J.-P. BERLIOZ

Stabilité d'un algorithme de recherche de valeur propre de problème généralisé

RAIRO. Analyse numérique, tome 14, n° 3 (1980), p. 227-238

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1980__14_3_227_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 14, n° 3, 1980, p. 227 à 238)

STABILITÉ D'UN ALGORITHME DE RECHERCHE DE VALEUR PROPRE DE PROBLÈME GÉNÉRALISÉ (*)

par J.-P. BERLIOZ (1)

Communiqué par P.G. CIARLET

Résumé. — *L'algorithme QZ a pour but de résoudre le problème de valeur propre* $Ax = \lambda Bx$; *dans cet article nous étudions la stabilité mathématique de l'algorithme lorsque A et B sont singulières.*

Abstract. — *The QZ algorithm is designed for solving the generalized eigenvalue problem,* $Ax = \lambda Bx$; *in this paper we study its mathematical stability if A and B are singular.*

1. NOTATIONS ET INTRODUCTION

Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients complexes, on note $\mathscr{H}$ l'ensemble des matrices Hessenberg supérieures, $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, $\mathscr{U}$ l'ensemble des matrices unitaires.

On définit une factorisation (QZ) d'un couple (A, B) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ comme la double factorisation unitaire et triangulaire :

(1) trouver une matrice Q de $\mathscr{U}$ telle que $QA = R$ avec R appartenant à $\mathscr{T}$;

(2) trouver une matrice Z de $\mathscr{U}$ telle que $(QB)Z = T$ avec T appartenant à $\mathscr{T}$ et $QAZ \in \mathscr{H}$.

La factorisation (1) est notée factorisation (QR), la factorisation (2), factorisation $(QR)^*$.

Q et Z (resp. R et T) sont appelés facteurs unitaires (resp. triangulaires) d'une décomposition QZ de (A, B). Le couple de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ noté

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (QAZ, QBZ)$$

est un couple des transformées (QZ) de (A, B).

(*) Reçu juin 1979

(1) Attaché aux Services Techniques de l'Armée, 5, rue Brossay-Saint-Marc, .

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis, 0399-0516/1980/227/$ 5.00

L'algorithme (QZ) génère une suite de couples ($A_s\, B_s$) de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$ de la façon suivante :

$$A_1 = A, \qquad B_1 = B,$$
$$A_{s+1} = Q_s A_s Z_s, \qquad B_{s+1} = Q_s B_s Z_s,$$

où Q_s et Z_s sont des facteurs unitaires de (A_s, B_s).

Lorsque A et B sont inversibles, l'algorithme est équivalent à l'algorithme QR et les matrices A_s tendent vers une forme presque triangulaire supérieure, ce qui permet en général de déterminer les couples (α, β) vérifiant l'équation

$$\det(\beta A - \alpha B) = 0.$$

Dans le cas général, la double factorisation (QZ) n'est pas définie de façon unique (ou plutôt à une diagonale unitaire multiplicative près) (*voir* 3), et la convergence et la stabilité de l'algorithme ne sont pas trivialement induites par celles de l'algorithme QR. Dans (3) il a été établi que l'algorithme QZ détecte les singularités d'une classe de matrices (A, B) en arithmétique exacte, nous nous proposons de montrer que cette propriété est mathématiquement stable par rapport aux perturbations de A ou B lorsque le déterminant ci-dessus n'est pas identiquement nul.

Après avoir noté K_k, l'ensemble des matrices de $\mathbb{C}_{nn}$ dont les k premières colonnes sont linéairement indépendantes, nous rappelons les résultats obtenus à propos des factorisations (QR) dans [1] :

PROPOSITION 1.1 : *Soit A appartenant à E_k, et une factorisation* (QR) *de A : $QA = R$, alors toutes les factorisations* (QR) *de A peuvent se mettre sous la forme*

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} Q, \qquad \begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} R,$$

avec Δ_1 diagonale unitaire d'ordre k et Δ_2 matrice unitaire d'ordre $(n-k)$.

Pour la factorisation (QR)*, nous notons E_k^* le sous-ensemble des matrices de $\mathbb{C}^{nn}$ dont les k dernières lignes sont linéairement indépendantes et nous avons une proposition analogue :

PROPOSITION 1.2 : *Soit B appartenant à E_k^*, et une factorisation* (QR)* *de B : $B = TZ^*$, alors toutes les factorisations* (QR)* *de B peuvent se mettre sous la forme*

$$Z\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix},$$

avec Σ_1 matrice unitaire d'ordre $n-k$ et Σ_2 diagonale unitaire d'ordre k.

L'étude de la double factorisation (QZ) se fait sur l'ensemble des couples de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$, et dans le cas où A est Hessenberg non réduite; les propositions suivantes résument l'étude de son unicité, et de son comportement en cas de singularité de A ou B.

PROPOSITION 1.3 : *(A, B) de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$ avec A Hessenberg supérieure non réduite, B de premier terme diagonal b_{11} non nul, et une factorisation (QZ) de (A, B) de facteurs unitaires Q et Z, alors tous les facteurs unitaires de (A, B) peuvent s'écrire :*

$$\Delta Q,\ Z\Sigma \quad \text{avec } \Delta \text{ et } \Sigma \text{ deux diagonales unitaires.}$$

PROPOSITION 1.4 : *Soient (A, B) de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$, avec A Hessenberg supérieure non réduite, B de premier terme diagonal b_{11} nul, alors il existe un indice p unique et une factorisation particulière de (A, B) avec Q^* Hessenberg supérieure non réduite et Z de la forme*

$$Z=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix},$$

avec I, matrice identité d'ordre p, Z_2 matrice Hessenberg supérieure unitaire non réduite. Tous les facteurs (QZ) de (A, B) peuvent s'écrire :

$$\Delta Q \text{ et } Z\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \text{ avec } \Sigma_1 \text{ unitaire d'ordre } p,$$

$$\text{et } \Sigma_2 \text{ diagonale unitaire d'ordre } n-p,$$

$$\Delta \text{ diagonale unitaire d'ordre } n.$$

Ces propositions suggèrent l'introduction d'un sous-ensemble de matrices de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$, permettant de décrire la suite des itérés d'un couple (A, B) avec A Hessenberg supérieure non réduite et det $(\beta A - \alpha B)$ non identiquement nul, et de définir une relation d'équivalence caractérisant les factorisations (QZ).

2. FACTORISATION QZ ET RELATION D'ÉQUIVALENCE ASSOCIÉE

Notons ξ_{pq} pour $p+q \leqq n$ le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{H} \times \mathcal{T}$ définies par :

(A, B) appartient à ξ_{pq} (p et q pouvant être nuls) si et seulement si det $(\beta A - \alpha B) \not\equiv 0$ et se partitionne en matrice bloc-triangulaire supérieure dont 3 blocs diagonaux vérifient :

1° si $p \neq 0$: (A_1, B_1) d'ordre p, tel que :

$$A_1 = U_1 R_1 W_1,$$

$$B_1 = U_1 N_1 W_1,$$

avec R_1 triangulaire supérieure, N_1 triangulaire supérieure *nilpotente*, U_1 et W_1 matrices unitaires;

2° si $(n-p-q)\neq 0$: (A_2, B_2) d'ordre $n-p-q$ avec A_2 Hessenberg supérieure non réduite et B_2 triangulaire supérieure;

3° si $q\neq 0$: (A_3, B_3) d'ordre q tel que :

$$A_3 = U_3\, N_3\, W_3,$$
$$B_3 = U_3\, R_3\, W_3,$$

avec N_3 triangulaire supérieure *nilpotente*, R_3 triangulaire supérieure inversible et U_3 et W_3 unitaires.

Soit $\mathscr{U}_{pq}$ l'ensemble des matrices unitaires d'ordre n défini par :

$U \in \mathscr{U}_{pq}$ si et seulement si U est bloc diagonale unitaire composée au plus, de trois blocs diagonaux unitaires U_i respectivement, d'ordre p (si $p\neq 0$), $n-p-q$, q (si $q\neq 0$), de plus U_2 est diagonale.

La relation suivante $\mathscr{R}_{pq}$, associée à $\mathscr{U}_{pq}$, est une relation d'équivalence :

soient (A, B) et (C, D) deux couples de $\mathscr{H}\times\mathscr{T}$, $(A, B)\,\mathscr{R}_{pq}\,(C, D)$ si et seulement si il existe deux matrices de $\mathscr{U}_{pq}$, U et W telles que

$$C = UAW, \qquad D = UBW.$$

Cette relation possède les propriétés suivantes :

Propriété 2.1 : *Soient (A, B) et (C, D) de $\mathscr{H}\times\mathscr{T}$ équivalents par $\mathscr{R}_{pq}$, si (A, B) appartient à ξ_{pq} alors (C, D) appartient aussi à ξ_{pq}.*

Remarque : Les matrices UAW et UBW sont blocs-triangulaires supérieures de blocs diagonaux de même ordre que A et B et de la forme

$$U_i\, A_i\, W_i \qquad \text{et} \qquad U_i\, B_i\, W_i.$$

Ils vérifient donc les propriétés (1), (2) et (3) définissant ξ_{pq}.

Propriété 2.2 : *Si (A, B) appartient à ξ_{pq}, alors il existe deux indices uniques p' et q' vérifiant $p'\geqq p$, $q'\geqq q$, $p'+q'\leqq n$ tels que tous les transformés (QZ), $(\tilde{A}, \tilde{B})$, appartiennent à $\xi_{p'q'}$ et soient congrus modulo $\mathscr{R}_{p'q'}$.*

Remarque : (A) On étudie toutes les décompositions (QZ) de (A, B) obtenues par des décompositions des blocs (A_i, B_i) pour $i\leqq 3$ on détermine:

$$Q_i\, A_i = R_i \quad \text{avec} \quad R_i \text{ triangulaire supérieure,}$$
$$(Q_i\, B_i)\, Z_i = T_i \quad \text{avec} \quad T_i \text{ triangulaire supérieure,}$$

une classe de facteurs unitaires de (A, B) est donnée par les matrices unitaires blocs diagonales

$$Q=(Q_i), \qquad Z=(Z_i) \quad \text{pour } i \leqq 3.$$

Les transformés $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ainsi obtenus, ont pour blocs diagonaux $(\tilde{A}_i\ \tilde{B}_i)$ respectivement d'ordre q, $n-p-q$, p, on vérifie :

$$\text{si} \quad q \neq 0, \qquad \tilde{A}_1=\tilde{U}_1 R_1 \tilde{W}_1, \qquad \tilde{B}_1=\tilde{U}_1 N_1 \tilde{W}_1,$$
$$\text{si} \quad p \neq 0, \qquad \tilde{A}_3=\tilde{U}_3 N_3 \tilde{W}_3, \qquad \tilde{B}_3=\tilde{U}_3 R_3 \tilde{W}_3,$$

avec

$$\tilde{U}_i=Q_i U_i, \qquad \tilde{W}_i=W_i Z_i \quad \text{pour } i=1,3.$$

C'est donc l'étude de $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ qui est déterminante; deux cas sont possibles :

1° B_2 a son premier élément diagonal B_2 (1,1) non nul, alors d'après la proposition 1.3 les facteurs Q_2 et Z_2 sont déterminés à une diagonale multiplicative près, et les transformés (QZ) ainsi construits appartiennent à ξ_{pq} si A est inversible, ou à ξ_{pq+1} si A n'est pas inversible $(p'=p,\ q'=q+1)$. $q'=q+1)$.

2° B_2 a son premier élément diagonal nul, alors il existe un indice p_2 unique défini par la proposition (1.4), et les transformés (QZ) ainsi construits appartiennent à $\xi_{p+p_2,q}\begin{cases} p'=p+p_2 \\ q'=q \end{cases}$ si A est inversible, à $\xi_{p+p_2,q+1}$ sinon $(p'=p+2\,q'=q+1)$.

Notons que l'hypothèse $\det(\beta A-\alpha B)$ non identiquement nul implique

$$p'+q' \leqq n.$$

(B) Études maintenant toutes les décompositions possibles de (A, B).

Si A_2 est inversible, alors tous les facteurs Q sont de la forme précédente car A appartient à E_{n-q}, on applique 1.1 et $q'=q$ de façon unique et les facteurs Z sont déterminés par (A_2, B_2).

Si A_2 n'est pas inversible, tous les facteurs Q sont de la forme

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q_1 & & 0 \\ & Q_2 & \\ 0 & & Q_3 \end{pmatrix}$$

avec Δ_1 diagonale unitaire d'ordre $n-q'$, Δ_2 matrice unitaire d'ordre q', car A appartient à $E_{n-q'}$.

De plus $\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{pmatrix} \tilde{B}$ peut s'écrire : $\begin{pmatrix} T_1 & /\!/\!/ \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ avec T_1 triangulaire supérieure d'ordre $n-q'$ et T_2 matrice inversible d'ordre q'.

Toutes les factorisations $(QR)^*$ de T_2 sont définies à une diagonale unitaire multiplicative près, Σ_2, d'après la proposition 1.2.

Toutes les factorisations Σ_1 telles que $T_1 \Sigma_1$ soit triangulaire supérieure, sont de la forme $\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$, avec τ_1 matrice unitaire d'ordre p' et τ_2 diagonale unitaire d'ordre $n-p'-q'$, car T_1 $(p'+1, p'+1)$ est non nul comme $\tilde{B}(p'+1, p'+1)$.

La matrice $\begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{U}_{p'q'}$.

Nous pouvons conclure que tous les transformés QZ de (A, B) appartiennent à $\xi_{p'q'}$ où p' et q' sont définis dans le paragraphe (A) et sont congrus modulo $\mathcal{R}_{p'q'}$.

3. STABILITÉ DE LA DÉCOMPOSITION QZ

Dans la suite de l'article $\|A\|$ notera la norme de Frobénius de A, et $\|(A, B)\|$ le maximum de $\|A\|$ et $\|B\|$.

Les remarques suivantes sont immédiates : pour toutes matrices unitaires de $\mathbb{C}_{nn}$, Q et Z on a

$$\|(QAZ, QBZ)\| = \|(A, B)\|$$

De plus si P et Y sont aussi des matrices unitaires de $\mathbb{C}_{nn}$:

$$\|(QAZ, QBZ)-(PCY, PDY)\| \leqq \|(A, B)-(C, D)\| + \|(A, B)\| . \|(Q, Z)-(P, Y)\|.$$

Nous pouvons rappeler les résultats de continuité obtenus pour la décomposition (QR) dans [1] :

A appartenant à E_k, ensemble des matrices de $\mathbb{C}_{nn}$ ayant leurs k premières colonnes linéairement indépendantes, admet une factorisation (QR) :

$$A = Q^* R$$

et C de E_k admet une factorisation (QR), $C = P^* S$; on peut partitionner les facteurs unitaires en

$$Q^* = (Q_1^* \mid Q_2^*) \quad \text{avec} \quad Q_1^* \in \mathbb{C}_{nk}, \quad Q_2^* \in \mathbb{C}_{nn-k},$$
$$P^* = (P_1^* \mid P_2^*) \quad \text{avec} \quad P_1^* \in \mathbb{C}_{nk}, \quad P_2^* \in \mathbb{C}_{nn-k}.$$

PROPOSITION 3.1 : *Pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de A dans E_k, il existe une constante λ_k dépendant de $\mathcal{V}$ et de A, telle que pour toute matrice C de $\mathcal{V} \cap E_k$ on ait:*

$$\|P_1 - Q_1\| \leqq \lambda_k \|A - C\|,$$

de plus, il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de A, $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$, tel que pour tout C de $\mathscr{W} \cap E_k$, il existe une matrice unitaire Δ de $\mathscr{U}_{0,n-k}$ telle que

$$\|\Delta - QP^*\| \leqq \lambda_k^2 \sqrt{2(n-k)(n-k+1)}\,\|A-C\|.$$

REMARQUE : λ_k dépend essentiellement de façon croissante de la quantité $\|A_1\|.\|(A_1^* A_1)^{-1}\|$ avec

$$A=(A_1, A_2), \qquad A_1 \in \mathbb{C}_{nk}, \qquad A_2 \in \mathbb{C}_{nn-k},$$

pour ce qui est des bornes déduites de la référence 1.
λ_k dépend linéairement de $\|A_1\|.\|(A_1^* A_1)^{-1} A_1^*\|$ en prenant la référence 6.

Un résultat analogue peut être obtenu pour la décomposition (QR)* présentée dans le paragraphe 1, factorisant toute matrice complexe d'ordre n, B en un produit

$$B = TZ^* \qquad \text{où} \quad T \in \mathscr{T} \quad \text{et} \quad Z \in \mathscr{U}.$$

E_l^* est l'ensemble des matrices de $\mathbb{C}_{nn}$ dont les l dernières lignes sont linéairement indépendantes et le partitionnement de Z :

$$Z=(Z_1, Z_2) \qquad \text{avec} \quad Z_1 \in \mathbb{C}_{n,n-l} \quad \text{et} \quad Z_2 \in \mathbb{C}_{nl}.$$

C est une autre matrice de E_l^* de facteur unitaire par $(QR)^*$, une matrice unitaire Y admettant le même partitionnement que Z, on peut énoncer :

PROPOSITION 3.2 : *Pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de B dans E_l^*, il existe une constante λ_l ne dépendant que de $\mathscr{V}$ et B, telle que, pour tout D de $E_l \cap \mathscr{V}$, on ait*

$$\|Z_2 - Y_2\| \leqq \lambda_l \|B-D\|.$$

De plus, il existe un voisinage $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}$ de B tel que, pour tout D de $\mathscr{W} \cap E_l^*$ il existe une matrice Σ de $\mathscr{U}_{n-l,0}$ telle que

$$\|\Sigma - Z^* Y\| \leqq \lambda_l^2 \sqrt{2\,(n-l)\,(n-l+1)}\,\|B-D\|.$$

THÉORÈME 3.1 : *Soit (A, B) de ξ_{pq} dont une transformée (QZ) appartient à $\xi_{p'q'}$ avec $p'+q' < n$ et $p' \geqq p$ et $q' \geqq q'$, il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de (A, B) dans $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ et une constante K dépendant de $\mathscr{W}$ et (A, B), tels que pour tout couple (C, D) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T} \cap \mathscr{W}$ et tout facteur unitaire (QZ) de (A, B), Q et Z, il existe des facteurs (QZ) de (C, D), P et Y, des matrices unitaires de $\mathscr{U}_{p'q'}$ Δ, Σ tels que*

$$\|(\Delta, \Sigma)-(PQ^*, Z^* Y)\| \leqq K\|(A, B)-(C, D)\|.$$

Démonstration : On commence par montrer que si (C, D) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ est suffisamment proche de (A, B) vérifiant les hypothèses du théorème 3.1, alors pour tout facteur (Q, Z) de (A, B) il existe des facteurs unitaires P, Y de (C, D) tels que les colonnes comprises entre les indices $p'+1$ et $n-q'$ (resp. Q^* et P^*) sont voisines en norme et, pour conclure on utilise un résultat de [1] sur les matrices presque unitaires. Établissons d'abord le lemme 3.1.

LEMME 3.1 : *Pour tout (A, B) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de (A, B), une constante K tels que, pour tout (C, D) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T} \cap \mathscr{W}$, il existe une décomposition (QZ) de (A, B) et une décomposition (Q, Z) de (C, D) vérifiant :*

$$\|(Q^*, Z)-(P^*, Y)\| \leqq K\|(A, B)-(C, D)\|.$$

Démonstration du lemme : On raisonne par récurrence sur l'ordre des matrices (A, B). Pour $n=2$, on essaye cas par cas de se ramener aux hypothèses des propositions 3.1 et 3.2.

1° (A, B) appartient à $E_1 \times E_1^*$: appliquons 3.1 : il existe $\mathscr{W}_1$ et K_1, $\mathscr{W}_1$ voisinage de A, tels que pour tout C de $\mathscr{W}_1$ et tout facteur (QR) de A, Q, il existe un facteur (QR) de C, P, tel que

$$\|P^*-Q^*\| \leqq K_1\|A-C\|.$$

Fixons un facteur (QR) de A, Q_0 : on applique 3.2 à $Q_0 B$, $\exists \mathscr{W}_2$ et K_2, $\mathscr{W}_2$ voisinage de $Q_0 B$ tel que pour tout D' de $\mathscr{W}_2$ et tout facteur $(QR)^*$ de QB, Z, il existe un facteur $(QR)^*$ de D', Y', tel que

$$\|Z-Y\| \leqq K_2\|QB-D'\|.$$

En particulier, on peut construire un voisinage $\mathscr{W}$ de (A, B) tel que pour tout (C, D) de $\mathscr{W}$, C appartient à $\mathscr{W}_1$ et PD appartient à $\mathscr{W}_2$, en remarquant

$$\|PD-Q_0 B\| \leqq K\|(A, B)-(C, D)\|.$$

En prenant $D'=PD$ il vient :

$$\|Z-Y\| \leqq KK_2\|(A, B)-(C, D)\|.$$

Comme $n=2$, toutes les décompositions sont de la forme ΔQ, $Z\Sigma$, et les inégalités de 3.2 s'appliquent avec ΔQB, $\Delta\mathscr{W}_2$, K_2 : pour tout (C, D) de $\mathscr{W}$ il existe P et Y tels que

$$\|(P, Y)-(Q, Z)\| \leqq \max(K_1, KK_2)\|(A, B)-(C, D)\|.$$

2° A n'appartient pas à E_1 et B appartient à E_1^* : pour toute matrice Q, QA appartient à $\mathscr{T}$ en particulier pour $Q=P$ où P est tel que PC appartienne à $\mathscr{T}$, PB appartient à E_1^* on applique 3.2 à la matrice PB.

3° A n'appartient pas à E_1 et B n'appartient pas à E_1^* : on peut prendre, comme dans 2°, $Q=P$ déterminé par C. Soit PB appartient à E_1^* et c'est le cas (2), soit PB n'appartient pas à E_1^*, alors pour toute matrice Y, PBY appartient à $\mathscr{T}$, en particulier, pour Y telle que PDY appartienne à $\mathscr{T}$.

4° A appartient à E_1 et B n'appartient pas à E_1^* : on applique 3.1, si QB appartient à E_1^* on est ramené au cas 1°, sinon pour tout Z, QBZ appartient à $\mathscr{T}$, en particulier pour $Z=Y$ tel que PDY appartient à $\mathscr{T}$.

Le lemme est donc vérifié pour $n=2$.

On suppose le lemme vérifié jusqu'à l'ordre n, et soit (A, B) un couple d'ordre $n+1$ vérifiant les hypothèses du lemme.

Le procédé de construction décrit dans [3] permet d'écrire les facteurs unitaires de la décomposition (QZ) de (A, B) de la façon suivante :

$$Q=(Q)_n Q_1,$$
$$Z=Z_1 (Z)_n,$$

où Q_1 (resp. Z_1) est une matrice de Givens annulant l'élément (2,1) de A (resp. QB).

Q_1 (resp. Z_1) est déterminée par la sous-matrice 2×2 dans le coin supérieur gauche de A (resp. $Q_1 B$).

$(Q)_n$ [resp. $(Z)_n$] est une matrice unitaire rendant $Q_1 A$ triangulaire supérieure [resp. $(Q)_n Q_1 BZ_1$].

Ces deux matrices sont respectivement déterminées par les sous-matrices d'ordre n situées dans le coin inférieur droit des matrices $Q_1 A$ et $Q_1 BZ_1$.

Ces deux cas vérifient le lemme et les inégalités de normes présentées en début de paragraphe achèvent la démonstration.

Revenons maintenant à (A, B) de ξ_{pq} vérifiant les hypothèses du théorème 3.1.

Le lemme nous permet d'utiliser un voisinage ω de (A, B) de $\mathscr{H}\times\mathscr{T}$ et une constante K tels que pour tout (C, D) de ce voisinage, il existe des décompositions de (A, B) et (C, D) telles que

$$\|(Q^*, Z)-(P^*, Y)\| \leqq K\|(A, B)-(C, D)\|.$$

Mais d'après 2.2 toutes les transformées (QZ) de (A, B) sont congrues modulo $\mathscr{R}_{p'q'}$, ce qui veut aussi dire que les colonnes entre $p'+1$ et $n-q'$ de Q^* et Z sont définies à une diagonale unitaire multiplicative près.

Et si l'on partitionne

$$Q=\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Q_1\in\mathbb{C}_{p'n},\quad Q_2\in\mathbb{C}_{n-p'-q'n},\quad Q_2\in\mathbb{C}_{q'n},$$

$$Z=(Z_1, Z_2, Z_3) \qquad \text{avec} \quad Z_1\in\mathbb{C}_{np'},\quad Z_2\in\mathbb{C}_{n,n-p'-q'},\quad Z_3\in\mathbb{C}_{nq'}$$

et si l'on considère des partitionnements analogues pour P et Y respectivement, alors nous pouvons écrire : pour tout (C, D) de $\mathscr{H}\mathscr{T} \cap \mathscr{W}$ et toute factorisation QZ de (A, B), il existe une factorisation (QZ) de (C, D) avec les facteurs P, Y tels que

$$\|P_2 - Q_2\| \leqq K \|(A, B)-(C, D)\|,$$
$$\|Z_2 - Y_2\| \leqq K \|(A, B)-(C, D)\|,$$

grâce au théorème des matrices presque unitaires de [1], on peut établir que les matrices PQ^* et $Z^* Y$ sont voisines de matrices unitaires de $\mathscr{U}_{p'q^\circ}$, on pose $\varepsilon = \|(A, B)-(C, D)\|$ et l'on indique brièvement la démonstration par $Z^* Y$.

Avec les partitionnements précédents, on peut écrire :

$$Z^* Y = \begin{pmatrix} Z_1^* Y_1 & Z_1^* Y_2 & Z_1^* Y_3 \\ Z_2^* Y_1 & Z_2^* Y_2 & Z_2^* Y_3 \\ Z_3^* Y_1 & Z_3^* Y_2 & Z_3^* Y_3^* \end{pmatrix},$$

il est immédiat que

$$\|I - Z_2^* Y_2\| \leqq K\sqrt{n-q'-p'}\,\varepsilon,$$
$$\|Z_1^* Y_2\| = \|Z_2^* Y_1\| = \|Z_1^*(Y_2 - Z_2)\| \leqq K\sqrt{p'}\,\varepsilon,$$
$$\|Z_3 Y_2^*\| = \|Z_2 Y_3^*\| = \|Z_3(Y_2^* - Z_2^*)\| \leqq K\sqrt{q'}\,\varepsilon,$$

d'autre part Y et Z sont Hessenberg supérieure et $p'+q' < n$, alors :

$$Z_3^* Y_1 = Z_1^* Y_3 = 0.$$

En écrivant que $Z^* Y$ est unitaire et en utilisant les inégalités précédentes, il vient :

$$\|I - (Z_i^* Y_i)(Z_i^* Y_i)^*\| \leqq K\varepsilon \qquad \text{pour} \quad i = 1,3$$

et d'après le théorème sur les matrices presque unitaires, si ε est suffisamment petit, il existe des matrices unitaires Σ_1 et Σ_2 respectivement d'ordre $n_1 = p'$, $n_2 = q'$ telles que

$$\|Z_i^* Y_i - \Sigma_i\| \leqq \sqrt{n_i(n_{i+1})}\,K\varepsilon.$$

Pour exprimer les conséquences de ce théorème dans l'espace quotient $\mathscr{H} \times \mathscr{T} / \mathscr{R}_{pq}$, nous introduisons une distance équivalente à la distance de la topologie quotient en écrivant :

$$\inf_{pq}(A, B, C, D) = \inf \|(\Delta A \Sigma, \Delta B \Sigma) - (C, D)\|,$$
$$(\Delta, \Sigma) \in \mathscr{U}_{pq} \times \mathscr{U}_{pq} \qquad \text{tel que} \quad (\Delta A \Sigma, \Delta B \Sigma) \in \mathscr{H} \times \mathscr{T},$$

et la classe d'équivalence d'un élément (A, B) de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ par $\mathscr{R}_{pq}$:

$$(A, B)_{pq},$$

$$\|(A, B)_{pq}-(C, D)_{pq}\|_{pq} = \min [\inf_{pq}(A, B, C, D), \inf_{pq}(C, D, A, B)].$$

On peut énoncer :

COROLLAIRE 3.1 : *Soit (A, B) de ξ_{pq} avec $(\tilde{A}, \tilde{B})$ de $\xi_{p'q'}$, il existe un voisinage $\mathscr{W}$ de $(A, B)_{pq}$ dans $\mathscr{H} \times \mathscr{T} / \mathscr{R}_{pq}$ et une constante K tels que pour tout $(C, D)_{pq}$ de ce voisinage on ait*

$$\|(\tilde{A}, \tilde{B})_{p'q'}-(\tilde{C}, \tilde{D})_{p'q'}\|_{p'q'} \leqq K \|(A, B)_{pq}-(C, D)\|_{pq}.$$

Démonstration : On peut écrire, pour toute matrice Δ, Σ de $\mathscr{U}_{p'q'}$:

$$\Delta\tilde{C}\Sigma-\tilde{A} = \Delta\tilde{C}(\Sigma-Y^*Z)+\Delta P(C-A)Z+(\Delta P-Q)AZ,$$

d'où :

$$\|\Delta\tilde{C}\Sigma-\tilde{A}\| \leqq \|C\|.\|\Sigma-Y^*Z\|+\|C-A\|+\|\Delta-QP^*\|.\|A\|.$$

Ces inégalités peuvent aussi être vérifiées par $\Delta\tilde{D}\Sigma-\tilde{B}$, $\Delta\tilde{A}\Sigma-\tilde{C}$, $\Delta\tilde{B}\Sigma-\tilde{D}$ et dans $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ nous avons

$$\|(\Delta\tilde{C}\Sigma, \Delta\tilde{D}\Sigma)-(\tilde{A}, \tilde{B})\| \leqq \|(C, D)\|.\|\Sigma-Y^*Z\| + \|(C-A, D-B)\|+\|\Delta-QP^*\|.\|(A, B)\|,$$

pour tout couple de matrices (Δ, Σ) de $\mathscr{U}_{p'q'} \times \mathscr{U}_{p'q'}$, en particulier le théorème 3.1 fournit un voisinage de (A, B), une constante K tels que pour tout (C, D) de ce voisinage, il existe un couple de $\mathscr{U}_{p'q'} \times \mathscr{U}_{p'q'}$, (Δ, Σ) vérifiant :

$$\|(\Delta-QP^*, \Sigma-Y^*Z)\| \leqq K \|(A-C, B-D)\|.$$

La définition des distances dans les espaces $\mathscr{H} \times \mathscr{T} / \mathscr{R}_{pq}$ rend alors immédiat le résultat :

$$\|(\tilde{C}, \tilde{D})_{p'q'}-(\tilde{A}, \tilde{B})_{p'q'}\|_{p'q'} \leqq K' \|(A, B)_{pq}-(C, D)_{pq}\|_{pq},$$

dans un voisinage de $(A, B)_{pq}$ dans $\mathscr{H} \times \mathscr{T} / \mathscr{R}_{pq}$, et K' ne dépend que de (A, B).

4. STABILITÉ DE L'ALGORITHME QZ

Dans la référence [3], il a été établi que l'algorithme QZ, *introduit dans le premier paragraphe, construit à l'aide d'une décomposition particulière de chaque itéré, éliminait les singularités de A* et B lorsque A est non réduite et le premier terme diagonal de B non nul. En particulier lorsque det $(\beta A-\alpha B)$ n'est pas identiquement nul, mais admet une racine de la forme (0, 1) avec la multiplicité p et une racine de la forme (1, 0) avec la multiplicité q définies à partir de la forme de Kronecker [4] de (A, B), on peut énoncer les propriétés suivantes :

PROPOSITION 4.1. *Il existe un indice* s_0 *tel que*

1° *pour* $s < s_0$, (A_s, B_s) *appartient à* $\xi_{p_s q_s}$ *pour* $1 < p_s < p$ *et* $0 \leqq q_s \leqq q$, *tous les itérés appartiennent à la même classe d'équivalence définie par* $\mathscr{R}_{p_s q_s}$, (A_{s+1}, B_{s+1}) *appartient à* $\xi_{p_{s+1} q_{s+1}}$ *avec* $p_s \leqq p_{s+1} \leqq p$ *et* $q_s \leqq q_{s+1} \leqq q$,

2° *pour tout* $s \geqq s_0$, $(A_s B_s)$ *appartient à* ξ_{pq} *et pour un s donné, tous les itérés appartiennent à la même classe d'équivalence définie par* $\mathscr{R}_{pq}$.

PROPRIÉTÉ 4.2. *Avec les hypothèses précédentes, il existe un voisinage* $\mathscr{W}$ *de* (A, B) *dans* $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ *et une constante C tels que pour tout couple* (C, D) *de* $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$ *dans ce voisinage on ait*

$$\left\| (A_s, B_s)_{pq} - (C_s, D_s)_{pq} \right\|_{pq} \leqq C^s \left\| (A, B) - (C, D) \right\|$$

Cette dernière propriété est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\left\| (A_s, B_s)_{pq} - (C_s, D_s)_{pq} \right\|_{pq} \leqq \left\| (A_s, B_s)_{p_s q_s} - (C_s, D_s)_{p_s q_s} \right\|_{p_s q_s}$$

et du corollaire 3.1.

Ces deux dernières propositions permettent de conclure à l'élimination mathématiquement stable des singularités du problème généralisé pour une classe d'éléments de $\mathscr{H} \times \mathscr{T}$, après un nombre fini d'étapes, l'algorithme QZ avec translation décrit dans [5], possède des propriétés de convergence et de stabilité équivalentes aux propriétés de l'algorithme QR.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. LEBAUD, *Contribution à l'étude de l'algorithme QR*, Thèse, Université de Rennes, 1971.
2. C. LEBAUD, *Sur la définition de la convergence de l'algorithme QR : théorème de convergence et de stabilité*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, 14ᵉ session, Université de Montréal, 1975.
3. J.-P. BERLIOZ, *A propos de l'algorithme QZ*, R.A.I.R.O., Analyse numérique, vol. 13, n° 1, 1979, p. 21-30.
4. F. R. GANTMACHER, *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, 1959.
5. C. MOLER et C. W. STEWART, *An Algorithm for Generalized Matrice Eigenvalue Problems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., vol. 10, 1973, p. 241-256.
6. C. W. STEWART, *Perturbation Bounds for the QR Factorization of a Matrice*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., vol. 14, 1977, p. 509-518.
7. J. H. WILKINSON, *Some Recent Advances in Numerical Linear Algebra*, The State of the Art on Numerical Analysis, Academic Press, 1977, p. 3-51.
8. J. H. WILKINSON, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, 1965.