}\, a^{\varepsilon}_{3\beta}}{a^{\varepsilon}_{33}} = b_{\alpha\beta}\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) \quad \text{et} \quad c^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{1} b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\, dz_3 \,.$$

Étude des $b_{\alpha\beta}$ et $c_{\alpha\beta}$

Les $a_{ij}(y)$ appartiennent à $L^{\infty}(\mathscr{Y})$ dont les a^{ε}_{ij} appartiennent à $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, a^{ε}_{33} est minoré par m (pour le voir prendre $w = (0, 0, 1)$ dans (2.2)) donc les $b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ α, $\beta = 1, 2$ et les $a^{\varepsilon}_{\alpha 3}/a^{\varepsilon}_{33}$ $\alpha = 1, 2$ appartiennent à $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$.

Soit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on prend dans (2.2) $w = \left(u_1, u_2, -\frac{a_{\alpha 3}}{a_{33}} u_\alpha\right)$ et on a :

$$m(u_1^2 + u_2^2) \leqslant m\left[u_1^2 + u_2^2 + \left(\frac{a_{\alpha 3}}{a_{33}} u_\alpha\right)^2\right] \leqslant w_i\, a_{ij}\, w_j = u_\alpha\, b_{\alpha\beta}\, u_\beta \,.$$

Par intégration en y_3 on obtient :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \quad m(u_1^2 + u_2^2) \leqslant u_\alpha\, c_{\alpha\beta}\, u_\beta$$

et donc aussi

$$m(u_1^2 + u_2^2) \leqslant u_\alpha\, c^{\varepsilon}_{\alpha\beta}\, u_\beta \,. \quad \blacksquare$$

On vient de voir que les $b^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ et les $a^{\varepsilon}_{\alpha 3}/a^{\varepsilon}_{33}$ appartiennent à $L^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, on sait que $\partial u^{e\varepsilon}/\partial z_\beta$ et $\sigma_3^{e\varepsilon}$ converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers $\partial u^*/\partial z_\beta$ et 0 respectivement on peut donc passer à la limite $e \to 0$ dans (5.1), on a :

$$\int_\Omega b^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, dz = \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \,.$$

Comme $u^{*\varepsilon}$ et v sont indépendants de z_3 on a :

$$\int_\omega c^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega) \,.$$

L'étude des $c^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ montre que le premier membre de l'égalité précédente est une forme bilinéaire coercive dans $H_0^1(\omega)$ et par application du théorème de Lax Milgram on obtient le théorème 5.1.

THÉORÈME 5.1 : *Quand e tend vers 0, $u^{e\varepsilon}$ tend dans $V_0(\Omega)$ faible vers $u^{*\varepsilon}$ qui est indépendante de z_3 et qui, identifiée à une fonction de $H_0^1(\omega)$ est l'unique solution du problème suivant :*

Trouver $u \in H_0^1(\omega)$ *tel que* :

$$\int_\omega c^\varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*\varepsilon}}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-) v \, d\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega) .$$

5.2. Homogénéisation

Les coefficients $c^\varepsilon_{\alpha\beta}$ sont périodiques de période εY. On homogénéise en faisant tendre ε vers 0, on utilise les méthodes exposées dans [1].

On définit des fonctions χ_γ ($\gamma = 1, 2$) solutions uniques des problèmes suivants :

Trouver χ_γ ($\gamma = 1, 2) \in W(Y) = \{ v \in H^1(Y) \mid v|_{y_\alpha = 0} = v|_{y_\alpha = Y_\alpha}\ \alpha = 1, 2$ et $\int_Y v \, dy = 0 \}$ telles que :

$$\int_Y c_{\beta\alpha} \frac{\partial \chi_\gamma}{\partial y_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\alpha} dy + \int_Y \frac{\partial}{\partial y_\alpha} (c_{\gamma\alpha}) \varphi \, dy = 0 \quad \forall \varphi \in W(Y) .$$

On définit ensuite des coefficients $d_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) par :

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_Y \left(c_{\alpha\beta} - c_{\gamma\beta} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial y_\gamma} \right) dy . \tag{5.3}$$

La matrice $(d_{\alpha\beta})$ est définie positive.

On a alors le théorème 5.2.

THÉORÈME 5.2 : *Quand* ε *tend vers* 0, $u^{*\varepsilon}$ *tend dans* $H_0^1(\omega)$ *faible vers* u^{*1} *solution unique du problème.*

Trouver $u \in H_0^1(\omega)$ *tel que* :

$$\int_\omega d_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-) v \, d\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega) .$$

6. APPROXIMATION BIDIMENSIONNELLE D'UN DOMAINE HOMOGÉNÉISÉ

Il s'agit d'homogénéiser un domaine tridimensionnel de structure périodique en z_1, z_2, les coefficients a_{ij} dépendant de z_3, pour mener à bien ce processus, on utilise la méthode exposée pages 71 et suivantes de [1] ; pour que celle-ci soit applicable, il faut que les coefficients a_{ij} aient une régularité supplémentaire, on suppose donc :

$$a_{ij} \in C^0([-1, 1] ; L_p^\infty(\mathbb{R}^2)) \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{6.1}$$

ou a_{ij} constants par morceaux en z_3 c'est-à-dire

$$\exists a_k \quad k=1, \dots N \quad \text{tels que} \quad a_1=-1 \quad a_N=1 \quad a_k < a_{k+1} \quad \forall k=1, \dots, N \tag{6.2}$$

et a_{ij} indépendants de z_3 dans $]a_k, a_{k+1}[$.

On définit des fonctions φ_k ($k = 1, 2, 3$) de z_3 et de y_1, y_2 qui sont les solutions des trois problèmes.

Trouver $\varphi_k \in W(Y)$ $k = 1, 2, 3$ telles que

$$\int_Y a_{\beta\alpha} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy_1\, dy_2 + \int_Y \frac{\partial a_{k\alpha}}{\partial y_\alpha} \psi\, dy_1\, dy_2 = 0 . \tag{6.3}$$

On définit des coefficients p_{ij} dépendant de z_3 par :

$$p_{ij} = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_Y \left(a_{ij} - a_{\alpha j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_\alpha} \right) dy_1\, dy_2 . \tag{6.4}$$

Les p_{ij} vérifient :

$$\exists m' \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tel que} \quad \forall w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$$
$$m'\, w_i\, w_i \leqslant p_{ij}\, w_i\, w_j \quad \text{p.p. en } z_3 .$$

Remarque 6.1 : En fait, il faut définir les coefficients $\overline{p}^e_{ij}$ homogénéisés des $\overline{a}^e_{ij}$, mais il est facile de voir que ces coefficients $\overline{p}^e_{ij}$ se déduisent des p_{ij} par :

$$\overline{p}^e_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dfrac{p_{13}}{c} \\ p_{21} & p_{22} & \dfrac{p_{23}}{c} \\ \dfrac{p_{31}}{e} & \dfrac{p_{32}}{e} & \dfrac{p_{33}}{e^2} \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Il existe entre p_{ij} et $\overline{p}^e_{ij}$ la même relation qu'entre les a^ε_{ij} et les $\overline{a}^{e\varepsilon}_{ij}$. ∎

Remarque 6.2 : Avec l'hypothèse que les a_{ij} appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[)$ plus générale que les hypothèses (6.1) ou (6.2) on voit, en prenant dans (6.3) que :

$$\sum_{\beta=1,2} \int_Y \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\beta} \right)^2 dy_1\, dy_2 \leqslant C \qquad k = 1, 2, 3$$

d'où on déduit que

$$\sum_{\beta=1,2} \int_{\mathscr{Y}} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\beta}\right)^2 dy \leqslant C \qquad k = 1, 2, 3$$

et que $p_{ij} \in L^\infty(]-1, 1[)$.

THÉORÈME 6.1 : *Quand ε tend vers 0, $u^{e\varepsilon}$ tend dans $V_0(\Omega)$ faible vers u^{*e} qui est l'unique solution du problème :*

Trouver u^{*e} $V_0(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \overline{p}_{ij}^e \frac{\partial u^{*e}}{\partial z_j} \frac{\partial v}{\partial z_i} dz = e \int_\Omega fv\, dz + \int_{\Gamma^+} g^+ v d\Gamma + \int_{\Gamma^-} g^- v\, d\Gamma \quad \forall v \in V_0(\Omega).$$

6.2. Problème limite bidimensionnel

Au point de vue de la dépendance en e, on se trouve dans la situation du § 5.1, les $\overline{p}_{ij}^e$ remplaçant les $\overline{a}_{ij}^{e\varepsilon}$. On a donc le théorème 6.2.

THÉORÈME 6.2 : *Quand e tend vers 0, u^{*e} tend dans $V_0(\Omega)$ faible vers u^{*2} qui est indépendante de z_3 et qui, identifiée à une fonction de $H_0^1(\omega)$, est l'unique solution du problème :*

Trouver $u^{*2} \in H_0^1(\omega)$ tel que :

$$\int_\omega q_{\alpha\beta} \frac{\partial u^{*2}}{\partial z_\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} = \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega)$$

où

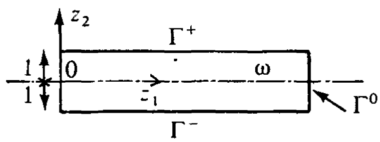
$$q_{\alpha\beta} = \int_{-1}^{1} \left(p_{\alpha\beta} - \frac{p_{\alpha 3}\, p_{3\beta}}{p_{33}}\right) dz_3 . \tag{6.6}$$

Si on compare les théorèmes 6.2 et 5.2, on voit que u^{*1} et u^{*2} sont solutions de deux problèmes semblables mais avec des coefficients $d_{\alpha\beta}$ d'une part et $q_{\alpha\beta}$ d'autre part qui n'ont pas la même expression.

7. PROBLÈME A DEUX DIMENSIONS

On montre dans ce paragraphe que les coefficients $d_{\alpha\beta}$ et $q_{\alpha\beta}$ sont effectivement différents.

On étudie pour cela un problème à deux dimensions où on suppose que les coefficients ne dépendent pas de la variable z_2.



On se donne donc une matrice carrée 2×2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ne dépendant que de y_1, périodique de période $]0, Y_1[$ et vérifiant des conditions analogues à (2.1), (2.2).

7.1. Détermination des coefficients d_1

On a en transposant les résultats du § 5 :

$$d_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{Y_1}\displaystyle\int_0^{Y_1} \frac{dy_1}{2\left(a_{11} - \dfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{22}}\right)}}.$$

7.2. Détermination de q_1

Les équations définissant les fonctions φ_k sont faciles à intégrer, on a :

$$\varphi_\alpha = \int_0^{y_1} \frac{c_\alpha + a_{\alpha 1}}{a_{11}}\,ds \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{où} \quad c_\alpha = -\left(\int_0^{Y_1} \frac{1}{a_{11}}\,dy\right)^{-1} \int_0^{Y_1} \frac{a_{\alpha 1}}{a_{11}}\,dy_1 .$$

Ce qui donne pour les coefficients $p_{\alpha\beta}$:

$$p_{11} = \frac{1}{\dfrac{1}{Y_1}\displaystyle\int_0^{Y_1} \frac{1}{a_{11}}\,dy_1}$$

$$p_{12} = \left(\int_0^{Y_1} \frac{a_{12}}{a_{11}}\,dy_1\right)\left(\int_0^{Y_1} \frac{1}{a_{11}}\,dy_1\right)^{-1}$$

$$p_{21} = \left(\int_0^{Y_1} \frac{a_{21}}{a_{11}}\,dy_1\right)\left(\int_0^{Y_1} \frac{1}{a_{11}}\,dy_1\right)^{-1}$$

$$p_{22} = \frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1}\left(a_{22} - \frac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}}\right)dy_1 + \\ + \frac{1}{Y_1}\left(\int_0^{Y_1} \frac{a_{12}}{a_{11}}\,dy_1\right)\left(\int_0^{Y_1} \frac{a_{21}}{a_{11}}\,dy_1\right)\left(\int_0^{Y_1} \frac{1}{a_{11}}\,dy_1\right)^{-1}.$$

Le coefficient q_1 vaut :

$$q_1 = 2\left(p_{11} - \frac{p_{12}\,p_{21}}{p_{22}}\right).$$

7.3. Exemple

Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et positive, périodique de période $]0, Y_1[$. Soit (λ, μ, ν) un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}$ soit définie positive.

On prend pour matrice (a_{ij}) :

$$(a_{ij}) = h\begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}.$$

D'après les résultats du § 7.1, on a :

$$d_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{Y_1}\displaystyle\int_0^{Y_1} \frac{1}{2\,h\left(\lambda - \dfrac{\nu^2}{\mu}\right)}\,dy_1} = 2\,\frac{\lambda\mu - \nu^2}{\mu}\,H\,.$$

On a posé
$$H = \left(\frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1} \frac{1}{h}\,dy_1\right)^{-1}.$$

On pose
$$\mathscr{H} = \frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1} h\,ds\,.$$

D'après le § 7.2, on a :

$$p_{11} = \frac{1}{\dfrac{1}{Y_1}\displaystyle\int_0^{Y_1} \frac{1}{\lambda h}\,dy_1} = \lambda H \qquad p_{12} = \frac{\nu}{\lambda}\left(\frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1} \frac{1}{\lambda h}\,dy_1\right) = \nu H$$

$$p_{21} = \nu H \qquad p_{22} = \frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1}\left(\mu - \frac{\nu^2}{\lambda}\right) h\,dy_1 + \frac{\nu^2}{\lambda^2}\left(\frac{1}{Y_1}\int_0^{Y_1} \frac{1}{\lambda h}\,dy_1\right)^{-1} =$$
$$= \left(\frac{\lambda\mu - \nu^2}{\lambda}\right)\mathscr{H} + \frac{\nu^2}{\lambda}\,H$$

d'où

$$q_1 = 2\left(\lambda H - \frac{\lambda\nu^2 H^2}{\lambda\mu\mathscr{H} + \nu^2(H - \mathscr{H})}\right) = 2\,\lambda H\left(1 - \frac{\nu^2 H}{\lambda\mu\mathscr{H} + \nu^2(H - \mathscr{H})}\right)$$
$$= 2\,\lambda H\left[\frac{(\lambda\mu - \nu^2)\,\mathscr{H}}{\lambda\mu\mathscr{H} + \nu^2(H - \mathscr{H})}\right].$$

8. LES COEFFICIENTS ε ET e SONT DU MÊME ORDRE

8.1. Détermination de $u^{*\lambda}$

On pose $\varepsilon = \lambda e$ λ réel positif non nul fixé. Mais on gardera la notation ε pour simplifier.

Rappel des résultats des §§ 3 et 4.

$$u^{e\varepsilon} \rightarrow u^{*\lambda} \quad \text{dans } V_0(\Omega) \text{ faible} \qquad \text{lemme (3.1)}$$

$u^{*\lambda}$ est indépendante de z_3 et identifiable à un élément de $H_0^1(\omega)$

$$\sigma_\alpha^{e\varepsilon} \rightarrow \sigma_\alpha^{*\lambda} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible } \alpha = 1, 2 \qquad \text{lemme (4.1)}$$

et

$$t_\alpha^{*\lambda} = \int_{-1}^{1} \sigma_\alpha^{*\lambda}\, dz_3 \quad \text{vérifie} \quad \int_\omega t_\alpha^{*\lambda} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha}\, d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega \qquad \text{lemme (4.2)}. \quad \blacksquare$$

Comme précédemment on introduit des fonctions tests ζ_β^λ $\beta = 1, 2$.
On définit d'abord une matrice a_{ij}^γ par :

$$(a_{ij}^\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}}{\lambda^2} & \dfrac{a_{12}}{\lambda^2} & \dfrac{a_{13}}{\lambda} \\[2ex] \dfrac{a_{21}}{\lambda^2} & \dfrac{a_{22}}{\lambda^2} & \dfrac{a_{23}}{\lambda} \\[2ex] \dfrac{a_{31}}{\lambda} & \dfrac{a_{32}}{\lambda} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

et l'espace

$$\mathcal{W}(\mathcal{Y}) = \left\{ v \in H^1(\mathcal{Y}) \mid v\,|_{y_\alpha = 0} = v\,|_{y_\alpha = Y_\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{Y}} v\, dy = 0 \right\}$$

les fonctions ζ_β^λ sont alors définies comme solutions des problèmes :
Trouver $\zeta_\beta^\lambda \in \mathcal{W}(\mathcal{Y})$ tel que :

$$\int_{\mathcal{Y}} a_{ij}^\lambda \frac{\partial \zeta_\beta^\lambda}{\partial y_i} \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\, dy = \int_{\mathcal{Y}} a_{\beta i}^\lambda \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\, dy \quad \forall \psi \in \mathcal{W}(\mathcal{Y}). \tag{8.2}$$

Ces deux problèmes admettent chacun une solution unique vérifiant :

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ij}^{\lambda}\frac{\partial \zeta_\beta^\lambda}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}(a_{\beta i}^{\lambda}) \quad \text{dans} \quad \mathscr{Y} \tag{8.3}$$

et

$$a_{i3}\frac{\partial \zeta_\beta}{\partial y_i} = a_{\beta 3}^{\lambda} \quad \text{sur} \quad \mathscr{Y}^+ \cup \mathscr{Y}^- . \tag{8.3}$$

Remarque 8.1 : La formulation variationnelle (8.2) est donc vérifiée pour toute fonction ψ de $H^1(\mathscr{Y})$ dont les traces sur les faces latérales opposées de $\mathscr{Y}$ sont égales. ■

Les fonctions ζ_β^λ sont égales sur les faces latérales opposées de $\mathscr{Y}$, on les prolonge donc par périodicité à $\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$, on définit :

$$\left.\begin{aligned} Z_\beta(y) &= y_\beta - \zeta_\beta'(y) && \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \times]-1, 1[\\ Z_\beta^\varepsilon(z) &= \varepsilon Z_\beta\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) && \text{dans} \quad \Omega \end{aligned}\right\}. \tag{8.4}$$

D'après (8.3), Z_β^ε vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\overline{a}_{ji}^{e\varepsilon}\frac{\partial Z_\beta^\varepsilon}{\partial z_j}\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{8.5}$$

$$\overline{a}_{i3}^{e\varepsilon}\frac{\partial Z_\beta^\varepsilon}{\partial z_i} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma^+ \cup \Gamma^- . \tag{8.6}$$

On multiplie (8.5) par $\varphi u^{e\varepsilon}$ où φ est indépendante de z_3 et $\varphi|_\omega \in \mathscr{D}(\omega)$, on intègre par parties en tenant compte de (8.6) et on obtient :

$$\int_\Omega \overline{a}_{ji}^{e\varepsilon}\frac{\partial Z_\beta^\varepsilon}{\partial z_j}\frac{\partial(\varphi u^{e\varepsilon})}{\partial z_i}\,dz = 0 . \tag{8.7}$$

D'autre part, en prenant dans (3.5), $v = \varphi Z_\beta^\varepsilon$ on obtient :

$$\int_\Omega \overline{a}_{ij}^{e\varepsilon}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j}\frac{\partial(\varphi Z_\beta^\varepsilon)}{\partial z_i}\,dz = e\int_\Omega f(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\,dz + \int_{\Gamma^+\cup\Gamma} g(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\,d\Gamma . \tag{8.8}$$

On soustrait membre à membre (8.7) de (8.8) :

$$\int_\Omega \overline{a}_{ij}^{e\varepsilon}\frac{\partial u^{e\varepsilon}}{\partial z_j}\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}Z_\beta^\varepsilon - \int_\Omega \overline{a}_{ji}^{e\varepsilon}\frac{\partial Z_\beta^\varepsilon}{\partial z_j}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}u^{e\varepsilon}\,dz =$$

$$= e\int_\Omega f(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\,dz + \int_{\Gamma^+\cup\Gamma} g(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\,d\Gamma .$$

D'après (4.1), (3.2) et (3.3) et l'indépendance en z_3 de φ on a :

$$\int_\Omega \sigma_\alpha^{e\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} Z_\beta^\varepsilon - \int_\Omega \left(a_{\gamma\alpha} \frac{\partial Z_\beta}{\partial y_\gamma} - \lambda a_{3\alpha} \frac{\partial \zeta_\beta^\lambda}{\partial y_3} \right) \bigg|_{y = z_\varepsilon} u^{e\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} =$$

$$= e \int_\Omega f(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\, dz + \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma} g(\varphi Z_\beta^\varepsilon)\, d\Gamma .$$

On passe à la limite en utilisant les lemmes (3.1), (4.1) (rappelés au début de ce paragraphe) et le lemme suivant dont la démonstration est élémentaire.

LEMME 8.1 : *Soit ψ une fonction de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[)$ périodique en y_1, y_2 de période $\mathcal{Y}$ alors $\psi^\varepsilon(z_1, z_2, z_3) = \psi(z_1/\varepsilon, z_1/\varepsilon, z_3)$ converge dans $L^2(\Omega)$ faible vers*

$$\frac{1}{\text{mes } Y} \int_Y \psi(y_1, y_2, y_3)\, dy_1\, dy_2 .$$

On a alors :

$$\int_\Omega \sigma_\alpha^{*\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\gamma} z_\beta\, dz - \int_\Omega r_{\beta\alpha}^\lambda u^{*\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha}\, dz = \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma} g(\varphi z_\beta)\, d\Gamma$$

où

$$r_{\alpha\beta}^\lambda = \lim_{e \to 0} \left(a_{\gamma\beta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\alpha} - \lambda a_{3\beta} \frac{\partial \zeta_\alpha^\lambda}{\partial y_3} \right) \bigg|_{y = z^\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\text{mes } Y} \int_Y \left(a_{\gamma\beta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\gamma} - \lambda a_{3\beta} \frac{\partial \zeta_\alpha^\gamma}{\partial y_3} \right) dy_1\, dy_2 . \quad (8.9)$$

Comme φ, z_β et $u^{*\lambda}$ sont indépendants de z_3, on a :

$$\int_\omega t_\alpha^{*\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} z_\beta\, d\omega - \int_\omega s_{\beta\alpha}^\lambda u^{*\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha}\, d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-)\, \varphi z_\beta\, d\omega$$

où

$$s_{\alpha\beta}^\lambda = \int_{-1}^1 r_{\alpha\beta}^\lambda\, dz_3 = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{\mathcal{Y}} \left(a_{\gamma\beta} \frac{\partial Z_\alpha}{\partial y_\gamma} - \lambda a_{3\beta} \frac{\partial \zeta_\alpha^\lambda}{\partial y_3} \right) dy . \quad (8.10)$$

D'après le lemme (4.2) (rappelé au début de ce paragraphe), on a :

$$\int_\omega t_\alpha^{*\lambda} \varphi\, d\omega = \int_\omega s_{\alpha\beta}^\lambda \frac{\partial u^{*\lambda}}{\partial z_\beta} \varphi\, d\omega \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega)$$

donc

$$t_\alpha^{*\lambda} = s_{\alpha\beta}^\lambda \frac{\partial u^{*\lambda}}{\partial z_\beta}. \tag{8.11}$$

Coercivité de $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$

En reprenant la démonstration faite dans [1] pages 31-35, dans le cas où $b_{ij} = m\,\delta_{ij}$ on voit que :

$$2\,m w_\alpha\, w_\beta \leqslant s_{\alpha\beta}\, w_\alpha\, w_\beta \qquad \forall (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$$

la constante m étant la même que dans (2.2).

En réunissant le lemme (4.2) et la relation (8.11), on obtient le théorème :

THÉORÈME 8.1 : *Quand e et ε tendent vers 0 tels que $\varepsilon = \lambda e$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$) $u^{e\varepsilon}$ converge dans $V_0(\Omega)$ faible vers $u^{*\lambda}$ qui est indépendante de z_3 et qui, identifiée à une fonction de $H_0^1(\omega)$ est l'unique solution du problème :*

Trouver $u^{*\lambda} \in H_0^1(\omega)$ tel que :

$$\int_\omega s_{\beta\alpha}^\lambda \frac{\partial u^{*\lambda}}{\partial z_\alpha} \frac{\partial v}{\partial z_\beta}\, d\omega = \int_\omega (g^+ + g^-)\, v\, d\omega\,. \tag{8.12}$$

8.2. Limites de $u^{*\lambda}$ quand λ est infiniment grand ou petit

L'étude du § 8.1 correspond au point de vue des grandeurs respectives de e et ε à un cas intermédiaire entre les cas étudiés aux §§ 5 et 6.

La matrice $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$ dépend de λ, et par conséquent $u^{*\lambda}$ dépend aussi de λ.

Dans ce paragraphe, on étudie les limites de $u^{*\lambda}$ quand λ tend vers l'infini ou vers zéro.

D'après la remarque 3.3, on sait que $u^{*\lambda}$ est bornée dans $V_0(\Omega)$ et donc dans $H_0^1(\Omega)$ puisque $u^{*\lambda}$ est indépendante de z_3. On peut donc extraire une sous-suite (notée $u^{*\lambda}$) qui converge faiblement dans $H_0^1(\omega)$ vers $u^{*\infty}$ (resp. u^{*0}) quand $\lambda \to \infty$ (resp. $\lambda \to 0$). Ce résultat peut aussi être déduit de la propriété de coercivité de $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$. La matrice $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$ est indépendante de z_1, z_2, donc si $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$ tend vers $(s_{\alpha\beta}^\infty)$ (resp. $s_{\alpha\beta}^0$) définie positive quand $\lambda \to \infty$ (resp. $\lambda \to 0$) alors la limite faible de $u^{*\lambda}$ est la solution unique du problème 8.12 où $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$ est remplacée par $s_{\alpha\beta}^\infty$ (resp. $s_{\alpha\beta}^0$).

Il faut donc étudier les limites de $s_{\alpha\beta}^\lambda$ quand λ tend vers l'infini ou zéro, pour cela il faut étudier les fonctions ζ_γ^λ.

8.2.1. *Estimations à priori pour* $\zeta_{-\gamma}^\lambda$

ζ_γ^λ vérifie la relation (8.2) qui en fonction de (8.1) s'écrit :

$$\int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy + \lambda \int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha 3} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} + a_{3\alpha} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy +$$

$$+ \lambda^2 \int_{\mathscr{Y}} a_{33} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy + \lambda \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma 3} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} dy . \quad (8.13)$$

Dans (8.13) on prend $\psi = \zeta_\gamma^\lambda$ et on obtient :

$$\left\| \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_1} \right\|_{L^2(\mathscr{Y})} + \left\| \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_2} \right\|_{L^2(\mathscr{Y})} + \left\| \lambda \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3} \right\|_{L^2(\mathscr{Y})} \leqslant C . \quad (8.14)$$

On étudie séparément les deux limites $\lambda \to \infty$ et $\lambda \to 0$.

8.2.2. *Détermination des* $s_{\alpha\beta}^\infty$ $\alpha, \beta = 1, 2$

D'après (8.13), on voit que le problème est analogue à celui du § 5.1.

De (8.14) on déduit que ζ_γ^λ est bornée dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ qui est un espace de Hilbert et donc qu'on peut extraire une sous-suite (notée ζ_γ^λ) qui converge dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ faible vers χ'_γ.

Cette convergence implique que $\partial\zeta_\gamma^\lambda/\partial y_i$ converge dans $L^2(y)$ faible vers $\partial\chi'_\gamma/\partial y_i$ $i = 1, 2, 3$.

On déduit de plus que $\partial\chi'/\partial y_3 = 0$ et que χ'_γ peut être identifiée à une fonction de $W(Y)$.

Par analogie avec la fonction $\sigma_3^{\varepsilon\varepsilon}$ de (4.1) on définit :

$$\tau_\gamma^\lambda = \lambda a_{i3}^\lambda \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_i} . \quad (8.15)$$

On démontre facilement grâce à (8.1), (8.14) et aux propriétés des a_{ij} que τ_γ^λ reste borné dans $L^2(\mathscr{Y})$ quand λ varie et donc que τ_γ^λ converge (au moins une sous-suite) vers τ'_γ dans $L^2(\mathscr{Y})$ faible quand λ tend vers l'infini.

En prenant dans (8.13)

$$\psi = \int_0^{z_3} \varphi(y_1, y_2, s)\, ds \quad \text{où} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{Y})$$

$\left(\text{d'après la remarque 8.1, ceci est possible bien que } \int_y \psi\, dy \text{ ne soit pas nulle}\right)$, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy + \int_{\mathscr{Y}} a_{3\alpha} \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy + \int_{\mathscr{Y}} \tau_\gamma^\lambda \varphi\, dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy + \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma 3} \varphi\, dy .$$

On passe à la limite $\lambda \to \infty$ dans cette relation et on obtient :

$$\int_{\mathscr{Y}} \tau'_\gamma \, \varphi \, dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma 3} \, \varphi \, dy \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tau'_\gamma = a_{\gamma 3} \,.$$

On prend ensuite dans (8.13) ψ indépendante de y_3 et telle que $\psi \,|_Y \in W(Y)$, en utilisant (8.15) on a :

$$\int_{\mathscr{Y}} \left(a_{\alpha\beta} - \frac{a_{\alpha 3}\, a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy + \int_{\mathscr{Y}} \frac{a_{3\beta}}{a_{33}} \tau_\gamma \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy \,.$$

On fait tendre λ vers l'infini et en utilisant la notation (5.2), on a :

$$\int_{\mathscr{Y}} b_{\alpha\beta} \frac{\partial \chi'_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy = \int_{\mathscr{Y}} b_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy \,.$$

Or χ'_γ et ψ sont indépendantes de y_3 donc :

$$\int_Y c_{\alpha\beta} \frac{\partial \chi'_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy_1 \, dy_2 = \int_Y c_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} \, dy_1 \, dy_2 \quad \forall \psi \in W(Y) \,.$$

On sait d'après le § 5.1 que ce problème admet une solution unique dans $W(Y)$ qui est χ_γ, on déduit donc que toute la suite ζ_γ^λ converge vers χ_γ dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ faible.

On étudie ensuite les limites des $s_{\alpha\beta}^\lambda$.

On a :

$$s_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{\mathscr{Y}} \left(a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \frac{\partial \zeta_\alpha^\lambda}{\partial y_\gamma} - \lambda a_{3\beta} \frac{\partial \zeta_\alpha^\lambda}{\partial y_3} \right) dy \,.$$

En utilisant (8.15), ceci devient :

$$s_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{\mathscr{Y}} \left[a_{\alpha\beta} - \frac{a_{3\beta}}{a_{33}} \tau_\alpha^\lambda - \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{3\beta}}{a_{33}} a_{\gamma 3} \right) \frac{\partial \zeta_\alpha^\lambda}{\partial y_\gamma} \right] dy$$

donc

$$\lim_{\lambda \to \infty} s_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{\mathscr{Y}} \left(b_{\alpha\beta} - b_{\gamma\beta} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial y_\gamma} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\text{mes } Y} \int_Y \left(c_{\alpha\beta} - c_{\gamma\beta} \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial y_\gamma} \right) dy_1 \, dy_2 = d_{\alpha\beta} \,.$$

Les limites $s_{\gamma\beta}^\infty$ des $s_{\alpha\beta}^\lambda$ quand λ tend vers l'infini, sont égales aux coefficients $d_{\alpha\beta}$ définissant (5.3), ceci pour $\alpha, \beta = 1, 2$.

8.2.3. *Détermination des* $s^0_{\alpha\beta}$

Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe, on utilise les espaces suivants :

$H^1_p(Y) = \{ V \in H^1(Y) \mid v$ est égale sur les bords opposés de $y \}$ muni de la norme $H^1(Y)$.

$L^2(]-1, 1[\,; H^1(Y))$ muni de la norme

$$\left[\int_{-1}^{1} \| v \|^2_{H^1(Y)}\, dy_3\right]^{1/2} = \left[\int_{\mathscr{Y}} \left(v^2 + \frac{\partial v}{\partial y_\alpha}\frac{\partial v}{\partial y_\alpha}\right) dy\right]^{1/2}$$

qui en fait un espace de Hilbert.

$L^2(]-1, 1[\,; W(Y))$ muni de la norme $\left[\int_{-1}^{1} \| v \|^2_{W(Y)}\, dy_3\right]^{1/2}$ qui est équivalente à la norme dans $L^2(]-1, 1[\,; H^1(Y))$.

$L^2(]-1, 1[\,; H^1_p(Y))$ muni de la norme dans $L^2(]-1, 1[\,; H^1(Y))$.

$V(]-1, 1[) = \left\{ v \in H^1(]-1, 1[) \,\middle|\, \int_{-1}^{1} v\, dy_3 = 0 \right\}$ muni de la norme

$$\left[\int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dy\right]^{1/2}.$$

On a le lemme suivant qu'on établit par les techniques habituelles.

LEMME 8.2 : *Les fonctions* $\mathscr{C}^\infty(\overline{\mathscr{Y}})$ *qui sont égales sur les faces opposées de* $\mathscr{Y}$ *sont denses dans* $L^2(]-1, 1[\,; H^1_p(Y))$.

On se place dans les conditions du § 6, c'est-à-dire qu'on suppose vérifiée l'une des conditions (6.1) ou (6.2).

On fait tendre λ vers 0 et on cherche à déterminer les $s^0_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$).

L'estimation (8.14) reste valable. On en déduit que $\lambda\zeta^\lambda_\gamma$ reste bornée dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ quand λ tend vers 0, on peut donc en extraire une sous-suite (notée $\lambda\zeta^\lambda_\gamma$) qui converge dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ faible vers θ_γ.

De (8.14), on déduit aussi :

$$\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2\,.$$

On peut donc identifier θ_γ à une fonction de z_3 appartenant à $V(]-1, 1[)$.

La fonction ζ^λ_γ appartient à $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$; elle appartient donc à

$$L^2(]-1, 1[, H^1_p(Y))\,.$$

Comme dans $\mathscr{W}(\mathscr{Y})$ la norme $H^1(\mathscr{Y})$ est équivalente à la norme

$$\left[\int_{\mathscr{Y}} \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{\partial v}{\partial y_i} dy\right]^{1/2},$$

on voit que d'après (8.14), ζ_γ^λ est borné dans $L^2(]-1, 1[\,; H_p^1(Y))$, cet espace étant un espace de Hilbert, on peut extraire une sous-suite (notée ζ_γ^λ) qui converge dans $L^2(]-1, 1[\,; H_p^1(Y))$ faible vers Φ_γ.

Remarque 8.2 : L'existence des fonctions θ_γ et Φ_γ ne permet pas de définir une limite pour ζ_γ^λ, mais permet de connaître les limites de $\frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha}$ $\alpha = 1, 2$ et de $\lambda \frac{\partial \zeta_\gamma}{\partial y_3}$ et donc les limites des $(s_{\alpha\beta}^\lambda)$. Il est en effet facile de démontrer que $\frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha}$ tend vers $\frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y_\alpha}$ $(\alpha, \gamma = 1, 2)$ dans $L^2(\mathscr{Y})$ faible et que $\lambda \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3}$ tend vers $\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_3}$ $\gamma = 1, 2$ dans $L^2(\mathscr{Y})$ faible. ■

Dans (8.13), on prend ψ appartenant à $\mathscr{C}^\infty(\overline{\mathscr{Y}})$ égale sur les faces latérales opposées de $\mathscr{Y}$ (ce qui est possible d'après la remarque 8.1), puis on fait tendre λ vers zéro, on a :

$$\int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy + \int_{\mathscr{Y}} a_{3\beta} \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy . \qquad (8.17)$$

Comme $\mathscr{C}^\infty(\overline{\mathscr{Y}})$ est dense dans $L^2(]-1, 1[\,; H^1(Y))$, la relation (8.17) est vraie quelle que soit $\psi \in L^2(]-1, 1[, H^1\, p(Y))$.

Dans (8.13), on prend ensuite $\psi = \varphi$ indépendante de y_1, y_2 c'est-à-dire $\varphi \in V(]-1, 1[)$ et, après avoir divisé par λ on fait tendre λ vers 0 :

$$\int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha 3} \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} dy + \int_{\mathscr{Y}} a_{33} \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{\gamma 3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} dy \quad \forall \varphi \in V]-1, 1[\,. \qquad (8.18)$$

En ajoutant (8.17) et (8.18) membre à membre, on a (8.19) en posant :

$$A[(\Phi_\gamma, \theta_\gamma), (\psi, \varphi)] =$$

$$= \int_{\mathscr{Y}} \left[a_{\alpha\beta} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} + a_{3\beta} \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} + a_{\alpha 3} \frac{\partial \phi_\gamma}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} + a_{33} \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial y_3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right] dy$$

$$A[(\Phi_\gamma, \theta_\gamma) ; (\psi, \varphi)] =$$

$$= \int_{\mathscr{Y}} \left(a_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} + a_{\gamma 3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dy \quad \forall (\psi, \varphi) \in L^2(]-1, 1[\,; H_p^1(Y)) \times V(]-1, 1[)\,. \tag{8.19}$$

A est une forme bilinéaire sur $L^2(]-1, 1[\,; H_p^1(Y)) \times V(]-1, 1[)$ mais elle n'est pas coercive sur cet espace, par contre elle est coercive sur

$$E = L^2(]-1, 1[\,; W(Y)) \times V(]-1, 1[)\,.$$

Et d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une solution unique au problème :

Trouver $(\Phi'_\gamma, \theta'_\gamma) \in E$ tel que :

$$A[(\Phi'_\gamma, \theta'_\gamma)\,; (\psi, \varphi)] = \int_{\mathscr{Y}} \left(a_{\gamma\beta} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} + a_{\gamma 3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_3} \right) dy \quad \forall (\psi, \varphi) \in E\,. \tag{8.20}$$

Remarque 8.3 : Il est facile de voir que les autres solutions de (8.19) sont de la forme : $(\Phi_\gamma + h, \theta'_\gamma)$ où h est une fonction de y_3 seul appartenant à

$$L^2(]-1, 1[)\,.$$

Il n'y a donc pas unicité de la limite faible dans $L^2(]-1, 1[\,; H_p^1(Y))$ de ζ_γ^λ et on ne peut pas dire que toute la suite ζ_γ^λ converge vers Φ_γ quand λ tend vers zéro. Par contre il y a unicité de la limite faible dans $L^2(\mathscr{Y})$ de $\partial \zeta_\gamma^\lambda / \partial y_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ vers $\partial \Phi'_\gamma / \partial y_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ et là on peut affirmer que toute la suite $\partial \zeta_\gamma^\lambda / \partial y_\alpha$ converge quand λ tend vers zéro.

D'après la remarque 6.2, on voit que les φ_k $(k = 1, 2, 3)$ appartiennent à $L^\infty(]-1, 1[\,; W(Y))$. D'après (6.3), on voit qu'elles vérifient :

$$\forall \psi \in L^2(]-1, 1[\,; W(Y)) \quad \int_{\mathscr{Y}} a_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\beta} dy = \int_{\mathscr{Y}} a_{k\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial y_\alpha} dy\,.$$

D'autre part, toujours d'après la remarque 6.2, on voit qu'il existe des fonctions $v_\gamma \in V(]-1, 1[)$ $\gamma = 1, 2$ telles que

$$\frac{\partial v_\gamma}{\partial z_3} = \frac{p_{\gamma 3}}{p_{33}}\,.$$

Il est alors facile de vérifier que

$$(\phi'_\gamma, \theta_\gamma) = \left(\varphi_\gamma - \frac{p_{\gamma 3}}{p_{33}} \varphi_3, v_\gamma \right) \quad \gamma = 1, 2\,.$$

On a le résultat :

$$\frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_\alpha} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial y_\alpha} - \frac{p_{\gamma 3}}{p_{33}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_\alpha} \quad \text{dans } L^2(\mathscr{Y}) \text{ faible } (\alpha, \gamma = 1, 2)$$

$$\lambda \frac{\partial \zeta_\gamma^\lambda}{\partial y_3} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \frac{p_{\gamma 3}}{p_{33}} \quad \text{dans } L^2(\mathscr{Y}) \text{ faible } \gamma = 1, 2 .$$

On en déduit donc que :

$$s_{\alpha\beta}^\lambda \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{\mathscr{Y}} \left[a_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta} \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_\gamma} - \frac{p_{\alpha 3}}{p_{33}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_\gamma} \right) - a_{3\beta} \frac{p_{\alpha 3}}{p_{33}} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{\text{mes } Y} \int_{-1}^{1} \left(p_{\alpha\beta} - \frac{p_{\alpha 3} \, p_{3\beta}}{p_{33}} \right) dy_3 = q_{\alpha\beta} \, .$$

Les limites $s_{\alpha\beta}^0$ des $s_{\alpha\beta}^\lambda$ quand λ tend vers 0 sont égales aux $q_{\alpha\beta}$ définis en (6.5), ceci pour $(\alpha, \beta) = 1, 2$.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 8.2 : *Quand* λ *tend vers l'infini* (*resp. zéro*) $u^{*\lambda}$ *converge dans* $H_0^1(\omega)$ *faible vers* u^{*1} (*resp.* u^{*2}) *limite de* $u^{e\varepsilon}$ *dans le passage à la limite* ($e \to 0$, *puis* $\varepsilon \to 0$) (*resp.* ($\varepsilon \to 0$ *puis* $e \to 0$)).

RÉFÉRENCES

[1] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North Holland, Amsterdam, 1978.

[2] D. CAILLERIE, *The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body*. Mathematical Method in the Applied Sciences, n° 2 (1980), pages 251-270.

[3] D. CAILLERIE, *Equations aux dérivées partielles à coefficients périodiques dans des domaines cylindriques aplatis*. C.R.A.S., Paris, t. 290 (janvier 1980). Série A, pages 143-146.

[4] P. G. CIARLET et P. DESTUYNDER, *A justification of two-dimensional linear plate model*. Journal de Mécanique, vol. 18, n° 2 (1979), pages 315-344.

[5] G. DUVAUT, *Analyse fonctionnelle en mécanique des milieux continus*. Theoretical and Applied Mech., W. T. Koiter, ed. North Holland (1976), pages 119-132.

[6] H. PHAM et E. SANCHEZ-PALENCIA, *Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée*. Journal of Math. Anal. and Appl. (1974), vol. 47, n° 2, pages 284-309.