

F. HECHT

**Construction d'une base de fonctions  $P_1$  non conforme à divergence nulle dans  $\mathbb{R}^3$**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 15, n° 2 (1981), p. 119-150

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1981\\_\\_15\\_2\\_119\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1981__15_2_119_0)

© AFCET, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CONSTRUCTION D'UNE BASE DE FONCTIONS $P_1$ NON CONFORME A DIVERGENCE NULLE DANS $\mathbb{R}^3$ (\*)

par F. HECHT (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — On donne un algorithme pour construire une base de fonctions affines par morceau sur des tétraèdres et continues au milieu des faces, à divergence nulle, dans  $\mathbb{R}^3$ . La méthode utilise des résultats de la théorie des graphes sur les arbres maximaux, mais le résultat final est facile à programmer. On donne une application de la construction en résolvant le problème de Stokes avec élimination de la variable de pression.

Abstract — We give an algorithm for constructing a basis of piecewise linear functions on tetrahedra, continuous at the mid-points of the faces, with zero divergence, in  $\mathbb{R}^3$ . The method uses results from graph theory about maximal trees, but the final result is easy to implement. We give an application of this construction to the solution of the Stokes problem when the pressure variable is eliminated.

### 0. INTRODUCTION

Les équations de mécanique des fluides incompressibles font apparaître la contrainte : divergence nulle sur la vitesse.

Pour discrétiser ces équations par la méthode des éléments finis, on a au moins les 3 possibilités suivantes :

1. Discrétiser directement toutes les équations sous forme faible, y compris l'équation  $\operatorname{div} u = 0$  (cf. par exemple [1, 2, 3]).
2. Considérer l'équation  $\operatorname{div} u = 0$  comme une contrainte et l'introduire sous forme de pénalisation dans le problème de minimisation de l'énergie (cf. par exemple [4, 5]).
3. Écrire les équations variationnelles sur le sous-espace de  $(H^1(\Omega))^n$  suivant :

$$J(\Omega) = \{ u \in (H^1(\Omega))^n \mid \operatorname{div} u = 0 \} .$$

(\*) Reçu en avril 1980

(1) INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, 78150 Le Chesnay

Dans le 3<sup>e</sup> cas il faut donc construire un espace d'approximation  $J_h$  de  $J(\Omega)$ . On trouvera dans Teman [6] une approximation  $J_h$  non conforme de  $J(\Omega)$  ainsi que des résultats de convergence usuelle entre  $J_h$  et  $J(\Omega)$ .

On rappelle la définition de  $J_h$  :

Si  $\mathcal{T}_h$  est une triangulation régulière de  $\Omega$  et si les  $x^k$  sont les milieux des côtés (resp. faces) des triangles (resp. tétraèdres) de  $\mathcal{T}_h$  alors

$$J_h = \{ v_h \in (L^2(\Omega_h))^n / v_h|_T \text{ affine, } \operatorname{div} v_h|_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h ;$$

$v_h$  continue en tout  $x^k$  } .

Crouzeix [7] et Thomasset [8] donnent une construction d'une base de  $J_h$  en dimension 2 seulement. La construction d'une base en dimension 3 était un problème ouvert que l'on se propose de résoudre.

Dans le cas bidimensionnel on construit une base à partir des deux familles<sup>-</sup> de fonctions suivantes :

1. A toute arête  $(s^i, s^j)$  on associe une fonction de  $J_h$  valant  $\overrightarrow{s^i s^j} / \|\overrightarrow{s^i s^j}\|$  au milieu de  $(s^i, s^j)$  et valant zéro au milieu de toutes les autres arêtes.

2. A tout sommet  $s^k$  on associe une fonction  $g^k$  de  $J_h$  valant zéro au milieu de toute arête ne contenant pas le sommet  $s^k$  et valant  $\vec{k} \wedge \overrightarrow{s^k s^i} / \|\overrightarrow{s^k s^i}\|^2$  au milieu des arêtes  $(s^k, s^i)$  avec  $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\overrightarrow{3_{s^k s^i}} = (\overrightarrow{s^k s^i}, 0) \quad (\text{cf. fig. 1}) .$$

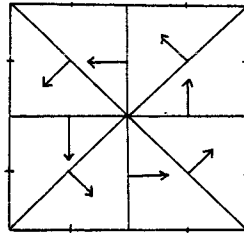


Figure 1. — Représentation de  $g^k$ .

Ces fonctions sont bien dans  $J_h$  puisque la condition  $\operatorname{div} v_h = 0$  est équivalente à la nullité des flux sortant par tout triangle lorsque  $v_h$  est  $\mathbb{P}_1$ .

Dans le cas tridimensionnel par analogie au cas bidimensionnel pour construire une base de  $J^h$  il semble raisonnable d'introduire les 2 familles de fonctions suivantes :

1. A toutes faces on associe 2 fonctions de  $J_h$  valant au milieu de cette face, respectivement 2 vecteurs parallèles à cette face et linéairement indépendants et valant zéro au milieu des autres faces.

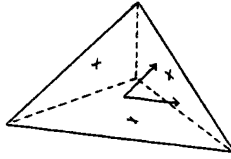


Figure 2. — Représentation des 2 fonctions associées à une face de ce tétraèdre.

2. A toute arête  $A$  on associe une fonction  $g^k$  valant zéro au milieu de toute face  $F$  ne contenant pas cette arête  $A$ , et valant  $\vec{v}/\text{aire}(F)$  au milieu de toute face  $F$  contenant l'arête orientée  $A$  (la normale  $\vec{v}$  à  $F$  tournant dans le sens direct par rapport à l'arête orientée  $A$ ).

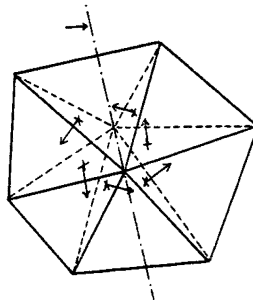


Figure 3. — Représentation de la fonction  $g^i$  sur les tétraèdres contenant l'arête  $A_i$ .

Les fonctions sont bien à divergence nulle puisque les flux sortant par tout tétraèdre, sont nuls.

Mais malheureusement l'union de ces 2 familles ne forme pas une base car ces fonctions ne sont pas indépendantes. En effet si par exemple  $\mathcal{J}_h$  est composé d'un seul tétraèdre  $T$  alors,  $\dim J_h(T) = 11$  mais il y a 14 fonctions dans l'union des familles.

Intuitivement on s'aperçoit qu'il faut retirer des fonctions dans la famille 2 conformément à l'algorithme suivant :

Soit  $\mathcal{A}_h$  l'ensemble des  $k_a$  arêtes de  $\mathcal{J}_h$ , soit  $H$  l'ensemble des arêtes associées aux fonctions retirées :

1. Initialisation

$$\text{faire } H = \emptyset \text{ et } k = 1 .$$

2. Si  $H \cup \{ A_k \}$  ne contient pas de chemins fermés, inclure  $A_k$  dans  $H$ .

3. Faire  $k = k + 1$  et retourner en 2 si  $k < k_a$ .

En fait on a retiré le plus d'arêtes possible tel qu'il ne soit pas possible de construire de chemin fermé à partir des arêtes retirées.

Cette construction étrange à première vue correspond à la remarque suivante :

**PROPRIÉTÉ F** : Soit un chemin fermé  $\gamma$  formé d'arêtes. Soit  $g^k$  la fonction de base associée à l'arête  $A_k$ . Alors le flux de  $g^k$  au travers de toute surface s'appuyant sur le chemin est nul si l'arête  $A_k$  n'est pas dans le chemin  $\gamma$ , et est égal  $\pm 1$  si l'arête est contenue dans le chemin  $\gamma$  (la surface est formée de faces). ■

Donc le flux de  $v_h$  à travers une surface  $\Sigma$  s'appuyant sur  $\gamma$  ne dépend que des composantes de  $v_h$  sur les fonctions  $g^k$ , telles que  $A^k \in \gamma$  et ceci implique que si la base ne contient aucune fonction de la famille 2 associée au  $A^k$  de  $\gamma$  alors le flux de toutes fonctions  $v_h \in J$  est nul sur  $\Sigma$  ce qui est faux. Ceci justifie donc la construction de  $H$  ci-dessus.

La propriété  $F$  difficile à visualiser dans  $\mathbb{R}^3$  est évidente dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet considérons l'exemple de la figure 4 et évaluons le flux d'une fonction  $g^i$  au travers de la courbe  $\Sigma$ .

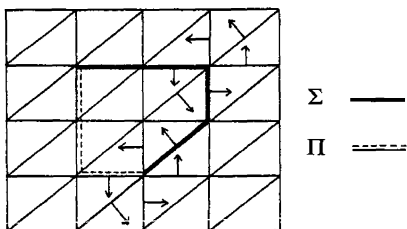


Figure 4.

Si  $s^i \notin \Sigma$ , le flux de  $g^i$  à travers  $\Sigma$  est nul. Si  $s^i \in \Sigma$  et  $s^i$  n'est pas une extrémité de  $\Sigma$  on choisit  $\Pi$  une courbe telle que  $\Sigma \cup \Pi$  soit un chemin fermé. Comme le flux au travers de  $\Sigma \cup \Pi$  est nul ( $\text{div } g^i = 0$ ) on se ramène à évaluer le flux au travers de  $\Pi$  qui est nul car la fonction  $g^i$  est nulle sur  $\Pi$ . Si  $s^i$  est une extrémité de  $\Sigma$  on voit que le flux vaut  $\pm 1$ .

Il s'agit maintenant de montrer que le processus précédent laisse assez de fonctions dans la famille 2 pour engendrer la partie  $J_h^1$  de  $J_h$  correspondante. Soit  $v_h \in J_h^1$  :  $v_h$  est déterminé au milieu de toute face par sa composante normale à cette face, ce qui implique que  $v_h$  est aussi déterminé par ses flux au travers de toute face  $F_k$  de  $\mathcal{J}_h$ . A toute face  $F_k$  on associe le chemin fermé formé de ses 3 arêtes (cycle).

Par la théorie des graphes, on construit une base de chemins fermés formée d'arêtes de  $\mathcal{J}_h$ , en bijection avec les arêtes de  $\mathcal{A}_h \setminus H$ , ce qui permettra de démontrer que les fonctions associées aux arêtes de  $\mathcal{A}_h \setminus H$  engendrent  $J_h^1$ .

La théorie des graphes plonge l'ensemble des chemins fermés (cycle) formés

des arêtes de  $\mathcal{F}_h$  dans un espace vectoriel en définissant l'addition de cycles conformément à la figure 5. Donc  $v_h$  est déterminé par ses flux à travers les surfaces (formées de faces) s'appuyant respectivement chacune sur un chemin fermé de la base du cycle car le flux est « additif ».

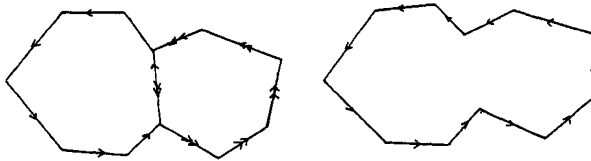


Figure 5. — Exemple d'addition de cycles.

La base de cycle est formée de tous les cycles obtenus en ajoutant à  $H$  une arête (propriété des arbres maximaux d'un graphe connexe).

On achève la démonstration en utilisant la propriété (F) car les cycles de la base ne contiennent qu'une arête n'étant pas dans  $H$ . Tout ceci fait l'objet du paragraphe 1.

Au paragraphe 2 une difficulté de même ordre apparaît lorsque l'on veut restreindre la construction précédente aux arêtes et faces internes de  $\Omega$ , pour obtenir une base de  $J_{0h} = \{ v_h \in J_h : v_h(x^i) = 0, \forall x^i \in \Gamma \}$ .

Pour construire une base de  $J_{0h}$  on peut utiliser l'algorithme précédent à condition de commencer d'abord par les arêtes frontières (ce qui retirera un nombre maximal d'arêtes frontières).

Au paragraphe 3 on a testé la construction précédente sur le problème de Stokes :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \nabla p + f \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u|_{\Gamma} &= u_{\Gamma} \end{aligned} \tag{1}$$

c'est-à-dire que l'on résout

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in J_{0h}; \quad u_h - \tilde{u}_{0h} \in J_{0h}$$

où  $\tilde{u}_{0h}$  est un prolongement dans  $J_h$  de  $u_{\Gamma h}$ .

On donne un algorithme pour calculer les composantes de  $\tilde{u}_{0h}$  à partir de  $u_{\Gamma h}$  les tests numériques ont été faits sur le problème de la cavité tridimensionnelle ( $\Omega = ]0, 1[^3$ ), il redonne les résultats classiques.

Cette construction permet donc d'étendre les méthodes bidimensionnelles [7], [8] au cas tridimensionnel.

1. CONSTRUCTION D'UNE BASE A DIVERGENCE NULLE DANS  $\mathbb{R}^3$ 

## 1.1. Préliminaire

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{R}^3$ , on construit comme d'habitude  $\mathcal{J}_h$  une triangulation de  $\Omega$  formée de tétraèdres telle que l'intersection de deux tétraèdres soit une face, une arête, un sommet, ou l'ensemble vide et telle que la distance de  $\Omega$  à  $\Omega_h$  soit de l'ordre de  $h^2$  où  $h$  est la longueur de la plus grande arête de  $\mathcal{J}_h$  et où

$$\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{J}_h} T. \quad (1.1)$$

On supposera que  $\Omega_h$  est localement d'un seul côté de sa frontière  $\Gamma_h$  et est simplement connexe.

Soit  $\Gamma_{0h}, \dots, \Gamma_{lh}$  les composantes connexes de la frontière  $\Gamma_h$ . On se propose de trouver un espace de dimension finie et une base de cet espace, qui approxime :

$$J(\Omega) = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3 / \operatorname{div} v = 0, \int_{\Gamma_i} v \cdot \nu \, ds = 0 \quad \forall i = 0, \dots, l \right\} \quad (1.2)$$

où les  $\Gamma_i$  sont les composantes connexes de la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ , et où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Gamma$ .

On définit l'espace  $J_h$  des fonctions de  $\Omega_h$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , affines et à divergence nulle à l'intérieur des éléments  $T$  de  $\mathcal{J}_h$ , continues aux milieux des faces de  $\mathcal{J}_h$  et telles que le flux sortant par chaque composante connexe de la frontière soit nul. C'est-à-dire que si  $K_F$  désigne l'ensemble des numéros des faces de  $\mathcal{J}_h$

$$J_h = \left\{ v_h \in (L^2(\Omega_h))^3 \mid \forall T \in \mathcal{J}_h : v_h|_{\hat{T}} \in (P_1(T))^3, \operatorname{div} v_h|_{\hat{T}} = 0; \right. \\ \left. \forall j \in K_F : T, T' \in \mathcal{J}_h \text{ tel que } T \cap T' = F_j \text{ alors } v_h(x^j)|_T = v_h(x^j)|_{T'}; \right. \\ \left. \forall i = 0, \dots, l : \int_{\Gamma_{ih}} v_h \cdot \nu \, ds = 0 \right\} \quad (1.3)$$

où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega_h$

où  $x^i$  est le milieu de la face  $F_i$

où  $P^1(t)$  désigne l'ensemble des polynômes de degré 1 sur  $T$ .

On a posé :

$$v_h(x^k)|_T = \lim_{\substack{x \rightarrow x^k \\ x \in \hat{T}}} v_h(x) \quad (1.4)$$

si  $F_k$  est une face de  $T$ .

Puis on définit 2 sous-espaces vectoriels de  $J_h$

$$J_h^1 = \{ v_h \in J_h / \forall k \in K_F : v_h(x^k) \perp F_k \} \tag{1.5}$$

c'est-à-dire que  $v_h(x^k) \cdot f = 0 \ \forall f$  tel que  $x_k + f \in F_k$

$$J_h^2 = \{ v_h \in J_h / \forall k \in K_F : v_h(x^k) \parallel F_k \} \tag{1.6}$$

c'est-à-dire que  $v_h(x^k) \cdot v^k = 0$  où  $v^k$  est une normale à  $F_k$ .

PROPOSITION 1 :

$$J_h = J_h^1 \oplus J_h^2 .$$

Cette proposition nous permet de découper le problème en 2 parties indépendantes.

Pour construire des fonctions affines par morceaux à divergences nulles, on rappelle le lemme préliminaire suivant :

LEMME 1 : Si  $v_h|_T \in (P_1(T))^3$  pour tout  $T$  de  $\mathcal{T}_h$ , il y a équivalence entre les 2 conditions suivantes :

i)  $\operatorname{div} v_h|_T = 0$ .

ii)  $\int_{\partial T} v_h \cdot v \, ds = 0$  où  $v$  est la normale extérieure au tétraèdre  $T$ .

Démonstration : i)  $\rightarrow$  ii) c'est une simple intégration par partie; ii)  $\rightarrow$  i) comme  $v_h$  est affine,  $\operatorname{div} v_h$  est constant et la relation ii) implique que la valeur de cette constante est nulle. ■

### 1.2. Construction d'une base de $J_h^2$

Pour cela on définit des fonctions de  $J_h^2$  en 2 étapes :

1<sup>re</sup> étape : On se donne 2 vecteurs  $u^{1k}, u^{2k}$  par face  $F_k$  tels que  $u^{1k}$  et  $u^{2k}$  soient linéairement indépendants et parallèles à  $F_k$ .

2<sup>e</sup> étape : On construit des fonctions  $g^{ik}$  qui valent  $u^{ik}$  en  $x^k$  et zéro aux milieux des autres faces, c'est-à-dire

$$g^{ik}(x^j) = \delta_{jk} u^{ik} \quad i = 1, 2 \tag{1.7}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Remarque 1 : Puisque  $g^{ik}|_T \in (P_1(T))^3$  la relation (1.7) définit  $g^{ik}$  de façon unique dans  $\Omega_h$  ( $P_1$  unisolvance : cf. Ciarlet [9]).

PROPOSITION 2 : Les fonctions  $g^{ik}$  appartiennent à  $J_h^2$ .



*Démonstration* : La seule propriété qui n'est pas évidente est la condition divergence nulle sur chaque tétraèdre. D'après le lemme 1 il suffit d'étudier le flux sortant des tétraèdres. On a :

$$\int_{\partial T} g^{ik} \cdot \nu \, ds = \sum_{j=1}^4 \int_{F^j} g^{ik} \cdot \nu^j \, ds \quad (1.8)$$

où  $F^j$  sont les 4 faces du tétraèdre  $T$  et  $\nu^j$  sont les normales aux faces  $F^j$  et extérieures à  $T$ .

Si  $x^j$  est le barycentre de  $F^j$ , on a :

$$\int_{F^j} g^{ik} \cdot \nu^j \, ds = \nu^j \cdot g^{ik}(x^j) \times \text{mes}(F^j) \quad (1.9)$$

et comme  $g^{ik}(x^j)$  est parallèle à  $F^j$  ou nul, on a :

$$\nu^j \cdot g^{ik}(x^j) = 0$$

donc

$$\int_{\partial T} g^{ik} \cdot \nu \, ds = 0. \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 3 :

$$\{ g^{ik}/i \in \{ 1, 2 \}, k \in K_F \}$$

est une base de  $J_k^2$ .

*Démonstration* : Comme pour tout  $v_h \in J_h$  et tout  $k \in K_F$   $g(x^k)$  est parallèle à  $F_k$ , alors il existe  $(\lambda_1^k, \lambda_2^k) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$v_h(x^k) = \lambda_1^k u^{1k} + \lambda_2^k u^{2k} \quad (1.10)$$

donc on a

$$v_h = \sum_{k \in K_F} \lambda_1^k g^{1k} + \lambda_2^k g^{2k} \quad (1.11)$$

c'est-à-dire que les  $\{ g^{ik} \}$  engendrent  $J_k^2$ ; il ne reste plus qu'à montrer que les  $\{ g^{ik} \}$  forment une partie libre, ce qui est évident car  $u^{1,k}, u^{2,k}$  sont linéairement indépendants et que  $g^{ik}(x^j) = \delta_{kj} u^{ik}$ .  $\blacksquare$

### 1.3. Construction d'une famille de fonctions de $J_h^1$

On désigne par  $K_A$  l'ensemble des numéros des arêtes de la triangulation. Pour construire une base de  $J_h^1$  on va premièrement construire une famille de fonctions de  $J_h^1$  en 2 étapes :

*Étape 1* : On oriente les arêtes de  $\mathcal{J}_h$  ce qui revient à identifier une arête  $A_k$  avec l'un des couples  $(y^{1k}, y^{2k}), (y^{2k}, y^{1k})$  où  $y^{1k}$  et  $y^{2k}$  sont les extrémités de l'arête  $A_k$  (sommets de  $\mathcal{J}_h$ ).

*Étape 2* : On définit une fonction de  $J_h$  par des valeurs aux milieux  $x^k$  des faces  $F_k$  (cf. remarque 1).

Si  $A_j \subset F_k$  les sommets de  $F_k$  sont  $(y^{1k}, y^{2k}, y^{3k})$  avec

$$A_j = (y^{1j}, y^{2j}) = (y^{1k}, y^{2k}),$$

on définit  $g^j(x^k)$  par :

$$g^j(x^k) = \frac{2(y^{1j} - y^{2j}) \wedge (y^{1j} - y^{3k})}{\| (y^{1j} - y^{2j}) \wedge (y^{1j} - y^{3k}) \|^2} \tag{1.12}$$

et si  $A_j$  n'est pas contenue dans la face  $F_k$  on définit  $g^j(x^k)$  par :

$$g^j(x^k) = 0 \tag{1.13}$$

(cf. fig. 3).

*Remarque 2* :  $g^j(x^k) \perp F_k$  (c'est une propriété du produit vectoriel).

*Remarque 3* :

$$\left\| \int_{F_k} g^j/T ds \right\| = 1 \quad \text{si } A_j \subset F_k \subset T \in \mathcal{J}_h.$$

En effet

$$\| y^{1j} - y^{2j} \wedge (y^{1j} - y^{3k}) \| = 2 \text{ mes } (F_k)$$

et

$$\int_{F^k} g^j |_T = \text{mes } (F_k) g^j(x_k).$$

PROPOSITION 4 :

$$\forall j \in K_A \quad g^j \in J_h^1.$$

*Démonstration* : Les deux propriétés qui ne sont pas évidentes sont : 1° la condition divergence nulle, et 2° la condition de nullité du flux sortant par chaque composante connexe de la frontière. D'après le lemme 1 la condition divergence nulle est équivalente à la condition de nullité du flux sortant de tout tétraèdre  $T$ . Si l'arête  $A_j$  n'est pas dans le tétraèdre  $T$ , ou sur une composante connexe  $\Gamma_{ph}$  de la frontière  $\Gamma_h$  les 2 conditions sont vérifiées par construction : sinon il existe deux faces  $F^{k_1}, F^{k_2}$  contenant l'arête  $A_j$  et contenues dans le tétraèdre  $T$  ou dans  $\Gamma_{ph}$  et les remarques 2 et 3 nous donnent que

$$\left| \int g^j(x^k) \cdot \nu^k ds \right| = 1 \quad k = k_1, k_2$$

donc il ne reste plus qu'à comparer les signes de  $g^j(x^k) \cdot v^k$ ,  $k = k_1, k_2$ . Ils sont opposés car les 2 normales extérieures ont des sens de rotation (autour de l'arête  $A_j$ ) opposés et  $g^j(x^{k_1})$ ,  $g^j(x^{k_2})$  ont le même sens de rotation par construction. ■

*Remarque 4* : Malheureusement  $\{g^j/j \in K_A\}$  n'est pas une base de  $J_h^1$ . En effet, si  $\mathcal{J}_h$  est composé d'un seul tétraèdre  $T = \Omega_h$  alors

$$\dim J_h(T) = 11 \quad (11 = 4 \times 3 - 1) \quad \text{donc} \quad \dim J_h^1 = 11 - 2 \times 4 = 3$$

mais il y a 6 fonctions associées aux 6 arêtes du tétraèdre  $T$ . ■

#### 1.4. Construction d'une base de $J_h^1$

Par analogie avec les constructions dans  $\mathbb{R}^2$  il semble raisonnable de penser que la famille précédemment construite engendre  $J_h^1$ , mais d'après la remarque 4 ces fonctions ne sont pas indépendantes.

Nous allons utiliser la théorie des graphes pour montrer qu'il suffit de retirer le plus d'arêtes possible dans la construction précédente, tel qu'il ne soit pas possible de construire un chemin fermé à partir des arêtes retirées.

Soit  $\mathcal{S}_h$  l'ensemble des sommets des tétraèdres de  $\mathcal{J}_h$ .

**DÉFINITION 1** : On définit le graphe  $G = (\mathcal{S}_h, U)$ ,  $U = \{(x, y) \in \mathcal{S}_h^2 / (x, y) \text{ soit une arête orientée de } \mathcal{J}_h\}$  l'orientation est une orientation arbitraire qui a été choisie pendant l'étape 1 de la construction des  $g^i$ .

*Remarque 5* : Comme  $\Omega_h$  est un ouvert connexe,  $G$  est graphe connexe.

*Remarque 6* : A chaque face  $F_k$  où  $A_1, A_2, A_3$  sont les arêtes de la face  $F_k$ , on peut faire correspondre 2 cycles  $(A_1, A_2, A_3)$  ou  $(A_3, A_2, A_1)$ .

On en choisit un, ce qui revient à choisir une des 2 normales à la face  $F_k$  que l'on notera  $n^k$ ; on notera par  $C^k$  le 3-cycle associé à  $F_k$ .

*Remarque 7* : A tout 3-cycle on peut faire correspondre une face qui contient les 3 arêtes du 3-cycle.

**LEMME 2** : A tout ouvert  $\mathcal{O}$  dont la frontière  $\partial\mathcal{O}$  est formée de faces de  $\mathcal{J}_h$ , on peut faire correspondre une relation de dépendance linéaire de 3-cycle

$$\sum_{F_k \subset \partial\mathcal{O}} n^k v(x_k) C^k = 0 \quad (1.15)$$

où  $v$  est la normale extérieure au volume  $\mathcal{O}$ .

*Démonstration* : On rappelle qu'à un cycle  $C^k$  on fait correspondre le vecteur  $(C_i^k)_{i \in K_A} = C^k$  avec

$$C_i^k = 0 \text{ si l'arête } A_i \text{ n'est pas utilisée dans } C^k;$$

$C_i^k = 1$  si l'arête  $A_i$  est orientée dans le sens de parcours du cycle  $C^k$  ;  
 $C_i^k = -1$  si l'arête  $A_i$  est orientée dans le sens contraire au sens de parcours du cycle  $C^k$ .

On confond le cycle et son vecteur associé :

$$\gamma = \sum_{F_k \in \partial \mathcal{O}} \eta^k \cdot v(x_k) C^k \tag{1.16}$$

$$\gamma = (\gamma_i)_{i \in K_A} .$$

Si  $A_i$  n'est pas contenue dans  $\partial \mathcal{O}$ , pour toutes les faces  $F_k$  contenues dans  $\partial \mathcal{O}$  on a  $C_i^k = 0$  donc  $\gamma_i = 0$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $\gamma_i = 0$  si  $A_i$  est contenue dans  $\partial \mathcal{O}$ .

Si  $A_i$  est contenue dans  $\partial \mathcal{O}$ , il existe des faces  $F_{k_1}, \dots, F_{k_p}$  contenues dans  $\partial \mathcal{O}$  et contenant  $A_i$ . On suppose que la numérotation des  $F_j$  est telle que l'on passe de  $F_1$  à  $F_p$  en tournant autour de  $A_i$  et que le volume entre  $F_1$  et  $F_2$  soit dans  $\mathcal{O}$ , comme  $\mathcal{O}$  est ouvert, il y aura donc une alternance de partie de volume  $\mathcal{O}$  et de vide entre les faces ce qui implique que  $p$  est pair (cf. fig. 6).

Remarquons

$$n^{k_{2j-1}} \cdot v(x^{k_{2j-1}}) C_i^{k_{2j-1}} + n^{k_{2j}} \cdot v(x^{k_{2j}}) C_i^{k_{2j}} = 0 \tag{1.17}$$

(cf. fig. 7).

Donc

$$\sum_{j=1}^p n^{k_j} \cdot v(x^{k_j}) C_i^{k_j} = 0 \tag{1.18}$$

comme les  $F_{k_j}$  sont les seules faces de  $\partial \mathcal{O}$  contenant  $A_i$  on a

$$\sum_{F_k \in \partial \mathcal{O}} n^k \cdot v(x^k) C_i^k = 0 \tag{1.19}$$

ce qui achève la démonstration. ■

(Voir figures 6 et 7 page suivante.)

LEMME 3 : Soit  $V$  un espace vectoriel engendré par les cycles du graphe, alors les 3 cycles engendrent l'espace vectoriel  $V$ .

La démonstration étant longue et technique elle n'est pas exposée dans cet article on la trouvera dans [13]. (La condition  $\Omega_h$  simplement connexe est fondamentale pour la démonstration de ce lemme.) ■

DÉFINITION 2 : On dit que toute partie  $\Sigma$  de  $K_F$  a la propriété P si pour toutes arêtes  $A_i$  contenues dans  $S = \bigcup_{k \in K} F_k$  il existe au moins deux faces distinctes contenues dans  $S$  et contenant  $A_i$ . ■

Coupe perpendiculaire à l'arête  $A_i$ .

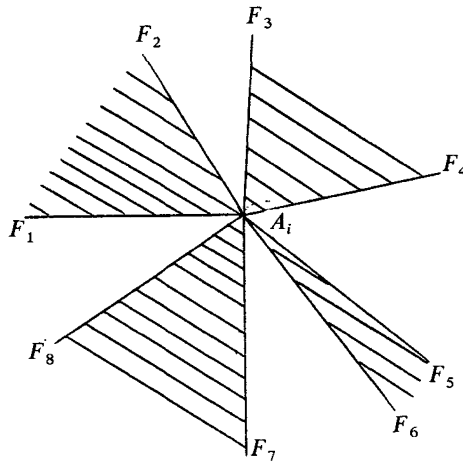


Figure 6. — Les parties hachurées représentent les parties du volume  $\mathcal{O}$ .

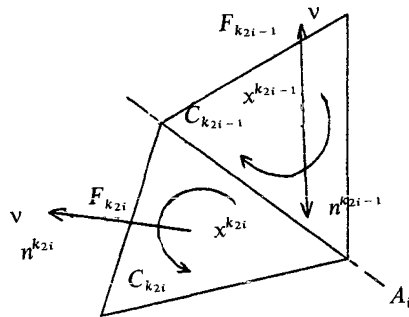


Figure 7. — La flèche indique le sens de parcours du cycle.

LEMME 4 : Soit  $\Sigma$  contenue dans  $K_F$  et ayant la propriété  $P$  alors

$$\mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{k \in K} F_k \right) \text{ n'est pas connexe .}$$

La démonstration étant longue et technique elle n'est pas exposée dans cet article, on la trouvera dans [13].

Mais intuitivement on dit simplement que toute surface fermée coupe l'espace en plusieurs parties. ■

Remarque 7 : A chaque 3-cycle  $C^k$  on peut faire correspondre un flux  $\Psi$

$$\forall v_k \in J_h \quad \Psi(C^k, v_h) = \int_{F_k} v_n \cdot n^k ds \quad (1.20)$$

où  $F_k$  est la face associée au 3-cycle  $C^k$ , on a donc défini une application  $\Psi$  de l'ensemble produit des 3-cycles et des fonctions de  $J_h$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . ■

Maintenant on va définir le flux passant au travers d'un cycle en prolongeant l'application  $\Psi$ .

LEMME 5 : Soit  $V$  l'espace vectoriel engendré par les cycles du graphe, l'application  $\Psi$  définie par (1.20) se prolonge en une forme bilinéaire  $\tilde{\Psi}$  unique de  $V \times J_h$  dans  $\mathbb{R}$ .

Démonstration : D'après le lemme 3 les 3 cycles engendrent l'espace vectoriel  $V$  et comme  $\Psi$  est définie sur cette partie génératrice de  $V$ , le prolongement est unique s'il existe (proposition 1, Appendice A).

Pour que l'application  $\Psi$  admette un prolongement bilinéaire, il faut et il suffit que pour toutes relations de dépendance linéaire de 3-cycles

$$\sum_{i \in I} \lambda_i C^i = 0 \tag{1.21}$$

on ait

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \Psi(C^i, v_h) = 0 \tag{1.22}$$

(proposition 1, Appendice A).

On va donc démontrer (1.21)  $\rightarrow$  (1.22). Toutes relations de dépendance linéaire est combinaison linéaire de relation de dépendance minimale (on dit que la relation (1.21) est minimale si pour tout  $i \in I$  on a :  $\{ C^k/k \in I \setminus \{ i \} \}$  est une partie libre) (cf. proposition 3, Appendice A). Donc il suffit de montrer (1.21)  $\rightarrow$  (1.22) pour les relations de dépendance minimale.

Soit  $I$  tel que la relation (1.21) soit minimale.

Soit  $F_i$  la face associée à  $C^i = (C_j^i)_{j \in K_A}$ , remarquons que  $I$  possède la propriété  $P$  car si il existait une et une seule face  $F_k$  contenant l'arête  $A_j$ , on aurait :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i C_j^i = \lambda_k C_j^k \neq 0$$

car la relation de dépendance est minimale.

D'après le lemme 4,  $\mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{k \in I} F_k \right)$  n'est donc pas connexe.

Comme  $\Omega_h$  est borné, il existe une composante connexe  $\mathcal{O}$  bornée de

$$\mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{k \in I} F_k \right);$$

d'après le lemme 2 (1.15) on a :

$$\sum_{F_k \subset \partial \mathcal{O}} n^k \cdot v(x^k) C^k = 0 \tag{1.23}$$

ce qui est une relation de dépendance linéaire formée à partir des  $(C^i)_{i \in I}$  car

$$\partial\mathcal{O} \subset \bigcup_{i \in I} F_i.$$

Comme la relation de dépendance linéaire (1.21) est minimale, elle est unique à un facteur multiplicatif près, donc les relations (1.21) et (1.23) sont identiques à un facteur multiplicatif près  $\mu$ , on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \Psi(c_i, v_h) = \mu \sum_{F_k \subset \partial\mathcal{O}} n^k \cdot v(x^k) \Psi(c^k, v_h) \quad (1.24)$$

donc

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \Psi(c_i, v_h) = \mu \int_{\partial\mathcal{O}} v_h \cdot v \, ds \quad (1.25)$$

et comme

$$\int_{\partial(\mathcal{O} \cap \Omega_h)} v_h \cdot v \, ds = \int_{\mathcal{O} \cap \Omega_h} \operatorname{div} v_k \, dx$$

et

$$\forall i = 0, \dots, l \quad \int_{\Gamma_{i,h}} v_n \cdot v \, ds = 0.$$

On a :

$$\int_{\partial\mathcal{O}} v_h \cdot v \, ds = 0$$

ce qui nous donne (1.22) ■

LEMME 6 : Soit  $\gamma$  un cycle,  $(\gamma_i)_{i \in K_A}$  son vecteur associé, alors

$$\forall i \in K_A \quad \tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \gamma_i. \quad (1.26)$$

Démonstration : D'après le lemme 3, on a :

$$\gamma = \sum_{j \in K_F} \lambda_j C^j \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \quad (1.27)$$

on notera  $(C_i^j)_{i \in K_A}$  le vecteur associé au 3-cycle  $C^j$  qui est associé à la face  $F_j$ , et la bilinéarité de  $\tilde{\Psi}$  nous donne :

$$\tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \sum_{j \in K_F} \lambda_j \tilde{\Psi}(C^j, g^i) = \sum_{j \in K_F} \lambda_j \Psi(C^j, y^i)$$

et comme

$$\Psi(C^j, g^i) = \int_{F_j} g^i \cdot n^j \, ds \quad \text{d'après (1.20),}$$

on a :

$$\tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \sum_{j \in K_F} \lambda_j \int_{F_j} g^i \cdot n^j ds. \tag{1.28}$$

Par construction

$$\int_{F_j} g^i \cdot n^j ds = C_i^j. \tag{1.29}$$

En effet, le sens de parcours du 3-cycle  $C^j$  et l'orientation de l'arête  $A_i$  sont compatibles avec (1.29).

Donc (1.28) et (1.29) nous donnent :

$$\tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \sum_{j \in K_F} \lambda_j C_i^j \tag{1.30}$$

et d'après (1.29) on a :

$$\tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \sum_{j \in K_F} \lambda_j C_i^j = \gamma_i$$

ce qui termine la démonstration. ■

Passons maintenant à la construction d'une base de  $J_h^1$ .

**THÉORÈME 1 :** *Soit  $K \subset K_A$ , il y a équivalence entre les 2 propriétés suivantes :*

- i)  $G' = (\varphi_n, \{ A_i / i \in K_A \setminus K \})$  est un arbre maximal du graphe  $G$ .
- ii)  $\{ g^i / i \in K \}$  est une base de  $J_h^1$ .

*Démonstration :* i)  $\rightarrow$  ii) si à l'arbre  $G'$  on ajoute une arête  $A_k, k \in K$ , on crée un cycle  $\gamma^k$  et l'ensemble  $\{ \gamma^k / k \in K \}$  de ces cycles constitue une base de cycles (cf. théorème 5, Appendice A) du graphe  $G$ .

Soit  $(\gamma_i^k)_{i \in K_A}$  le vecteur associé à  $\gamma^k$ , par construction on a :

$$|\gamma_i^k| = \delta_{ik} \quad \forall k \in K \quad \forall i \in K, \tag{1.31}$$

la bilinéarité de  $\tilde{\Psi}$  et le lemme 6 nous donnent :

$$\tilde{\Psi}\left(\gamma^i, v_h - \sum_{k \in K} \gamma_k^i \tilde{\Psi}(\gamma^k, v_h) g^k\right) = 0 \quad \forall j \in K \tag{1.32}$$

car  $\tilde{\Psi}(\gamma^j, g^k) = \gamma_i^k$

comme  $\{ \gamma^k / k \in K \}$  est une base, la relation (1.32) se généralise à tout cycle  $\gamma$ , donc la relation (1.32) est vérifiée pour les 3-cycles, ce qui donne la relation suivante :

$$\tilde{\Psi}\left(C_j, v_h - \sum_{k \in K} \gamma_k^j \tilde{\Psi}(\gamma^k, v_h) g^k\right) = 0 \quad \forall j \in K_F \tag{1.33}$$



si  $v_h \in J_h^1$  les relations (1.33) et (1.20) nous donnent que la composante normale à toute face  $F_j$  de la fonction  $v_h - \sum_{k \in K} \gamma_k^k \tilde{\Psi}(\gamma^k, v_h) g^k$  est nulle et comme cette fonction appartient à  $J_h^1$  elle est nulle, donc

$$v_h = \sum_{k \in K} \gamma_k^k \tilde{\Psi}(\gamma^k, v_h) g^k.$$

Cela prouve que  $g^k, k \in K$  est une partie génératrice de  $J_h^1$ . Pour montrer que c'est une base, il reste à montrer que c'est une partie libre.

Soit  $\lambda_k$  tel que  $\sum_{k \in K} \lambda_k g^k = 0$  d'après (1.31) on a :

$$0 = \tilde{\Psi}\left(\gamma^i, \sum_{k \in K} \lambda_k g^k\right) = \gamma_i^i \lambda_i \quad \forall i \in K \quad (1.35)$$

donc

$$\lambda_i = 0 \quad \forall i \in K$$

ce qui achève la première partie de la démonstration.

ii)  $\rightarrow$  i) on fait une démonstration par l'absurde. Si  $G'$  n'est pas un arbre,  $G'$  a un cycle ou  $G'$  n'est pas connexe (car un arbre est un graphe connexe sans cycle).

a) Si  $G'$  a un cycle  $\gamma$  le lemme 6 donne :

$$\tilde{\Psi}(\gamma, g^k) = \gamma_k \quad \forall k \in K$$

d'où

$$\tilde{\Psi}\left(\gamma, \sum_{k \in K} \lambda_k g^k\right) = 0 \quad \forall (\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{R}^{|K|}$$

et donc  $\{g^k/k \in K\}$  n'est pas génératrice car il existe  $i \in K_A$  tel que  $A_i \subset \gamma$  et d'après le lemme 6  $\tilde{\Psi}(\gamma, g^i) = \gamma_i \neq 0$  ce qui est impossible donc  $G'$  n'a pas de cycle.

b) Si  $G'$  est non connexe sans cycle alors il existe un arbre maximal  $H$  de  $G$  qui admet  $G'$  comme graphe partiel (théorème 6, Appendice A).

Soit  $K_H$  l'ensemble des numéros des arêtes de  $H$ , on a par construction :

$$K_A \setminus K \subset K_H \quad (1.36)$$

donc en passant au complémentaire, on a :

$$K \supset K_A \setminus K_H \quad (1.37)$$

et comme d'après la première partie du théorème, on a :

$$\begin{aligned} \{g^k/k \in K_A \setminus K_H\} &\text{ est une base de } J_h^1 \text{ ainsi que} \\ \{g^k/k \in K\} &\text{ par hypothèse} \end{aligned}$$

donc (1.37) entraîne :

$$K = K_A \setminus K_H \tag{1.38}$$

d'où les graphes  $H$  et  $G'$  sont égaux ce qui est impossible car  $H$  est connexe et  $G'$  est non connexe.

$G'$  est donc un graphe connexe sans cycle ce qui achève la démonstration. ■

*Remarque 8* : La propriété ii)  $\rightarrow$  i) du théorème 2 montre que l'arbre est la bonne notion à utiliser pour construire cette base. ■

*Remarque 9* : L'application  $\varphi : J_h^1 \rightarrow V$  tel que  $\forall k \in K \quad \varphi(g^k) = \gamma_k^k \gamma^k$  est un isomorphisme d'espace vectoriel et  $\{g^k/k \in K\}$  est une base orthonormale pour la forme bilinéaire  $\Phi$  symétrique définie positive suivante :

$$\Phi(v_m, u_n) = \tilde{\Psi}(\varphi(v_h), u_n) . \quad \blacksquare$$

## 2. CONSTRUCTION D'UNE BASE DE $J_{0h}$

### 2.1. Préliminaire

Nous ferons les mêmes hypothèses sur  $\Omega$  et la triangulation de  $\Omega$  que dans le paragraphe 1, et nous utiliserons les mêmes notations.

On se propose maintenant de trouver un espace  $J_{0h}$  de dimension finie et une base de cet espace qui approxime  $J_0(\Omega)$ , où

$$J_0(\Omega) = \{ v \in J(\Omega), v|_{\Gamma} = 0 \} . \tag{2.1}$$

On définit  $J_{0h}$  comme le sous-espace formé des fonctions de  $V_h$  nulles aux nœuds frontières. C'est-à-dire que si  $\tilde{K}_F$  désigne l'ensemble des numéros des faces frontières de  $\mathcal{J}_h$

$$J_{0h} = \{ v_h \in J_h / \forall k \in \tilde{K}_F \quad v_h(x^k) = 0 \} \tag{2.2}$$

où  $x^k$  est le milieu de la face  $F_k$ .

Il est montré dans Teman [6] que l'approximation de  $J_0$  par  $J_{0h}$  est stable et convergente, lorsque  $(\mathcal{J}_h)$  est une suite de triangulation régulière.

On pourrait penser à première vue qu'il suffit de retirer les fonctions non nulles au bord de la construction précédente pour obtenir une base de  $J_{0h}$ . On s'aperçoit vite qu'une telle procédure ne conduit pas à un nombre constant de fonctions de base (ce nombre dépend du choix de l'arbre). La solution va consister à construire d'abord un arbre dans la frontière puis à continuer la construction à l'intérieur.

Comme dans le § 1 on définit les 2 sous-espaces vectoriels suivants :

$$J_{0h}^1 = \{ v_h \in J_{0h} / \forall k \in K_F v_h(x_k) \perp F_k \} = J_h^1 \cap J_{0h} \tag{2.3}$$

$$J_{0h}^2 = \{ v_h \in J_{0h} / \forall k \in K_F v_h(x_k) // F_k \} = J_h^2 \cap J_{0h} \tag{2.4}$$

et on a la proposition évidente suivante :

PROPOSITION 1 :

$$J_{0h} = J_{0h}^1 \oplus J_{0h}^2 . \blacksquare$$

Cette proposition nous permet de décomposer le problème en 2 problèmes indépendants : construction d'une base de  $J_{0h}^i, i = 1, 2$ .

— Soit  $\{ g^{ik}, k \in K_F, i = 1, 2 \}$  la famille de fonctions définie en (1.7).

— Soit  $\{ g^k, k \in K_A \}$  la famille de fonctions définie en (1.12) et (1.13).

Les fonctions associées à une face ou une arête interne sont nulles aux nœuds frontières par construction, ce qui donne la proposition suivante :

PROPOSITION 2 :

$$\left. \begin{array}{l} g_k \in J_{0h}^1, \quad \forall k \in \overset{\circ}{K}_A \\ g^{i,k} \in J_{0h}^2, \quad \forall k \in \overset{\circ}{K}_F, \quad \forall i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

où  $\overset{\circ}{K}_A$  désigne l'ensemble des numéros des arêtes internes, et où  $\overset{\circ}{K}_F$  désigne l'ensemble des numéros des faces internes.  $\blacksquare$

La proposition suivante résout le problème associé à  $J_{0h}^2$ .

PROPOSITION 3 : L'ensemble  $\{ g^{ik} / i = 1, 2 \text{ et } k \in \overset{\circ}{K}_F \}$  des fonctions associées aux faces internes de  $\mathcal{J}_h$  forme une base de  $J_{0h}^2$ .

Démonstration : C'est la même démonstration que la démonstration de la proposition 3 du paragraphe 1 en remplaçant  $K_F$  par  $\overset{\circ}{K}_F$ .

### 2.2. Construction d'une base de $J_{0h}^1$

On a vu dans le paragraphe 1 que pour construire une base de  $J_h^1$ , il fallait et il suffisait de retirer à la famille  $\{ g^k / k \in K_A \}$  de fonctions de  $J_h^1$ , les fonctions correspondant aux arêtes d'un arbre.

Comme le nombre d'arêtes frontières (arête contenue dans  $\Gamma_h$ ) de l'arbre dépend de l'arbre, la restriction d'une base de  $J_k^2$  aux fonctions associées à une arête interne n'est pas généralement une base de  $J_{0h}^2$ . Mais cette restriction est une partie libre, et de plus une base est une partie libre maximale, ce qui montre qu'il faut étudier les arbres ayant un nombre minimal d'arêtes

internes. Remarquons que comme le nombre d'arêtes des arbres est constant (il est égal au nombre de sommets de  $\mathcal{J}_h$  moins un), cela revient à étudier les arbres ayant un nombre maximal d'arêtes frontières. Ces arbres sont tels que leurs restrictions à chaque composante connexe de la frontière soit encore un arbre (car on ne peut pas leur ajouter une arête frontière sans créer de cycle frontière). Le théorème suivant nous dit que l'on a bien construit une base de  $J_{0h}^1$  en utilisant un arbre qui a cette propriété.

**THÉORÈME 2 :** *Soit  $K \subset K_A$ . Pour que  $\{g^k/k \in K\}$  soit une base de  $J_{0h}^1$  il faut et il suffit qu'il existe un arbre tel que sa restriction à chaque composante connexe de la frontière  $\Gamma_h$  soit un arbre, et tel que  $K$  soit l'ensemble des numéros des arêtes internes de  $\mathcal{J}_h$  n'appartenant pas à l'arbre.*

*Démonstration :*

1) la nécessité a été démontrée dans la partie précédant l'énoncé du théorème ;

2) la suffisance se démontrera en 2 étapes :

*Étape 1 :* Soit  $H$  l'arbre. Montrons qu'il n'existe pas de suite de faces ayant la propriété (c) ci-dessous. On dit qu'une suite de faces  $(F_i)_{i=1}^p$  à la propriété (c) si elles sont frontières et distinctes et si  $F_i \cap F_{i+1} = A_{j_i}$ ,  $A_{j_i}$  n'est pas une arête de  $H$ ,  $\forall i = 1, \dots, p$  avec la convention  $F_{p+1} = F_1$ .

Remarquons que s'il existe une suite de faces distinctes ayant la propriété (c), la ligne brisée  $\gamma$  formée des segments d'extrémités, les barycentres de 2 faces  $F_i, F_{i+1}$   $i = 1, \dots, p$ , est un chemin fermé qui est contenu dans une composante connexe  $\Gamma_{ih}$  de la frontière  $\Gamma_h$ .

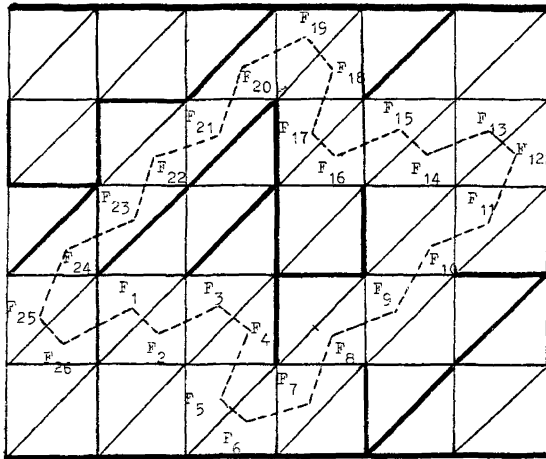


Figure 8.

La figure 8 représente une suite de faces  $(F_i)_{i=1}^{26}$  ayant la propriété (c), où  $\Omega_n = ]0, 1[{}^3$  on a représenté une partie de  $\Gamma$  :

- les arêtes frontières sont en ——— ou en ———
- les arêtes frontières de l'arbre sont en ———
- la ligne brisée  $\gamma$  est en -----

Comme  $\Omega_n$  est simplement connexe et localement d'un seul côté de sa frontière, les composantes connexes  $(\Gamma_{ih})_{i=1}^l$  de la frontière de  $\Omega_h$  sont homéomorphes à la sphère  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$ , donc le théorème de séparation de Jordan-Brouwer (Berger [10, 18.2.6, p. 40, tome V]) nous montre que  $\Gamma_{ih} - \gamma$  a deux composantes connexes. Par construction ces deux composantes connexes contiennent respectivement des sommets de  $\mathcal{J}_h$  et l'arbre  $H$  aura au moins deux composantes connexes sur sa restriction à  $\Gamma_{ih}$ , ce qui montre qu'il n'existe pas de suite de faces distinctes et frontières ayant la propriété (c) car  $H$  restreint est un arbre et qu'un arbre est connexe.

*Étape 2* : On va parcourir l'ensemble des faces frontières en se déplaçant d'une seule face par étape et de façon à ne *jamais traverser une arête de l'arbre H*.

On part d'une face  $F_0$  et on avance en  $F_1$  et ainsi de suite avec les règles suivantes :

$$F_i \neq F_{i+1}, \quad F_{i-1} \neq F_{i+1},$$

$F_i$  et  $F_{i+1}$  sont adjacentes,  $F_i \cap F_{i+1}$  n'est pas une arête de l'arbre  $H$ .

Si l'on pouvait continuer indéfiniment, on serait obligé de passer 2 fois sur une même face car il y a un nombre fini de faces, ce qui nous permettrait de construire une suite de faces distinctes ayant la propriété (c). On est donc bloqué en un nombre fini  $p$  d'étapes, et la face  $F_p$  correspondant à la dernière étape n'a qu'une arête  $A$  n'étant pas dans l'arbre  $H$ , ce qui montre que la composante sur la fonction de base associée à l'arête  $A$  est nulle ( $i$  est la seule fonction de base contenant la face  $F$  dans son support), ce qui n'était pas évident a priori puisqu'il existe des combinaisons linéaires des fonctions  $g^i$  ( $i \in K_A$ ) non nulles dans  $\Omega_h$  et nulles sur la frontière. On supprime cette face et cette arête, et on itère le procédé. On montre ainsi que les composantes sur les fonctions de base associées aux arêtes frontières sont nulles.

On vient de montrer que les fonctions de base associées aux arêtes internes engendrent  $J_{0h}^1$  ce qui achève la démonstration.

### 3. IMPLÉMENTATION ET ESSAI NUMÉRIQUE

#### 3.1. Construction de la base de $J_h$ et de la base de $J_{0h}$

La base de  $J_h$  (resp.  $J_{0h}$ ) sera formée des fonctions associées aux faces (resp. faces internes) et des fonctions associées aux arêtes (resp. arêtes internes) qui ne sont pas des arêtes d'un arbre ayant les propriétés du théorème 2.

Il nous faut donc construire un arbre tel que la restriction de cet arbre à chaque composante connexe de la frontière soit encore un arbre.

*Algorithme 1* : Construction de l'arbre :

— ici  $H$  désigne un ensemble d'arêtes c'est-à-dire un ensemble de couples  $\{n_1, n_2\}$  où  $n_1$  et  $n_2$  sont les numéros des sommets de l'arête.

$M$  désigne un tableau dimensionné au nombre de sommets.

*Étape 0* : Initialisation  $H = \emptyset$

$$M(i) = i \quad \forall i.$$

*Étape 1* : On boucle sur les arêtes frontières et on appelle la procédure 1.

*Étape 2* : On boucle sur les arêtes internes et on appelle la procédure 1.

*Procédure 1* : Soit  $i$  et  $j$  les numéros des sommets de l'arête  $A$  :

— si  $M(i) \neq M(j)$  alors ajouter  $A$  à  $H$  et modifier  $M$  par :

$$M(k) = M(i) \quad \forall k \text{ tel que } M(k) = M(j). \quad \blacksquare$$

*Remarque* : Le tableau  $M$  donne un numéro à chaque composante connexe du graphe  $(\mathcal{S}_h, H)$  ; quand on ajoute une arête à  $H$  on ne crée pas de cycle car les extrémités de l'arête sont dans des composantes connexes différentes. L'arête ajoutée recolle les deux composantes connexes des extrémités de l'arête. On supprime l'un des numéros de l'une des deux composantes connexes pour lui donner le numéro de l'autre.

En bouclant sur les arêtes frontières on obtient un arbre sur chaque composante connexe de la frontière (car si l'on ajoute une arête frontière à ce graphe on crée un cycle (cf. théorème 2, § 2)).

Et puis en bouclant sur les arêtes internes, on le prolonge pour les mêmes raisons en un arbre total.

### 3.2. Construction du système linéaire associé au problème de Stokes

Le problème linéaire discret associé au problème de Stokes dans ce cas est :

$$P_1 \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_h} \nabla u_h \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega_h} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in J_{0h} \\ v_h \in J_h \quad \text{et} \quad u_h|_{\Gamma} = u_{\Gamma h} \end{array} \right.$$

soit  $\omega \in J_h$  tel que  $\omega|_{\Gamma} = u_{\Gamma h}$ .

*Remarque* : Si pour prendre en compte les conditions aux limites, on veut pénaliser les éléments diagonaux correspondant aux fonctions frontières, il faut calculer les coordonnées sur les fonctions de base frontières d'une fonc-

tion  $\omega$  tel que  $\omega|_{\Gamma} = u_{\Gamma h}$  pour pouvoir modifier le second membre en conséquence. Comme la construction de  $\omega$  n'est pas triviale on n'a pas retenu la méthode de pénalisation.

On résout effectivement le système suivant :

$$P_2 \begin{cases} \int_{\Omega_h} \nabla \tilde{u}_h \nabla v_h \, dx = - \int \nabla \omega \nabla v_h \, dx + \int f v_h \, dx \quad \forall v_h \in J_{0h} \\ \tilde{u}_h \in J_{0h} . \end{cases}$$

La solution  $u_h$  du problème  $P_1$  est donnée par  $u_h = \omega + \tilde{u}_h$  où  $\tilde{u}_h$  est la solution du problème  $P_2$  et où  $\omega$  est un relèvement des conditions limites. Attention il est important que  $\omega \in J_n$  car  $\tilde{u}_h \in J_{0h}$  et  $u_h \in J_h$ ; le prolongement de  $u_{\Gamma h}$  par zéro au nœud interne n'est pas une fonction de  $J_h$  si  $u_{\Gamma h} \cdot \nu \neq 0$  (où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega_h$ ).

L'équation variationnelle  $P_2$  écrite sur la base de  $J_{0h}$  construite au paragraphe précédent se réduit à un système linéaire symétrique positif défini que l'on résoudra en utilisant une méthode classique (factorisation de Choleski ou gradient conjugué par exemple).

### 3.3. Expression d'un relèvement des conditions limites dans la base de $J_h$

Il n'y a aucun problème pour construire le relèvement des conditions limites tangentielles. On veut donc construire une fonction  $\omega_v \in J_h^2$  tel que  $\omega_v|_{\Gamma}$  nous donne les conditions limites normales ( $\omega_v|_{\Gamma} = u_{Ih} \cdot \nu$  où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega_h$ ).

*Algorithme 2*

*Étape 0* : Initialisation

- on pose  $H^0 = H$  où  $H$  est l'ensemble des arêtes de l'arbre
- on pose  $v^0 = u_{\Gamma h} \cdot \nu$  où  $\nu$  est la normale extérieure à  $\Omega_h$
- on pose  $k = 1$ .

*Étape 1* : (Recherche d'un sommet pendant) on recherche une face  $F_{jk}$  qui n'a qu'une seule arête  $A_{ik}$  n'appartenant pas à  $H^{k-1}$ ; si elle n'existe pas l'algorithme est terminé.

*Étape 2*

— On pose  $a_k = v^{k-1}(x^{jk}) \cdot \nu(x^{jk})$  où  $x^{jk}$  est le milieu de la face  $F_{jk}$  où  $g^{jk}$  est la fonction de base associée à  $A_{ik}$ .

Faire

$$v^k = v^{k-1} - a_k g^{jk}|_{\Gamma}$$

$$H^{k+1} = H^k \cup \{A_{ik}\} .$$

*Étape 3* : Soit  $F_{j_{k+1}}$  la face frontière adjacente à  $A_{i_k}$  et différente de  $F_{j_k}$  :  
 — si  $F_{j_{k+1}}$  n'a qu'une arête n'appartenant pas à  $H$  on recommence l'étape 2 en faisant  $k = k + 1$   
 — sinon on recommence l'étape 1 en faisant  $k = k + 1$ .

Alors la fonction  $\sum_{p=1}^k a_k g^{ik}$  est un relèvement des conditions limites normales et la justification de cet algorithme est donnée dans l'étape 2 de la démonstration du théorème 2, § 2.

### 3.3. Essai numérique

On a testé la construction précédente sur le problème de la cavité tridimensionnelle. C'est-à-dire que l'on a résolu le problème de Stokes sur le cube unité  $\Omega = ]0,1[^3$  avec les conditions  $\vec{u}_\Gamma$  limites suivantes :

$$\vec{u}_\Gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur la face d'équation } x = 1$$

et  $\vec{u}_\Gamma = 0$  sur toutes les autres faces .

Pour résoudre le problème on a triangulé  $\Omega$  en le coupant en sous-cubes et en coupant chaque sous-cube en 5 tétraèdres (*cf. fig. 9*).

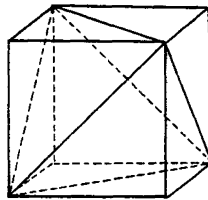


Figure 9. — Représentation d'un cube coupé en 5 tétraèdres.

*Exemple 1* : On a coupé le cube en 27 cubes ce qui nous donne une triangulation formée de 135 tétraèdres, de 324 faces, 64 sommets, de plus la dimension de  $J_h$  est égale à 847 et la dimension de  $J_{0h}$  est égale à 514. On a donc résolu un système  $514 \times 514$  par la méthode du gradient conjugué qui a convergé en 130 itérations. Il a fallu 4 min 50 s de temps calcul pour résoudre le problème sur un Iris 80.



Pour représenter le résultat, on fait des coupes :

1. On a représenté la projection de la vitesse sur le plan de coupe en tout milieu de face (noeud) contenu dans ce plan, et perpendiculairement à la projection on a représenté la composante normale à ce plan (cf. fig. 10, 11).

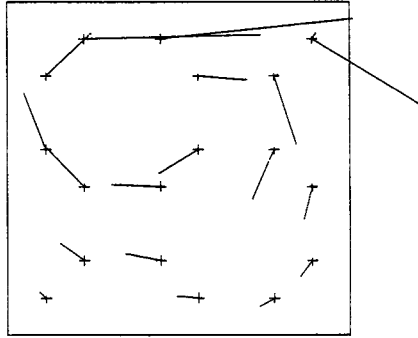


Figure 10. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 2/3$ .

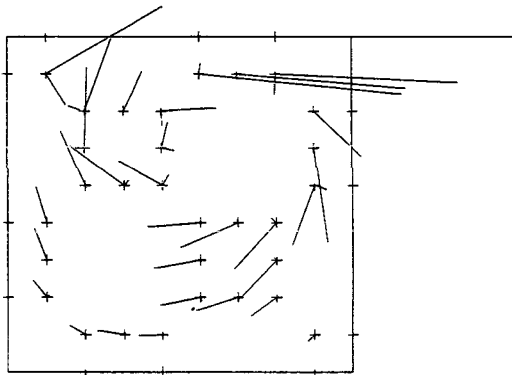


Figure 11. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 4/9$ .

2. Comme les noeuds ne forment pas une grille régulière, on calcule les valeurs de la fonction sur une grille régulière et l'on représente la projection sur le plan en tout point de la grille (cf. fig. 12, 13). Mais il faut faire attention car il peut y avoir des discontinuités importantes aux voisinages des sommets de  $\mathcal{S}_h$ . Par exemple prenons une fonction  $g^{1k}$  de base associée à une face  $F_k$ , alors la fonction est nulle à l'extérieur des 2 tétraèdres adjacents à la face  $F_k$  et tend vers moins deux fois la valeur de la fonction en  $x^k$  quand  $x$  tend vers l'un des 2 sommets opposés à la face ( $x^k$  est le milieu de la face  $F_k$ ).

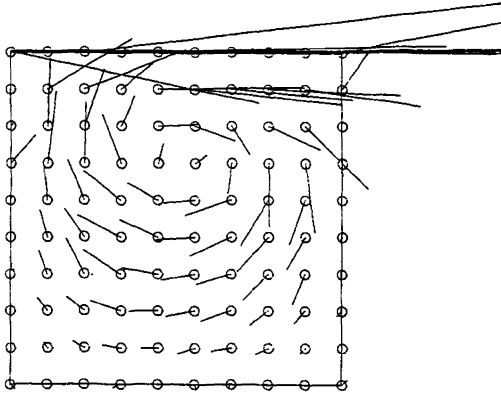


Figure 12. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 4/9$ .

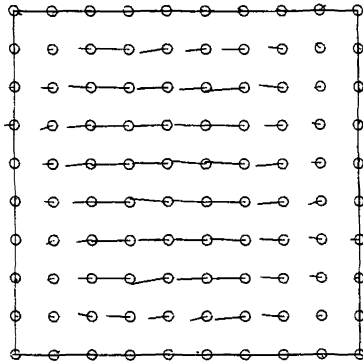


Figure 13. — Le plan de coupe a pour équation  $z = 2/9$ .

*Exemple 2* : Maintenant on a coupé le cube en 64 cubes, ce qui donne une triangulation formée de 320 tétraèdres, 736 faces, 540 arêtes, 125 sommets et la dimension de  $J_h$  est égale à 1 888, la dimension de  $J_h$  est égale à 1 313. On résout toujours le système par la méthode du gradient conjugué qui converge en 210 itérations et il a fallu 22 min 30 s de temps calcul pour résoudre le problème.

On représente le résultat de la même façon si ce n'est que dans la première méthode on n'a pas dessiné les composantes normales au plan de coupe (cf. fig. 14).

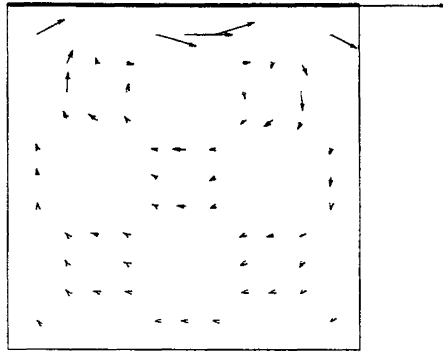


Figure 14. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 7/12$ .

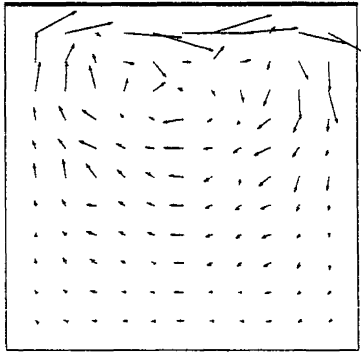


Figure 15. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 5/12$ .

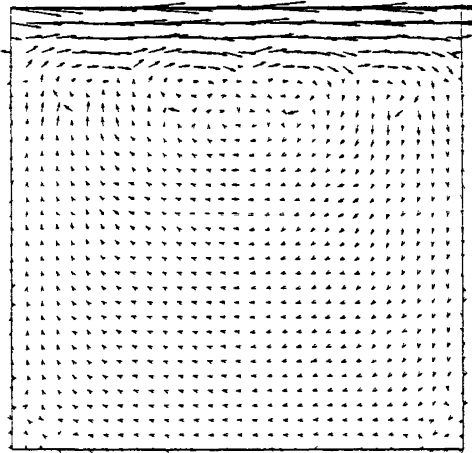


Figure 16. — Le plan de coupe a pour équation  $y = 3/8$ .

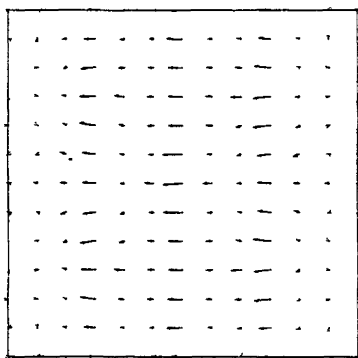


Figure 17. — Le plan de coupe a pour équation  $z = 3/12$ .

Les figures 15, 16, 17 nous donnent des représentations de la solution suivant des plans de coupe différents et munis de grilles différentes. Sur la figure 16 on voit bien 4 tourbillons de centres, 4 flèches plus grandes correspondant aux tourbillons autour de 4 arêtes. Les 4 grandes flèches sont dues à la non-conformité de l'élément.

*Remerciements* : Nous remercions vivement O. Pironneau pour nous avoir indiqué ce problème, et de nombreuses suggestions pour la présentation de cet article, ainsi que F. Thomasset pour ses discussions stimulantes.

## APPENDICE A

### RAPPELS

#### 1. Rappels d'algèbre linéaire

**PROPOSITION 1** : Pour qu'une application  $f$  définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel  $V$  admette un prolongement linéaire sur cet espace vectoriel il faut et il suffit que pour toute combinaison linéaire nulle de vecteurs de  $A$

$$\sum \lambda_i v_i = 0 \quad (\text{A.1})$$

on ait

$$\sum \lambda_i f(v_i) = 0. \quad (\text{A.2})$$

De plus ce prolongement est unique si  $A$  est une partie génératrice.

*Démonstration* : Il suffit de remarquer que (A.1)  $\Rightarrow$  (A.2) est équivalent à  $f$  linéaire sur  $A$  ce qui montre la nécessité. Pour la suffisance, il existe une partie libre  $B$  maximale de vecteurs de  $A$  ;  $B$  est une base de  $\text{Vect}(A)$  donc il existe une application linéaire unique définie sur  $\text{Vect}(A)$  telle que

$$\forall v \in B \quad g(v) = f(v)$$

d'après (A.1) et (A.2) on a

$$g|_A = f$$

comme il existe un supplémentaire  $W$  de  $\text{Vect}(A)$  si  $\text{Vect}(A) \neq V$ ,  $h \circ p$  où  $p$  est la projection de  $V$  sur  $\text{Vect}(A)$  parallèlement à  $W$  on a

$$h|_A = g|_A = f$$

ce qui montre l'existence du prolongement et si  $A$  est générateur,  $g$  est l'unique prolongement de  $f$ . ■

**DÉFINITION 1** : On dit qu'une relation de dépendance linéaire  $\left(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i\right) = 0$  est minimale si pour tout  $i \in I$  on a :  $\{v_i \mid k \in I \setminus \{i\}\}$  est une partie libre. ■

**PROPOSITION 2** : Une relation de dépendance linéaire minimale est unique à un facteur multiplicatif près.

*Démonstration* : Il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^I &\rightarrow V \\ \Phi(\lambda) &= \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \quad \lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

car  $\text{Ker } \Phi \setminus \{0\}$  est l'ensemble des relations de dépendance linéaire et la dimension du noyau de  $\Phi$  est égal à un. ■

**PROPOSITION 3** : Une relation de dépendance linéaire est une combinaison linéaire de relations de dépendances linéaires minimales.

*Démonstration* : On fait une démonstration par récurrence, si le cardinal de  $I = 2$ , c'est évident on suppose la proposition vraie si le cardinal de  $I$  est égal à  $n$ .

Pour le cardinal de  $I$  égal à  $n + 1$ , il existe une relation de dépendance linéaire minimale formée à partir des vecteurs de  $A$

$$\sum_{j \in J} \mu_j v_j \quad \text{et} \quad \mu_j \neq 0 \quad \forall j \in J \quad (\text{A.4})$$

soit  $i \in J$ , toute relation de dépendance linéaire  $\sum \lambda_k v_k = 0$  s'écrit comme combinaison linéaire de 1.2.4 et de la relation suivante qui est définie sur les vecteurs  $\{v_j, j \in I \setminus \{i\}\}$

$$\sum_{k \in I \setminus \{i\}} \lambda_k v_k - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \sum_{j \in J \setminus \{i\}} \mu_j v_j = 0$$

ce qui achève la démonstration d'après l'hypothèse de récurrence. ■

## 2. Rappels de théorie des graphes

Aucune démonstration ne sera faite dans ce paragraphe mais toutes les démonstrations se trouvent dans le livre de M. Berge [14].

**DÉFINITION 2 :** *Un graphe  $G = (X, U)$  est le couple constitué*

1. *par un ensemble  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,*
2. *par une famille  $U = (u_1, \dots, u_m)$  d'éléments du produit cartésien  $X \times X$ ,*  
*— le nombre de sommets du graphe  $G$  est appelé l'ordre de  $G$ ,*  
*—  $X$  est l'ensemble des arcs ou arêtes orienté de  $G$ .*

**DÉFINITION 3 :** *L'arête est un arc qui n'est pas orienté ; c'est l'ensemble des extrémités de l'arc  $(x, y)$  que l'on notera  $[x, y]$  :*

— *un graphe partiel de  $G$  est un graphe dont les sommets sont les sommets de  $G$ , et dont les arcs forment une partie des arcs de  $G$ ,*

— *un sous-graphe est la restriction de  $G$  à une partie des sommets de  $G$ ,*

— *une chaîne de longueur  $q > 0$  est une séquence  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$  d'arc de  $G$  telle que chaque arc de la séquence ait une extrémité en commun avec l'arc précédent, et l'autre extrémité en commun avec l'arc suivant,*

— *un cycle est une chaîne  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$  telle que*

1. *le même arc ne figure pas deux fois dans la séquence,*
2. *les 2 sommets aux extrémités de la chaîne coïncident ;*

—  *$x \equiv y$  définition : il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$  : cette relation est une relation équivalente et les classes d'équivalences constituent une partition de  $x$ , ce sont les composantes connexes de  $G$ ,*

— *un cycle élémentaire est un cycle qui vérifie en outre : en parcourant le cycle on ne rencontre qu'une fois le même sommet (excepté bien entendu le sommet initial qui coïncide avec le sommet final),*

—  $U = \{ u_1, \dots, u_m \}$  les arcs d'un graphe  $G$ , à tout cycle on peut faire correspondre un vecteur  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$  avec

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & \text{si l'arc } i \text{ n'est pas utilisé} \\ + 1 & \text{si l'arc } i \text{ a le même sens que le sens de parcours} \\ - 1 & \text{si l'arc } i \text{ est de sens contraire au sens de parcours} \end{cases}$$

on confondra un cycle et son vecteur associé.

**THÉORÈME 1 :** Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets,  $m$  arcs,  $p$  composantes connexes, alors il existe  $m - n + p$  cycles élémentaires indépendants et il ne peut exister plus de  $m - n + p$  cycles indépendants.

**THÉORÈME 2 :** Soit  $H = (X, U)$  un graphe d'ordre  $n \geq 2$  les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

- i)  $H$  est connexe sans cycles
- ii)  $H$  est sans cycles et admet  $n - 1$  arcs
- iii)  $H$  est sans cycle et en ajoutant un arc on crée un cycle et un seul
- iv)  $H$  est connexe et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe.

**THÉORÈME 3 :** Un arbre d'ordre  $n \geq 2$  admet au moins deux sommets pendants (on appelle un sommet pendant un sommet qui n'est adjacent qu'à un seul sommet).

**THÉORÈME 4 :** Un graphe  $G = (X, U)$  admet un graphe partiel qui soit un arbre si et seulement si il est connexe.

**THÉORÈME 5 :** Soit  $G$  un graphe connexe,  $H$  un arbre maximal de  $G$  ; si  $u_i$  est un arc ne figurant pas dans  $H$ , son adjonction à  $H$  détermine un cycle  $\mu^i$  d'après la propriété iii) et les différents cycles  $\mu^i$  constituant une base de cycles indépendants (appelés les cycles associés à l'arbre  $H$ ).

**THÉORÈME 6 :** Soit  $G$  un graphe connexe. Soit  $H$  un graphe partiel sans cycle de  $G$  alors  $H$  est un graphe partiel d'un arbre maximal de  $G$ .

#### Notations

- $\partial A$  désigne la frontière de l'ensemble  $A$ .
- $\overset{\circ}{A}$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $A$ .
- $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ .
- $\mathcal{I}_h$  désigne une triangulation formée de tétraèdres.
- $\Omega_h = \bigcup_{T \in \mathcal{I}_h} \overset{\circ}{T}$ .
- $\mathcal{S}_h$  désigne l'ensemble des sommets de  $\mathcal{I}_h$ .
- $K_A$  (resp.  $K_F$ ) désigne l'ensemble des numéros des arêtes (resp. faces) de  $\mathcal{I}_h$ .

- $\tilde{K}_A$  (resp.  $\tilde{K}_F$ ) désigne l'ensemble des numéros des arêtes (resp. faces) frontières de  $\mathcal{J}_h$ .
- $\overset{\circ}{K}_A$  (resp.  $\overset{\circ}{K}_F$ ) désigne l'ensemble des numéros des arêtes (resp. faces) internes de  $\mathcal{J}_h$ .
- $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ .
- $\operatorname{Vect}(A)$  désigne l'espace vectoriel engendré par  $A$ .
- $g|_A$  la restriction de  $g$  à  $A$ .
- $F^E$  désigne l'ensemble des applications de  $E$  dans  $F$ .
- $L^2(\Omega)$  désigne l'ensemble des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $R$  de carré sommable.
- $H^1(\Omega)$  désigne l'ensemble des fonctions de  $L^2(\Omega)$  à dérivée au sens des distributions dans  $L^2(\Omega)$ .
- $P_1(T)$  désigne l'ensemble des fonctions polynomes de degré 1 définies sur  $T$ .
- $J(\Omega)$  est défini en 1. 2.
- $J_h$  est défini en 1. 3.
- $J_h^1$  est défini en 1. 5.
- $J_h^2$  est défini en 1. 6.
- $J_0(\Omega)$  est défini en 2. 1.
- $J_{0h}$  est défini en 2. 2.
- $J_{0h}^1$  est défini en 2. 3.
- $J_{0h}^2$  est défini en 2. 4.
- $g^{ik}$  est défini en 1. 7.
- $g^j$  est défini en 1. 12 et 1. 13.

DÉFINITION. *On dit qu'un ensemble est simplement connexe s'il est connexe et de plus si tout chemin fermé est homotope à un point.*

#### BIBLIOGRAPHIE

1. M. CROUZEIX et P. A. RAVIART, *Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations*, R.A.I.R.O., R-3 (1973), pp. 33-76.
2. M. FORTIN, *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes par des éléments finis de type mixte*, Rapport de Recherche 184 (LABORIA-INRIA), août 1976.
3. C. TAYLOR et P. HOOD, *A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique*, Computers and Fluids, 1 (1973), pp. 73-100.
4. M. BERCOVIER, *A family of finite elements with penalisation for the numerical solution of Stokes and Navier-Stokes equations*, in Gilchrist (1977).
5. O. C. ZIENCKIEWICZ and P. N. GODBOLE, *Viscous incompressible flows with special reference to non-newtonian (plastic) fluids*, in « Finite Element Method in Flow Problems », Wiley, New York (1975).



6. R. TEMAN, *Theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations*, North Holland, Amsterdam (1977).
7. M. CROUZEIX, *Proceedings of Journées « éléments finis »*, Université de Rennes (1976).
8. F. THOMASSET, *Numerical solution of the Navier-Stokes equations by finite elements methods*, VKI Lecture series, no. 86 (Computational fluid dynamics, March 21-25, 1977).
9. P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland (1978).
10. M. BERGER, *Géométrie*, Cedic/Fernand Nathan
11. C. GODBILLON, *Topologie Algébrique*, Herman
12. S. LANG, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing company.
13. F. HECHT, *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle*, Université de Paris 6 (1980).
14. C. BERGE, *Théorie des Graphes*, Dunod