

E. GODLEWSKI

A. PUECH-RAOULT

**Équations d'évolution linéaires du second
ordre et méthodes multipas**

RAIRO. Analyse numérique, tome 13, n° 4 (1979), p. 329-353

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1979__13_4_329_0

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION LINÉAIRES DU SECOND ORDRE ET MÉTHODES MULTIPAS (*)

par E. GODLEWSKI et A. PUECH-RAOULT ⁽¹⁾

Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — On propose un schéma d'approximation en espace et en temps de l'équation d'évolution $u'' + Bu' + Au = f$, utilisant une méthode linéaire multipas pour la discrétisation en temps; on donne, sous l'hypothèse $B = \alpha A + \beta I$ des majorations d'erreur, et l'on fait une étude détaillée des méthodes à 2 et 3 pas.

Abstract. — A fully discrete scheme in space and in time for the second order evolution equation $u'' + Bu' + Au = f$ is proposed; the time discretization is achieved by means of a linear multistep method. Under the hypothesis $B = \alpha A + \beta I$, some error bounds are given. In addition, 2-steps and 3-steps methods are analysed.

INTRODUCTION

On cherche à résoudre numériquement l'équation d'évolution du deuxième ordre $u'' + Bu' + Au = f$, où A et B sont des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert H . Une première méthode d'approximation consiste à écrire l'équation sous forme d'un système du premier ordre et à utiliser les résultats de [1] et [9] sur l'approximation des équations d'évolution linéaires par une méthode linéaire à pas multiples; nous présentons ici une méthode de discrétisation directe, adaptée aux équations du deuxième ordre et dont la précédente est un cas particulier.

Des schémas multipas de discrétisation directe d'équations différentielles ordinaires du deuxième ordre ont été introduits par Henrici [7], pour les équations ne contenant pas de terme du premier ordre, et par Geradin [5] pour l'équation de la dynamique des structures; nous étendons ici le schéma proposé par Geradin au cas des équations en dimension infinie, en le complétant par une discrétisation en espace.

(*) Reçu novembre 1978.

(1) Analyse numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.

Dans notre recherche d'une majoration de l'erreur, nous suivons l'approche utilisée par Crouzeix et Raviart [1, 9] pour l'étude des problèmes paraboliques, et sommes donc amenés à étendre la notion de domaine de stabilité; la définition que nous en donnons fait maintenant intervenir les racines d'un polynôme dépendant de deux paramètres. Les résultats de majoration d'erreur, que nous obtenons sous l'hypothèse de « damping orthogonal » $B = \alpha A + \beta I$, précisent et généralisent ceux de Gekeler [4], relatifs à l'équation $u'' + Au = f$. Notons que l'hypothèse de « damping orthogonal » est une condition couramment imposée en pratique (Geradin [5], Jensen [8]); voir aussi à ce sujet [3].

Le plan de l'article est le suivant : nous décrivons la méthode (ρ, σ, τ) de discrétisation et définissons son domaine de stabilité dans le paragraphe 1, et introduisons la condition de « damping orthogonal » au paragraphe 2. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude du comportement des racines du polynôme dépendant de deux paramètres $\rho + z\sigma + z'\tau$; dans le paragraphe 4, nous donnons les résultats de majoration d'erreur. Enfin, au paragraphe 5, nous étudions les méthodes à 2 et 3 pas : nous complétons les résultats obtenus dans [5], sur l'ordre de ces méthodes, par la donnée explicite de leur domaine.

1. SCHÉMA DE DISCRÉTISATION

1.1. Préliminaires

Soient V et H deux espaces de Hilbert, tels que $V \subset H$ avec injection compacte, et V dense dans H . On note (\cdot, \cdot) le produit scalaire de H , $|\cdot|$ la norme correspondante, et $\|\cdot\|$ la norme de V .

On se donne deux formes bilinéaires continues sur $V \times V$, $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$; a est supposée symétrique et V -elliptique [i. e. il existe une constante $\mu_0 > 0$ telle que : $\forall v \in V, a(v, v) \geq \mu_0 \|v\|^2$], et b positive. Soient A et B les opérateurs de $\mathcal{L}(V, V')$ définis par

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, \quad \langle Au, v \rangle_{V', V} &= a(u, v), \\ \langle Bu, v \rangle_{V', V} &= b(u, v). \end{aligned}$$

On suppose que le domaine de B , considéré comme opérateur non borné dans H , est dense.

Alors, étant donnés $f \in C^1([0, T]; H)$ et $u_0, u_1 \in V$ vérifiant $Au_0 + Bu_1 \in H$, on considère l'équation différentielle

$$\left. \begin{aligned} u''(t) + Bu'(t) + Au(t) &= f(t), \\ t \in]0, T[\text{munie des conditions initiales} \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

La théorie des semi-groupes permet de montrer que le problème (1.1) admet une solution unique $u \in C^1([0, T]; V) \cap C^2([0, T]; H)$.

1.2. Schéma de discrétisation

Soit V_h un sous-espace vectoriel de dimension finie de V , et P_h l'opérateur de V' dans V_h défini par :

$$\forall f \in V', \quad \forall v_h \in V_h, \quad (P_h f, v_h) = \langle f, v_h \rangle_{V', V}.$$

On définit les opérateurs A_h et B_h de V_h par $A_h = P_h A|_{V_h}$ et $B_h = P_h B|_{V_h}$, et on pose

$$|A_h|_h = \sup_{\substack{u_h \in V_h \\ u_h \neq 0}} \frac{|A_h u_h|}{|u_h|}. \tag{1.2}$$

On se donne un pas de temps $\Delta t > 0$, et trois polynômes ρ, σ, τ de degré $\leq q$, à coefficients réels, premiers entre eux dans leur ensemble

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= \sum_{i=0}^q \alpha_i \zeta^i \quad \text{avec } \alpha_q > 0, \\ \sigma(\zeta) &= \sum_{i=0}^q \beta_i \zeta^i, \quad \tau(\zeta) = \sum_{i=0}^q \gamma_i \zeta^i. \end{aligned}$$

On définit alors une approximation $u_h^n \in V_h$ de $u(t_n)$ au temps $t_n = n\Delta t$ ($n \in \mathbb{N}, n \leq T/\Delta t$) par le schéma (ρ, σ, τ) suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=0}^q \alpha_i u_h^{n+i} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^q \gamma_i B_h u_h^{n+i} + \sum_{i=0}^q \beta_i A_h u_h^{n+i} &= \sum_{i=0}^q \beta_i P_h f(t_{n+i}), \\ u_h^0, \dots, u_h^{q-1} &\text{ donnés dans } V_h. \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

REMARQUE 1.1 : On montre facilement que, s'il existe deux polynômes r et s tels que $\rho = r^2, \sigma = s^2, \tau = rs$, cette méthode correspond en fait à discrétiser l'équation (1.1) sous forme d'un système du premier ordre par la méthode (r, s) à $q/2$ pas.

LEMME 1.1 : Sous l'une des deux hypothèses suivantes :

- (H₀) il existe deux réels > 0 r et r' , avec $|\beta_q|r + |\gamma_q|r' < \alpha_q$, tels que $\Delta t^2 |A_h|_h \leq r$ et $\Delta t |B_h|_h \leq r'$;
- (H'₀) $\alpha_q > 0, \beta_q \geq 0, \gamma_q \geq 0$;

le schéma (1.2) définit de façon unique une suite (u_h^n) dans V_h .

Démonstration : La forme bilinéaire sur $V_h \times V_h$, qui à (u_h, v_h) associe $\alpha_q(u_h, v_h) + \Delta t \gamma_q b(u_h, v_h) + \Delta t^2 \beta_q a(u_h, v_h)$, est V_h -elliptique dans les deux cas. L'opérateur de V_h $\alpha_q I + \Delta t \gamma_q B_h + \Delta t^2 \beta_q A_h$ est donc inversible; dans les deux cas, son inverse est d'ailleurs borné (pour la norme $|\cdot|_h$) par une constante indépendante de Δt et h .

1.3. Domaine de stabilité

Considérons l'équation différentielle ordinaire $y'' + by' + \omega^2 y = 0$; le schéma (1.3) appliqué à cette équation s'écrit :

$$\sum_{i=0}^q (\alpha_i + \beta_i z + \gamma_i z') y^{n+i} = 0,$$

où l'on a posé

$$z = \omega^2 \Delta t, \quad z' = b \Delta t.$$

La théorie classique des équations aux différences linéaires nous conduit alors à étendre de manière naturelle les notions de domaine de stabilité, couramment utilisées pour les problèmes paraboliques, aux méthodes (ρ, σ, τ) . Nous définissons le domaine de stabilité $D(\rho, \sigma, \tau)$ de la méthode (ρ, σ, τ) comme l'ensemble des $(z, z') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ tels que les racines du polynôme $\rho + z\sigma + z'\tau$ soient de module inférieur ou égal à 1, les racines de module 1 étant simples.

On remarque que $D(\rho, \sigma, \tau) \cap (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$ correspond au cas $B=0$; nous supposons donc que la méthode (ρ, σ) est convergente en tant que méthode multipas adaptée aux équations du deuxième ordre (Henrici [7]), c'est-à-dire que nous ferons l'hypothèse suivante :

(H₁) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ est racine double de } \rho, \text{ et } \rho''(1)/2 = \sigma(1) \text{ (condition de consistance);} \\ \text{les racines de } \rho \text{ sont de module inférieur ou égal à 1, les racines de} \\ \text{module 1 étant au plus doubles (condition de stabilité).} \end{array} \right.$

Nous supposons également que la méthode (τ, σ) est convergente en tant que méthode multipas adaptée aux équations du premier ordre, ce qui se traduit par :

(H₂) $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ est racine simple de } \tau \text{ et } \tau'(1) = \sigma(1); \\ \text{les racines de } \tau \text{ sont de module inférieur ou égal à 1, les racines de} \\ \text{module 1 étant simples.} \end{array} \right.$

Notons que, sous les hypothèses (H₁) et (H₂), les polynômes ρ et τ ont tous les deux 1 pour racine, et que la méthode $(\rho/(\zeta-1), \tau/(\zeta-1))$ est également convergente.

Nous allons maintenant faire une hypothèse sur la stabilité de la méthode. D'après (H_1) , le point $(0, 0)$ ne peut appartenir au domaine de stabilité puisque 1 est racine double de ρ . Mais nous supposons que le domaine $D(\rho, \sigma, \tau)$ contient un pavé $[0, r] \times [0, r']$ privé de l'origine, c'est-à-dire :

$$(H_3) \quad \exists r > 0, \quad \exists r' > 0, \quad D(\rho, \sigma, \tau) \supset [0, r] \times [0, r'] \setminus \{(0, 0)\}.$$

REMARQUE 1.2 : Parmi les méthodes vérifiant l'hypothèse (H_3) se trouvent certaines méthodes (r^2, s^2, rs) (cf. rem. 1.1) provenant de la discrétisation de l'équation (1.1) sous forme de système; en effet lorsque la méthode (r, s) est convergente et A -stable [9], on montre facilement que la méthode correspondante (r^2, s^2, rs) a pour domaine de stabilité $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(0, 0)\}$ et que (H_1) et (H_2) sont également vérifiées.

1.4. Formule de représentation de l'erreur

On cherche à majorer l'erreur au temps t_n , soit $u(t_n) - u_h^n$; pour cela on commence par introduire l'opérateur $\Pi_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ défini par

$$\left. \begin{aligned} \Pi_h &= A_h^{-1} P_h A, \\ e_h^n &= \Pi_h u(t_n) - u_h^n. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

et poser

Si on définit l'erreur de consistance ε_h^n par

$$\varepsilon_h^n = \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=0}^q (\alpha_i I + \gamma_i \Delta t B_h + \beta_i \Delta t^2 A_h) \Pi_h u(t_{n+i}) - \sum_{i=0}^q \beta_i P_h f(t_{n+i}), \quad (1.5)$$

on obtient :

$$\sum_{i=0}^q (\alpha_i I + \gamma_i \Delta t B_h + \beta_i \Delta t^2 A_h) e_h^{n+i} = \Delta t^2 \varepsilon_h^n.$$

On introduit alors les notations suivantes :

$$\bar{\omega}(\cdot, z, z') = \rho(\cdot) + z\sigma(\cdot) + z'\tau(\cdot), \quad (z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (1.6)$$

$$\delta_i(z, z') = \frac{\alpha_i + z\beta_i + z'\gamma_i}{\alpha_q + z\beta_q + z'\gamma_q}, \quad 0 \leq i \leq q, \quad (1.7)$$

$$\hat{\omega}(\zeta, z, z') = \sum_{i=0}^q \delta_i(z, z') \zeta^{q-i}. \quad (1.8)$$

Si (z, z') est dans le domaine de stabilité, la fraction rationnelle $1/\hat{\omega}(\cdot, z, z')$ est alors développable en série entière dans le disque unité ouvert; soient $\Gamma_i(z, z')$ les

coefficients du développement en série

$$\frac{1}{\hat{\omega}(\zeta, z, z')} = \sum_{l=0}^{\infty} \Gamma_l(z, z') \zeta^l, \quad |\zeta| < 1, \quad (z, z') \in D(\rho, \sigma, \tau). \quad (1.9)$$

Des formules (1.7), (1.8) et (1.9), on déduit les relations

$$\left. \begin{aligned} \delta_q(z, z') \Gamma_l(z, z') + \delta_{q-1}(z, z') \Gamma_{l-1}(z, z') + \dots \\ + \delta_0(z, z') \Gamma_{l-q}(z, z') = 0, \quad l > 0, \\ \delta_q(z, z') = \Gamma_0(z, z') = 1 \quad (\text{avec la convention } \Gamma_l = 0 \text{ si } l < 0). \end{aligned} \right\} (1.10)$$

Sous l'hypothèse (H₀) ou (H'₀), l'opérateur $\alpha_q I + \gamma_q \Delta t B_h + \beta_q \Delta t^2 A_h$ est inversible; posons

$$\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) = (\alpha_q I + \gamma_q \Delta t B_h + \beta_q \Delta t^2 A_h)^{-1} (\alpha_i I + \gamma_i \Delta t B_h + \beta_i \Delta t^2 A_h), \\ 1 \leq i \leq q.$$

Les formules (1.10) permettent de définir les opérateurs $\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$ par récurrence.

On obtient alors l'expression suivante pour e_h^m :

$$e_h^m = - \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{i=0}^k \Gamma_{m-q-i}(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) \delta_{k-i}(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) e_h^k \\ + \Delta t^2 \sum_{l=0}^{m-q} \Gamma_{m-q-l}(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) (\alpha_q I + \beta_q \Delta t^2 A_h + \gamma_q \Delta t B_h)^{-1} \varepsilon_h^l. \quad (1.11)$$

Pour majorer $|e_h^m|$, il faut estimer les normes des opérateurs $\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$ et $\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$. Pour ces derniers, nous ferons au paragraphe 3 l'hypothèse que A_h et B_h commutent, le problème revenant alors à une majoration de la fraction rationnelle $\Gamma_l(z, z')$; nous allons voir maintenant la signification de cette hypothèse.

2. CONDITION DE « DAMPING ORTHOGONAL »

Nous étudions dans ce paragraphe la condition, essentielle au paragraphe 3, de commutativité des opérateurs A_h et B_h , afin d'en donner par le théorème 2.1 une interprétation ne portant que sur A et B .

THÉORÈME 2.1 : *Sous les hypothèses du paragraphe 1.1 et si la forme bilinéaire b est symétrique, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout sous-espace vectoriel V_h de dimension finie de V , les opérateurs A_h et B_h commutent;*

(ii) $B = \alpha A + \beta I$.

Démonstration : Il est clair que (ii) implique (i). L'implication réciproque repose essentiellement sur l'existence, sous la condition (i), d'une base (e_i) de H , telle que :

$$\forall (i, j), \quad (e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad a(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad b(e_i, e_j) = \mu_i \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

que l'on obtient de la manière suivante.

On remarque tout d'abord qu'en appliquant l'hypothèse (i) à un sous-espace de dimension 2 engendré par deux éléments u et v , on a

$$\begin{aligned} ((u, v) = 0, \quad |u| = 1, \quad |v| = 1, \quad a(u, v) = 0, \quad a(u, u) \neq a(v, v)) \\ \Rightarrow \quad b(u, v) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Soit maintenant G l'opérateur de V dans V défini par $G = A^{-1}|_V$; G est un opérateur compact de V , symétrique pour $a(\cdot, \cdot)$; V peut donc s'écrire comme la somme directe hilbertienne de la suite des sous-espaces propres E_i de G .

On définit B_i opérateur de E_i par : $\forall u, v \in E_i, (B_i u, v) = b(u, v)$. B_i est un opérateur symétrique de E_i ; il existe donc une base $(f_1^i, \dots, f_{N_i}^i)$ de E_i telle que :

$$\forall (j, k), \quad (f_j^i, f_k^i) = \delta_{jk}, \quad b(f_j^i, f_k^i) = \mu_j^i \delta_{jk}.$$

Enfin, on considère la famille $(f_1^i, \dots, f_{N_i}^i)_i$:

- l'orthogonalité pour le produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$ des sous-espaces E_i permet de montrer que c'est une base orthonormée de H , orthogonale pour $a(\cdot, \cdot)$;
- on déduit de (2.2) que c'est une famille orthogonale pour $b(\cdot, \cdot)$.

On a ainsi construit une base satisfaisant à (2.1).

Pour conclure, il suffit maintenant de vérifier que les valeurs propres apparaissant dans (2.1) sont liées; de (2.2) appliqué sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \forall (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \\ u_1 v_1 = -(u_2 v_2 + u_3 v_3) \\ \forall (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \\ (\lambda_1 - \lambda_2) u_2 v_2 + (\lambda_1 - \lambda_3) u_3 v_3 = 0 \\ \frac{\sum \lambda_i u_i^2}{\sum u_i^2} \neq \frac{\sum \lambda_i v_i^2}{\sum v_i^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mu_2 - \mu_1) u_2 v_2 + (\mu_3 - \mu_1) u_3 v_3 = 0,$$

on déduit que pour tout triplet (i, j, k) tel que $\lambda_i \neq \lambda_j, \lambda_j \neq \lambda_k, \lambda_k \neq \lambda_i$, on a

$$\frac{\mu_k - \mu_i}{\lambda_k - \lambda_i} = \frac{\mu_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i},$$

ce qui donne immédiatement l'existence de deux constantes α et β telles que, pour tout i , $\mu_i = \alpha\lambda_i + \beta$.

REMARQUE 2.1 : La condition (ii) du théorème 2.1, $B = \alpha A + \beta I$, qui apparaît comme une condition très restrictive, n'est autre que l'hypothèse « d'amortissement orthogonal » couramment utilisée (Gérardin [5], Jensen [8]).

On pourra constater dans la suite que si l'espace V est de dimension finie, c'est-à-dire si l'on intègre un système différentiel ordinaire, cette condition d'orthogonalité devient inutile; il suffit dans ce cas de supposer que A et B , opérateurs de V , commutent.

NOTATION : La condition d'amortissement orthogonal sera désormais notée

$$(H_4) \quad B = \alpha A + \beta I.$$

Pour un sous-espace V_h , la condition de commutativité de A_h et B_h sera notée

$$(H_h) \quad A_h B_h = B_h A_h.$$

Si le sous-espace V_h de dimension $N(h)$ vérifie (H_h) , A_h et B_h sont diagonalisables dans une même base $(e_i)_{i=1}^{N(h)}$ orthonormée de V_h ; on désignera les valeurs propres de A_h par $\omega_{i,h}^2$, $i=1, \dots, N(h)$ avec $0 < \omega_{1,h}^2 \leq \omega_{2,h}^2 \leq \dots \leq \omega_{N(h),h}^2$, $A_h e_i = \omega_{i,h}^2 e_i$; celles de B_h par $b_{i,h}$, $i=1, \dots, N(h)$, avec $B_h e_i = b_{i,h} e_i$.

3. MAJORATION DES NORMES DES OPÉRATEURS $\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$ ET $\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$.

Nous nous donnons dans ce paragraphe 3 un sous-espace V_h vérifiant l'hypothèse (H_h) .

Par les lemmes qui suivent nous ramenons l'étude de l'opérateur $\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$ à celle de la fraction rationnelle $\Gamma_l(z, z')$ et donnons une estimation directe de $|\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h$.

LEMME 3.1 : Pour tout l , on a

$$|\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq \max_{i \in \{1, \dots, N(h)\}} |\Gamma_l(\Delta t^2 \omega_{i,h}^2, \Delta t b_{i,h})|.$$

Si la condition de stabilité $\Delta t^2 |A_h|_h \leq r$, $\Delta t |B_h|_h \leq r'$ est satisfaite, on a pour tout l :

$$|\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq \sup_{[0, r] \times [0, r']} |\Gamma_l(z, z')|.$$

Démonstration : Pour tout $i \in \{1 \dots N(h)\}$, on a

$$\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) e_i = \Gamma_l(\Delta t^2 \omega_{i,h}^2, \Delta t b_{i,h}) e_i,$$

et pour tout $v_h = \sum v^i e_i$,

$$\begin{aligned} |\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h) v_h|^2 &= \sum (v^i \Gamma_l(\Delta t^2 \omega_{i,h}^2, \Delta t b_{i,h}))^2 \\ &\leq |v_h|^2 \max_i (\Gamma_l(\Delta t^2 \omega_{i,h}^2, \Delta t b_{i,h}))^2 \end{aligned}$$

De la même manière, on a le :

LEMME 3.2 : Si $\alpha_q > 0, \beta_q > 0, \gamma_q > 0$, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, q-1\}, \quad |\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq \frac{|\alpha_i|}{\alpha_q} + \frac{|\beta_i|}{\beta_q} + \frac{|\gamma_i|}{\gamma_q}.$$

Si la condition de stabilité (H_0) est satisfaite, on a

$$\forall i \in \{0, \dots, q-1\}, \quad |\delta_i(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq \frac{|\alpha_i| + |\beta_i| r + |\gamma_i| r'}{\alpha_q - |\beta_q| r - |\gamma_q| r'}.$$

3.1. Décomposition et majoration de $\Gamma_l(z, z')$

Le lemme 3.1 nous conduit à rechercher maintenant une majoration de $\Gamma_l(z, z')$ sur une partie du plan; on peut adapter de façon immédiate les techniques classiques pour des méthodes (ρ, σ) appliquées à des équations paraboliques ([1, 9]) afin d'obtenir le résultat suivant :

LEMME 3.3 : Pour toute partie fermée \mathcal{D} de $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ contenue dans le domaine de stabilité, il existe une constante C telle que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall (z, z') \in \mathcal{D}, \quad |\Gamma_l(z, z')| \leq l.$$

Le point $(0, 0)$ n'appartenant pas au domaine de stabilité, le lemme 3.3 ne peut fournir une majoration sur une partie du type $[0, r] \times [0, r']$, mais seulement sur $[0, r] \times [0, r'] \setminus [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon]$. Afin d'en faire une étude au voisinage de $(0, 0)$, nous exprimons donc les $\Gamma_l(z, z')$ au moyen d'une décomposition en éléments simples de $1/\hat{\omega}(\zeta, z, z')$.

Nous désignerons par $\zeta_i(z, z'), i = 1, \dots, q$, les racines de $\bar{\omega}(\cdot, z, z')$; notons qu'au voisinage d'un point, on peut les numéroter de telle sorte que les applications ζ_i soient continues. Nous utiliserons les notations suivantes :

$\zeta_1(0, 0) = \zeta_2(0, 0), \dots, \zeta_{2d-1}(0, 0) = \zeta_{2d}(0, 0)$: racines doubles de module 1 de ρ ;

$\zeta_{2d+1}(0, 0), \dots, \zeta_{2d+r}(0, 0) r \geq 0$: racines simples de module 1 de ρ ;

$\zeta_{2d+r+1}(0, 0), \dots, \zeta_{2d+r+s}(0, 0) s \geq 0$: racines de module < 1 de ρ ;
 et

$$I_1 = \{ 1, \dots, 2d \}, \quad I_2 = \{ 2d+1, \dots, 2d+r \},$$

$$I_3 = \{ 2d+r+1, \dots, 2d+r+s \}.$$

LEMME 3.4 : Pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$, il existe un unique triplet de polynômes en $\zeta, A_1(\zeta, z, z'), A_2(\zeta, z, z'), A_3(\zeta, z, z')$ vérifiant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\prod_{i=1, \dots, q} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))} &= \frac{A_1(\zeta, z, z')}{\prod_{i \in I_1} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))} \\ &+ \frac{A_2(\zeta, z, z')}{\prod_{i \in I_2} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))} + \frac{A_3(\zeta, z, z')}{\prod_{i \in I_3} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))} \end{aligned} \right\} (3.1)$$

$$d^0 A_1 < 2d, \quad d^0 A_2 < r, \quad d^0 A_3 < s.$$

De plus, A_1, A_2, A_3 sont continus en (ζ, z, z') .

Pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$, on a $\Gamma_l(z, z') = (\Gamma_l^1 + \Gamma_l^2 + \Gamma_l^3)(z, z')$, où

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall r, \quad 0 < r < 1, \quad \forall j \in \{ 1, 2, 3 \},$$

$$\Gamma_l^j(z, z') = \frac{1}{2\pi\delta_0(z, z')} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-il\theta}}{r^l} \frac{A_j(re^{i\theta}, z, z')}{\prod_{k \in I_j} (re^{i\theta} - \zeta_k^{-1}(z, z'))} d\theta.$$

Démonstration : D'après la continuité des applications ζ_i , les trois polynômes $\prod_{i \in I_1} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))$, $\prod_{i \in I_2} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))$ et $\prod_{i \in I_3} (\zeta - \zeta_i^{-1}(z, z'))$ sont deux à deux premiers pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$. Il existe donc un unique triplet de polynômes vérifiant (3.1). La continuité s'obtient en écrivant le vecteur de \mathbb{R}^q des coefficients de A_1, A_2, A_3 comme solution d'un système linéaire de matrice ne dépendant que des $\zeta_i(z, z')$ et du second membre constant.

Pour obtenir la deuxième partie du lemme, il suffit d'écrire $\Gamma_l(z, z')$, l -ième coefficient du développement en série de $1/\hat{\omega}(\zeta, z, z')$, au moyen de la formule de Cauchy.

La décomposition de Γ_l , indiquée au lemme 3.4, permet maintenant d'obtenir une majoration uniforme des Γ_l au voisinage de $(0, 0)$.

PROPOSITION 3.1 : Il existe un voisinage V de $(0, 0)$ et une constante positive C , tels que, pour tout $(z, z') \in V, z \geq 0, z' \geq 0$ et pour tout l , on ait

$$|\Gamma_l(z, z')| \leq Cl.$$

Démonstration : Nous majorons successivement $\Gamma_l^3, \Gamma_l^2, \Gamma_l^1$.

(i) *Majoration de $\Gamma_l^3(z, z')$.*

Il existe une constante δ telle que, pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$, on ait

$$\forall j \in I_3, \quad |\zeta_j^{-1}(z, z')| \geq \delta > 1. \quad (3.2)$$

L'application $\zeta \rightarrow A_3(\zeta, z, z') / \prod_{j \in I_3} (\zeta - \zeta_j^{-1}(z, z'))$ est donc holomorphe dans un disque ouvert contenant le disque unité fermé et $\Gamma_l^3(z, z')$, qui a été défini en (3.1), peut encore s'écrire :

$$\Gamma_l^3(z, z') = \frac{1}{2\pi\delta_0(z, z')} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \frac{A_3(e^{i\theta}, z, z')}{\prod_{j \in I_3} (e^{i\theta} - \zeta_j^{-1}(z, z'))} d\theta.$$

On en déduit, en utilisant la continuité de $\delta_0(\cdot, \cdot)$ et de $A_3(\cdot, \cdot, \cdot)$, et (3.2), qu'il existe une constante C et un voisinage V de $(0, 0)$ tels que pour tout $(z, z') \in V$ et pour tout l , $|\Gamma_l^3(z, z')| \leq C$.

(ii) *Majoration de $\Gamma_l^2(z, z')$.*

Les racines $(\zeta_j(0, 0), j \in I_2)$ étant simples, les racines $(\zeta_j(z, z'), j \in I_2)$ sont deux à deux distinctes pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$ et donc

$$\frac{1}{\prod_{j \in I_2} (\zeta - \zeta_j^{-1}(z, z'))} = \sum_{j \in I_2} \frac{s_j(z, z')}{\zeta - \zeta_j^{-1}(z, z')}, \quad s_j(z, z') = \frac{1}{\prod_{k \in I_2 - \{j\}} (\zeta_j^{-1} - \zeta_k^{-1})(z, z')}.$$

et, en notant $a_k^2(z, z')$ $k=0, \dots, r-1$, les coefficients de $A_2(\cdot, z, z')$,

$$\begin{aligned} \Gamma_l^2(z, z') &= \frac{1}{\delta_0(z, z')} \sum_{j \in I_2} \frac{s_j(z, z')}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ii\theta}}{r^l} \frac{A_2(re^{i\theta}, z, z')}{(re^{i\theta} - \zeta_j^{-1}(z, z'))} d\theta \\ &= -\frac{1}{\delta_0(z, z')} \sum_{j \in I_2} s_j(z, z') (a_0^2 \zeta_j^{l+1} + \dots + a_{r-1}^2 \zeta_j^{l-r+2})(z, z'). \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le fait que les applications $s_j(\cdot, \cdot)$ sont bornées au voisinage de $(0, 0)$, que les racines $\zeta_j(z, z')$ sont de module ≤ 1 (hypothèse H_3) et que les coefficients a_k^2 sont continus (lemme 3.4), qu'il existe une constante C et un voisinage V de $(0, 0)$ tels que, pour tout $(z, z') \in V$ et pour tout l , $|\Gamma_l^2(z, z')| \leq C$.

(iii) *Majoration de $\Gamma_l^1(z, z')$.*

Pour (z, z') assez voisin de $(0, 0)$, les d polynômes de degré 2, $(\zeta - \zeta_1^{-1})(\zeta - \zeta_2^{-1})(z, z'), \dots, (\zeta - \zeta_{2d-1}^{-1})(\zeta - \zeta_{2d}^{-1})(z, z')$ sont deux à deux premiers. Il existe donc un unique d -uplet de polynômes $q_i(\zeta, z, z')$ de degré au plus 1 vérifiant :

$$\frac{1}{\prod_{k \in I_1} (\zeta - \zeta_k^{-1}(z, z'))} = \sum_{i=1}^d \frac{q_i(\zeta, z, z')}{(\zeta - \zeta_{2i-1}^{-1})(\zeta - \zeta_{2i}^{-1})(z, z')}.$$

De plus, ces polynômes en ζ sont continus par rapport à (z, z') .

$\Gamma_l^1(z, z')$ peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^1(z, z') &= \frac{1}{\delta_0(z, z')} \sum_{j=1}^d \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-il\theta}}{r^l} \frac{A_1(re^{i\theta}, z, z') q_j(re^{i\theta}, z, z')}{(re^{i\theta} - \zeta_{2j-1}^{-1})(re^{i\theta} - \zeta_{2j}^{-1})(z, z')} d\theta \\ &= \frac{1}{\delta_0(z, z')} \sum_{j=1}^d \sum_{k=0}^{2d} a_{j,k} \left(\sum_{p=1}^{l-k} \zeta_{2j-1}^p \zeta_{2j}^{l+1-k-p} \right) (z, z'), \end{aligned}$$

où $a_{j,0}, \dots, a_{j,2d}$ sont les coefficients de $A_1 q_j$.

On en déduit qu'il existe une constante C et un voisinage V de $(0, 0)$, tels que pour tout $(z, z') \in V$ et pour tout l , $|\Gamma_l^1(z, z')| \leq Cl$.

REMARQUE 3.1 : La démonstration ci-dessus se simplifie considérablement lorsque $B=0$. Dans ce cas, en effet, le polynôme $\bar{\omega}(\cdot, z, z')$ est en fait un polynôme $\bar{\omega}(\cdot, z) = \rho(\cdot) + z\sigma(\cdot)$, et le théorème de l'application ouverte (Rudin [10]) appliqué à $-\rho/\sigma$ montre que les racines de $\bar{\omega}(\cdot, z)$ sont distinctes dans un voisinage de 0 privé de 0. Ce résultat ne se généralise pas au cas où B est non nul, comme le montre l'étude faite en 5.1.

A l'aide des lemmes 3.1, 3.3, et de la proposition 3.1, nous avons maintenant (sous la condition H_h) une première majoration de la norme de l'opérateur :

THÉORÈME 3.1 : *Sous la condition de stabilité $\Delta t^2 |A_h|_h \leq r$, $\Delta t |B_h|_h \leq r'$ on a*

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, \quad |\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq Cl.$$

3.2. Une autre majoration de $\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)$

Nous allons étudier $\Gamma_l(z, z')$ dans le cas particulier où $z = \omega_{i,h}^2 \Delta t^2$, $z' = b_{i,h} \Delta t$ où $\omega_{i,h}^2$ et $b_{i,h}$ sont les valeurs propres de A_h et B_h .

Sous certaines hypothèses, on peut obtenir une majoration indépendante de la longueur T de l'intervalle de temps, alors que le théorème précédent conduit à l'estimation suivante :

$$\exists C > 0, \quad \forall l \leq \frac{T}{\Delta t} \quad |\Gamma_l(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)| \leq \frac{CT}{\Delta t}.$$

La démonstration de la proposition 3.1 montre que le terme $T/\Delta t$ provient des racines essentielles de ρ . Or si 1 est la seule racine de module 1 de ρ , un calcul très simple donne l'expression de Γ_l^1 :

$$\Gamma_l^1 = \frac{\zeta_1^{q+l-1}}{\prod_{k \neq 1} (\zeta_1 - \zeta_k)} + \frac{\zeta_2^{q+l-1}}{\prod_{k \neq 2} (\zeta_2 - \zeta_k)}$$

où ζ_1 et ζ_2 sont les deux racines de $\bar{\omega}$ tendant vers 1, d'où

$$|\Gamma_l^1| \leq \frac{1}{|\zeta_1 - \zeta_2|} \left[\frac{1}{\prod_{\substack{k \neq 1 \\ k \neq 2}} |\zeta_1 - \zeta_k|} + \frac{1}{\sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \neq 2}} |\zeta_2 - \zeta_k|} \right].$$

Le lemme suivant va nous permettre de minorer la différence $\zeta_1 - \zeta_2$, sous une hypothèse qui apparaît naturellement si on considère l'équation test $x'' + bx' + \omega^2 x = 0$. En effet, l'équation caractéristique $r^2 + br + \omega^2 = 0$ a une racine double lorsque $b^2 - 4\omega^2 = 0$; dans ce cas, si la méthode est convergente, les racines ζ_1 et ζ_2 sont très proches l'une de l'autre.

LEMME 3.5 : Soient $\zeta_1(z, z')$ et $\zeta_2(z, z')$ les deux racines de $\bar{\omega}(\cdot, z, z')$ qui tendent vers 1 lorsque (z, z') tend vers $(0, 0)$; alors il existe une constante $\eta > 0$, telle que, si z et z' sont suffisamment petits, et si le rapport $z'^2 / |z'^2 - 4z|$ reste borné, on ait la minoration suivante :

$$|\zeta_1(z, z') - \zeta_2(z, z')| \geq \eta |z'^2 - 4z|.$$

Démonstration : Par hypothèse, 1 est racine double de ρ , simple de τ . On peut donc poser

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2 R(\zeta), \quad \tau(\zeta) = (\zeta - 1) T(\zeta).$$

Alors $R(1) = T(1) = \sigma(1)$ d'après les hypothèses (H_1) et (H_2) , et ζ_1, ζ_2 vérifient l'équation

$$(\zeta - 1)^2 R(\zeta) + z'(\zeta - 1) T(\zeta) + z\sigma(\zeta) = 0,$$

que l'on peut encore écrire :

$$\left[(\zeta - 1) + z' \frac{T(\zeta)}{2R(\zeta)} \right]^2 = \frac{z'^2 T^2(\zeta) - 4z\sigma(\zeta)R(\zeta)}{4R^2(\zeta)}.$$

En écrivant le développement de Taylor des polynômes au point 1, on peut mettre le second membre sous la forme suivante :

$$\frac{z'^2 T^2(\zeta) - 4z\sigma(\zeta)R(\zeta)}{4R^2(\zeta)} = \frac{u}{4R^2(\zeta)} \left\{ \sigma(1)^2 + \left(a_1 \frac{z'^2}{u} + b_1 \right) (\zeta - 1) + \dots \right. \\ \left. + \left(a_{2q-2} \frac{z'^2}{u} + b_{2q-2} \right) (\zeta - 1)^{2q-2} \right\},$$

où $u = z'^2 - 4z$, avec des coefficients a_k et b_k ($1 \leq k \leq 2q - 2$) dépendant uniquement des dérivées successives de ρ , σ et τ au point 1.

Si on fait l'hypothèse que z'/u reste borné pour z, z' assez petits, comme $\zeta_1(z, z')$ tend vers 1 quand (z, z') tend vers $(0, 0)$, on a

$$\frac{z'^2 T^2(\zeta_1) - 4z\sigma(\zeta_1)R(\zeta_1)}{4R^2(\zeta_1)} = \frac{u}{4} \{1 + O(\zeta_1 - 1)\}.$$

Par suite, on obtient l'identité

$$\zeta_1 - 1 + \frac{z'}{2}(1 + O(\zeta_1 - 1)) = \varepsilon \frac{\sqrt{|u|}}{2}(1 + O(\zeta_1 - 1))$$

(avec $\varepsilon \pm 1$ ou $\varepsilon = \pm i$ suivant le signe de u), pour (z, z') voisin de $(0, 0)$. On en déduit le développement

$$\zeta_1(z, z') - 1 = \frac{-z' + \varepsilon \sqrt{|u|}}{2} + \eta_1(z, z') \frac{-z' + \varepsilon \sqrt{|u|}}{2},$$

et pour l'autre racine

$$\zeta_2(z, z') - 1 = \frac{-z' - \varepsilon \sqrt{|u|}}{2} + \eta_2(z, z') \frac{-z' + \varepsilon \sqrt{|u|}}{2},$$

avec $\eta_i(z, z') \rightarrow 0, (z, z') \rightarrow (0, 0), i=1, 2$; d'où finalement une estimation de $\zeta_1 - \zeta_2$:

$$\zeta_1(z, z') - \zeta_2(z, z') = \varepsilon \sqrt{|u|} \left(1 + \frac{z'}{\sqrt{|u|}} \theta_1(z, z') + \theta_2(z, z') \right)$$

avec $\theta_i(z, z') \rightarrow 0, i=1, 2, (z, z') \rightarrow (0, 0)$.

REMARQUE 3.2 : 1° lorsque $B=0$, on a immédiatement un développement de $\zeta_1(z)$ et $\zeta_2(z)$ en puissances de $z^{1/2}$ (cf. rem. 3.1);

2° lorsque $z = \omega^2 \Delta t^2, z' = b \Delta t$ on peut montrer que, sous l'hypothèse $z'^2 - 4z \neq 0$ (c'est-à-dire $b^2 - 4\omega^2 \neq 0$), ζ_1 et ζ_2 admettent en fait un développement en série en Δt .

LEMME 3.6 : Avec les notations du lemme 3.5, si les valeurs propres des opérateurs A_h et B_h vérifient l'hypothèse

$$\exists \delta > 0, \forall i \in \{1, \dots, N(h)\}, \quad |b_{i,h}^2 - 4\omega_{i,h}^2| \geq \delta \omega_{i,h}^2,$$

alors $\exists \eta > 0$ tel que pour Δt assez petit, pour tout $i \in \{1, \dots, N(h)\}$:

$$|\zeta_1(\omega_{i,h}^2 \Delta t^2, b_{i,h} \Delta t) - \zeta_2(\omega_{i,h}^2 \Delta t^2, b_{i,h} \Delta t)| \geq \eta \Delta t.$$

Démonstration : D'après le lemme 3.5, étant donné que le rapport $b_{i,h}^2/|b_{i,h}^2 - 4\omega_{i,h}^2|$ est bien borné,

$$|\zeta_1(\omega_{i,h}^2 \Delta t^2, b_{i,h} \Delta t) - \zeta_2(\omega_{i,h}^2 \Delta t^2, b_{i,h} \Delta t)| \geq \eta \delta^{1/2} |\omega_{i,h}| \Delta t,$$

et les valeurs propres de A_h sont minorées par la plus petite valeur propre de A qui est non nulle.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

THÉORÈME 3.2 : *Sous les hypothèses du lemme 3.6, et si 1 est la seule racine double de module 1 de ρ , il existe une constante $C > 0$, et un pas Δt_0 tels qu'on ait la majoration suivante : pour*

$$0 < \Delta t < \Delta t_0, \quad |\Gamma_1(\Delta t^2 A_h, \Delta t B_h)|_h \leq \frac{C}{\Delta t}.$$

REMARQUE 3.3 : Lorsque $B=0$, l'hypothèse que 1 est la seule racine double de ρ est inutile (cf. rem. 3.2).

Dans le cas général, si on supprime cette hypothèse, il faut imposer une condition analogue à celle du lemme 3.5; si a est une racine double de module 1 de ρ autre que 1, il faut supposer que

$$\left| \frac{z'}{z} + \frac{\sigma}{\tau}(a) \right| > \eta > 0.$$

En utilisant un résultat d'approximation des valeurs propres (cf. Strang Fix [11]), nous pouvons donner la signification de l'hypothèse sur les valeurs propres lorsque $B = \alpha A + \beta I$.

PROPOSITION 3.2 : *La condition*

$$\exists \delta > 0, \quad \forall h \leq h_0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N(h)\}, \quad |b_{i,h}^2 - 4\omega_{i,h}^2| \geq \delta \omega_{i,h}^2$$

est vérifiée quand les sous-espaces V_h sont des espaces d'éléments finis dans chacun des cas suivants :

$$\alpha = 0, \quad \beta^2/4 \in Sp A;$$

$$\alpha > 0, \quad \alpha\beta > 1;$$

$$\alpha > 0, \quad \alpha\beta = 1 \text{ et } 1/\alpha^2 \notin Sp A;$$

$\alpha > 0, \quad \alpha\beta < 1$, et les deux racines de l'équation $(\alpha x + \beta)^2 - 4x = 0$ n'appartiennent pas à $Sp A$.

4. MAJORATION DE L'ERREUR

4.1. Erreur de consistance

Il faut estimer le terme de consistance ε_h^n ; en transformant la formule (1.5), il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^n = & \frac{1}{\Delta t^2} P_h \left\{ \sum_{i=0}^q \alpha_i (\Pi_h u(t_{n+i}) - u(t_{n+i})) \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta t^2} P_h \left\{ \sum_{i=0}^q \alpha_i u(t_{n+i}) - \Delta t^2 \sum_{i=0}^q \beta_i u''(t_{n+i}) \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta t} \left\{ \sum_{i=0}^q \gamma_i (B_h \Pi_h - P_h B) u(t_{n+i}) \right\} \\ & + \frac{1}{\Delta t} P_h B \left\{ \sum_{i=0}^q \gamma_i u(t_{n+i}) - \Delta t \sum_{i=0}^q \beta_i u'(t_{n+i}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pour majorer ces termes, nous allons faire des hypothèses sur l'ordre de la méthode.

DÉFINITION : Nous dirons que la méthode (ρ, σ, τ) est d'ordre $\geq (p, p')$ si la méthode (ρ, σ) est d'ordre $\geq p$ (pour une équation du deuxième ordre) et la méthode (τ, σ) d'ordre $\geq p'$ (pour une équation du premier ordre).

Nous utiliserons les notations suivantes (cf. [7]) pour la définition des constantes d'erreur :

(D_p) sont les constantes d'erreur de la méthode (ρ, σ) (pour une équation du deuxième ordre);

(C_p) les constantes d'erreur de la méthode (τ, σ) , et (B_p) celles de la méthode (ρ, τ) (pour une équation du premier ordre).

PROPOSITION 4.1 : La méthode (ρ, σ, τ) est d'ordre $\geq (p, p')$ si et seulement si la méthode (ρ, σ) est d'ordre $\geq p$ et la méthode (ρ, τ) d'ordre $\geq p' + 1$.

Démonstration : On montre facilement la relation

$$\begin{cases} B_p = D_p - C_{p-1}, & p \geq 1, \\ B_0 = D_0. \end{cases}$$

La méthode (ρ, σ) est d'ordre $\geq p$ si $D_0 = D_1 = \dots = D_{p+1} = 0$, (ρ, τ) est d'ordre $\geq p'$ si $C_0 = C_1 = \dots = C_{p'} = 0$.

PROPOSITION 4.2 : Si la méthode (ρ, σ, τ) est d'ordre (p, p') , on a :

(i) si $B = 0$ et si $u \in C^{p+2}([0, T]; H) \cap C^2([0, T]; V)$,

$$|\varepsilon_h^n| \leq C \Delta t^{p-1} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |u^{(p+2)}(t)| dt + \frac{C'}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |\Pi_h u''(t) - u''(t)| dt,$$

(ii) si $B = \alpha A + \beta I$ et si

$$u \in C^{p+2}([0, T]; H) \cap C^2([0, T]; V) \cap C^{p'+1}([0, T]; D(A)),$$

$$|\varepsilon_h^n| \leq C \Delta t^{p-1} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |u^{(p+2)}(t)| dt + \frac{C'}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |\Pi_h u''(t) - u''(t)| dt$$

$$+ C \Delta t^{p'} \int_{t_n}^{t_{n+q}} (|u^{(p'+1)}(t)| + \|u^{(p'+1)}(t)\|_{D(A)}) dt$$

$$+ \frac{C'}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+q}} |\Pi_h u'(t) - u'(t)| dt,$$

où $\|u\|_{D(A)} = (|u|^2 + |Au|^2)^{1/2}$.

Démonstration : Grâce à l'hypothèse de damping orthogonal, le seul terme délicat à majorer dans (4.1), celui qui fait intervenir l'opérateur $B_h \Pi_h - P_h B$, se simplifie. En effet, si $B = \alpha A + \beta I$, $P_h B - B_h \Pi_h = \beta P_h (I - \Pi_h)$; en particulier, si $B = 0$ les deux derniers termes de (4.1) disparaissent. Quant aux autres termes, ils se majorent de façon classique.

4.2. Théorème de majoration

THÉORÈME 4.1 : *Supposons les méthodes (ρ, σ) et (τ, σ) convergentes $((H_1)(H_2))$. Alors, sous l'hypothèse (H_0) si $D(\rho, \sigma, \tau) \supset [0, r] \times [0, r'] \setminus \{(0, 0)\}$, ou sous l'hypothèse (H'_0) si $D(\rho, \sigma, \tau) \supset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \setminus \{(0, 0)\}$, on a pour une méthode (ρ, σ, τ) d'ordre (p, p') , la majoration suivante :*

(i) si $B = 0$ et si $u \in C^{p+2}([0, T]; H) \cap C^2([0, T]; V)$,

$$|u(t_n) - u_h^n| \leq |\Pi_h u(t_n) - u(t_n)| + \frac{C}{\Delta t} \max_{i=0, \dots, q-1} |e_h^i|$$

$$+ C \Delta t^p \int_0^{t_n} |u^{(p+2)}(t)| dt + C' \int_0^{t_n} |\Pi_h u''(t) - u''(t)| dt;$$

(ii) si $B = \alpha A + \beta I$ et si

$$u \in C^{p+2}([0, T]; H) \cap C^2([0, T]; V) \cap C^{p'+1}([0, T]; D(A))$$

$$|u(t_n) - u_h^n| \leq |\Pi_h u(t_n) - u(t_n)| + \frac{CT}{\Delta t} \max_{i=0, \dots, q-1} |e_h^i|$$

$$+ CT \left\{ \Delta t^p \int_0^{t_n} |u^{(p+2)}(t)| dt + \Delta t^{p'} \int_0^{t_n} (|u^{(p'+1)}(t)| + \|u^{(p'+1)}(t)\|_{D(A)}) dt \right\}$$

$$+ CT \left\{ \int_0^{t_n} (|\Pi_h u''(t) - u''(t)| + |\Pi_h u'(t) - u'(t)|) dt \right\}.$$

Démonstration : Il suffit de reprendre la formule (1.11) et d'appliquer les résultats du paragraphe 3.

Plaçons-nous dans la situation classique suivante : V est l'espace $H_0^1(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$; et soit \mathcal{T}_h une triangulation régulière de Ω (Ω ouvert borné de frontière Γ régulière).

Prenons pour $V_h = \{v \in C_0(\bar{\Omega}) / \forall K \in \mathcal{T}_h, v|_K \in P_k \text{ et } v|_\Gamma = 0\}$.

COROLLAIRE 4.1 : *Sous les hypothèses du théorème 4.1, si*

$$u, u', u'' \in L^1([0, T]; H^{k+1}(\Omega)) \cap L^\infty([0, T]; H^{k+1}(\Omega)),$$

on a la majoration suivante pour une méthode d'ordre (p, p) :

$$|u(t_n) - u_h^n| \leq \frac{CT}{\Delta t} \max_{i=0, \dots, q-1} |e_h^i| + CT(\Delta t^p + h^{k+1}).$$

Grâce aux résultats du paragraphe 3.2, on peut obtenir une majoration ne faisant pas intervenir T lorsque $B=0$, ou lorsque $B=\alpha A + \beta I$ si on impose une condition au spectre de A et aux racines essentielles de ρ .

5. EXEMPLES DE MÉTHODES (ρ, σ, τ)

Nous rappelons que, comme on l'a vu au paragraphe 1, une classe d'exemples est fournie par la discrétisation de l'équation $u'' + Bu' + Au = f$ écrite sous forme système; les polynômes ρ, σ et τ sont dans ce cas de la forme $\rho=r^2, \sigma=s^2, \tau=rs$. On peut étudier l'ordre et le domaine de ces méthodes et comparer les résultats de convergence obtenus par la discrétisation sous forme système et pour la discrétisation directe. Nous renvoyons pour cette étude à [6].

Nous présentons ci-dessous une étude systématique des méthodes à 2 et 3 pas.

5.1. Méthodes à 2 pas

Nous adopterons la notation suivante (Geradin [5]) pour la forme générale du polynôme σ :

$$\sigma(\zeta) = 1 + (1 + \varepsilon)(\zeta - 1) + \left(\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \varphi\right)(\zeta - 1)^2. \quad (5.1)$$

Les caractéristiques des méthodes à deux pas sont résumées dans les tableaux I et II pour l'ordre, dans le tableau III pour le domaine de stabilité.

On montre facilement que si une méthode (ρ, σ, τ) à q pas est d'ordre (p, p) , on a $p < 3q/2$. Le tableau III montre qu'il existe des méthodes à 2 pas d'ordre le plus élevé possible, inconditionnellement stables.

TABLEAU I
Ordre de (ρ, σ)

Ordre de (ρ, σ)	ε, φ	ρ, σ	Constantes d'erreur
1	—	$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2$ σ forme générale (5 1)	$D_3 = -\varepsilon$
2	$\varepsilon = 0$	$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2$ $\sigma(\zeta) = \left(\frac{1}{6} + \varphi\right)(\zeta - 1)^2 + (\zeta - 1) + 1$	$D_4 = -\varphi - \frac{1}{12}$
3 et 4	$\varepsilon = 0$ $\varphi = -1/12$	$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2$ $\sigma(\zeta) = \frac{1}{12}(\zeta - 1)^2 + (\zeta - 1) + 1$	$D_5 = 0$

TABLEAU II
Ordre de (τ, σ)

Ordre de (τ, σ)	$\eta, \varepsilon, \varphi$	τ, σ	Constantes d'erreur
1	—	$\tau(\zeta) = \eta(\zeta - 1)^2 + (\zeta - 1)$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 1)	$C_2 = \eta - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)$
2	$\eta = \varepsilon + \frac{1}{2}$	$\tau(\zeta) = \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(\zeta - 1)^2 + (\zeta - 1)$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 1)	$C_3 = -\varphi$
3	$\varphi = 0$	$\tau(\zeta) = \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)(\zeta - 1)^2 + (\zeta - 1)$ $\sigma(\zeta) = \left(\frac{1}{6} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(\zeta - 1)^2 + (1 + \varepsilon)(\zeta - 1) + 1$	$C_4 = -\frac{\varepsilon}{12}$

Signalons que la conique d'équation $\Delta(z, z') = 0$, où $\Delta(z, z')$ est le discriminant de l'équation du 2^e degré $\bar{\omega}(\cdot, z, z') = 0$, est tangente à l'axe Oz' en $(0, 0)$; il y a donc, comme on l'avait annoncé dans la remarque 3.1, des points (z, z') arbitrairement voisins de $(0, 0)$ où $\bar{\omega}(z, z')$ admet une racine double.

Interprétation : Rappelons que dans le schéma de Newmark, pour l'équation $y'' = g(t, y, y')$, on construit deux suites y^n et z^n de la manière suivante :

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t z^n + \Delta t^2 \left(\beta g^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) g^n \right) \Bigg| \quad g^n = g(t_n, y^n, z^n),$$

$$z^{n+1} = z^n + \Delta t (\gamma g^{n+1} + (1 - \gamma) g^n).$$

TABLEAU III
Domaine de stabilité

ε, φ	Ordre de (ρ, σ, τ)	$D(\rho, \sigma)$	$D(\rho, \tau)$	$D(\rho, \sigma, \tau)$
$\varepsilon = \varphi = 0$	(2, 4)	$]0, 12[$	R_+^*	
$\varepsilon = 0$ $\varphi = -\frac{1}{12}$	(4, 2)	$]0, \frac{12}{1-12\varphi}[$		
$\varepsilon = 0$ $\varphi < \frac{1}{12}$ $\varphi \neq -\frac{1}{12}$	(2, 2)			$R_+ \times R_+ \setminus \{(0, 0)\}$
$\varepsilon = 0$ $\varphi \geq \frac{1}{12}$				
$\varepsilon > 0$ $\varphi \geq \frac{1}{12}$	(1, 2)	$]0, \frac{12}{1-12\varphi}[$		
$\varepsilon > 0$ $\varphi < \frac{1}{12}$				
$\varepsilon < 0$		\emptyset	$]0, -\frac{1}{\varepsilon}[$	ne contient aucun pavé

Nous donnons ci-dessous une interprétation de ce schéma en tant que méthode linéaire à 2 pas.

PROPOSITION 5.1 : Si (y^n, z^n) est solution du schéma de Newmark de paramètres (β, γ) appliqué à l'équation $y'' + By' + Ay = f$, alors (y^n) est solution du schéma linéaire à 2 pas de polynômes :

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= (\zeta - 1)^2, \\ \sigma(\zeta) &= \beta\zeta^2 + \left(\gamma - 2\beta + \frac{1}{2}\right)\zeta + \frac{1}{2} - \gamma + \beta, \\ \tau(\zeta) &= (\zeta - 1)(\gamma\zeta + 1 - \gamma^2). \end{aligned}$$

Ce schéma linéaire est d'ordre au moins (1.2); il admet les paramètres

$$\varepsilon = \gamma - \frac{1}{2}; \quad \varphi = \beta - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12}.$$

Réciproquement, tout schéma linéaire à 2 pas d'ordre au moins (1, 2) coïncide avec la méthode de Newmark associée à $\beta = (1/6) + (\varepsilon/2) + \varphi$, $\gamma = (1/2) + \varepsilon$.

Pour $\gamma = 1/2$, $\beta \geq 1/4$, le schéma est inconditionnellement stable, en particulier ($\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$) donne le schéma à accélération moyenne constante; c'est le schéma inconditionnellement stable d'ordre le plus élevé, le plus précis.

Pour $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$, on a le schéma de Newmark à accélération linéaire; c'est l'unique méthode à 2 pas d'ordre (2.3).

5.2. Méthodes à 3 pas

La forme générale du polynôme σ sera notée

$$\begin{aligned} \sigma(\zeta) = 1 + \left(\frac{3}{2} + \eta\right)(\zeta - 1) + \left(\frac{7}{12} + \eta + \varepsilon\right)(\zeta - 1)^2 \\ + \left(\frac{1}{24} + \frac{\eta}{6} + \frac{\varepsilon}{2} + \varphi\right)(\zeta - 1)^3. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Comme pour les méthodes à 2 pas, nous résumons l'étude des méthodes à 3 pas dans des tableaux; les tableaux IV et V pour l'ordre, VI et VII pour les domaines de stabilité.

Le tableau VI donne le domaine de stabilité des méthodes d'ordre (3, 3), qui correspondent au cas pratique d'application du théorème de majoration (cor. 4.1) avec $p = p' = 3$. En complément, nous donnons également les domaines des méthodes d'ordre (2, 3). Les cas où le domaine ne contient aucun pavé n'ont pas été indiqués dans ces tableaux.

On vérifie sur ce tableau qu'aucune méthode d'ordre (3.3) n'est inconditionnellement stable; pour un résultat plus général concernant les méthodes (ρ, σ) , voir Dahlquist [2].

Signalons que pour le cas $0 < \eta < 1/\sqrt{12}$, les domaines peuvent avoir des allures différentes dont nous donnons un exemple dans la figure VIII.

TABLEAU IV

Ordre de $(\rho \sigma)$

Ordre de $(\rho \sigma)$	$a \eta \varepsilon \varphi$	$\rho \sigma$	Constantes d'erreur
1	-	$\rho(\zeta) = a(\zeta-1)^3 + (\zeta-1)^2$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 2)	$D_3 = -a + \left(\eta + \frac{1}{2}\right)$
2	$a = \eta + \frac{1}{2}$	$\rho(\zeta) = \left(\eta + \frac{1}{2}\right)(\zeta-1)^3 + (\zeta-1)^2$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 2)	$D_4 = -\varepsilon$
3	$\varepsilon = 0$ $a = \eta + \frac{1}{2}$	$\rho(\zeta) = \left(\eta + \frac{1}{2}\right)(\zeta-1)^3 + (\zeta-1)^2$ $\sigma(\zeta) = \left(\frac{1}{24} + \frac{\eta}{6} + \varphi\right)(\zeta-1)^3 + \left(\frac{7}{12} + \eta\right)(\zeta-1)^2$ $+ \left(\frac{3}{2} + \eta\right)(\zeta-1) + 1$	$D_5 = -\left(\varphi + \frac{\eta}{12}\right)$
4	$\varepsilon = 0$ $\varphi = -\frac{\eta}{12}$ $a = \eta + \frac{1}{2}$	$\rho(\zeta) = \left(\eta + \frac{1}{2}\right)(\zeta-1)^3 + (\zeta-1)^2$ $\sigma(\zeta) = \left(\frac{1}{24} + \frac{\eta}{12}\right)(\zeta-1)^3 + \left(\frac{7}{12} + \eta\right)(\zeta-1)^2$ $+ \left(\frac{3}{2} + \eta\right)(\zeta-1) + 1$	$D_6 = -\frac{1}{240}$

TABLEAU V

Ordre de $(\tau \sigma)$

Ordre de $(\tau \sigma)$	$b c \eta \varepsilon \varphi$	$\tau \sigma$	Constantes d'erreur
1		$\tau(\zeta) = b(\zeta-1)^3 + c(\zeta-1)^2 + (\zeta-1)$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 2)	$C_2 = c - (\eta + 1)$
2	$c = \eta + 1$	$\tau(\zeta) = b(\zeta-1)^3 + (\eta + 1)(\zeta-1)^2 + (\zeta-1)$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 2)	$C_3 = b - \left(\frac{\eta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{6}\right)$
3	$b = \frac{\eta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{6}$	$\tau(\zeta) = \left(\frac{\eta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{6}\right)(\zeta-1)^3 + (\eta + 1)(\zeta-1)^2 + (\zeta-1)$ $\sigma(\zeta)$ forme générale (5 2)	$C_4 = -\varphi$
4	$\varphi = 0$	$\tau(\zeta) = \left(\frac{\eta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{6}\right)(\zeta-1)^3 + (\eta + 1)(\zeta-1)^2 + (\zeta-1)$ $\sigma(\zeta) = \left(\frac{1}{24} + \frac{\eta}{6} + \varepsilon\right)(\zeta-1)^3 + \left(\frac{7}{12} + \eta + \varepsilon\right)(\zeta-1)^2$ $+ \left(\frac{3}{2} + \eta\right)(\zeta-1) + 1$	$C_5 = \frac{1}{720} - \frac{\varepsilon}{12}$

TABIEAU VI
 Domaine de stabilité des méthodes d'ordre (3, 3)

η, φ	$D(\rho, \sigma)$	$D(\rho, \tau)$	$D(\rho, \sigma, \tau)$	
$\eta > 0$ $\varphi + \frac{\eta}{12} < 0$	$\left] 0, \frac{12\eta}{\eta - 12\varphi} \right[$]0, 12 η]		$r = \frac{12\eta}{\eta - 12\varphi}$ (r, 0) $\in D$
$\eta > 0$ $\varphi + \frac{\eta}{12} = 0$]0, 6[$r = 6$ (r, 0) $\notin D$

TABIEAU VII
 Domaine de stabilité des méthodes d'ordre (2, 3)

$\eta, \varepsilon, \varphi$	$D(\rho, \sigma)$	$D(\rho, \tau)$	$D(\rho, \sigma, \tau)$	
$\eta = 0$ $\varphi = 0$	$\left] 0, \frac{1}{(1/6) - \varepsilon} \right[$	R_+^*		$r = \frac{1}{(1/6) - \varepsilon}$
$\varepsilon \geq \frac{1}{6}$	R_+^*			$r = +\infty$
$\varepsilon \geq \frac{1}{12}, \varphi \geq \frac{\eta}{12}$	R_+^*	R_+^*	$R_+ \times R_+ \setminus \{(0, 0)\}$	
$\eta \geq \frac{1}{\sqrt{12}}$ $\varphi < \frac{\eta}{12}$				
$\eta \left(\varepsilon - \frac{1}{12} \right) \geq \varphi$				$\left] 0, \frac{12\eta}{\eta - 12\varphi} \right[$
$\varepsilon < \frac{1}{12}, \varepsilon \neq 0$ $\varphi < \frac{\eta}{12}$	$\left] 0, \frac{12\eta}{\eta - 12\varphi} \right[$	$\left] 0, \frac{12\eta}{1 - 12\varepsilon} \right[$		$r = \frac{12\eta}{\eta - 12\varphi}$

Nous regardons maintenant les méthodes classiques à 3 pas.

Méthode de Houbolt : Elle est donnée par les polynômes

$$\rho(\zeta) = (\zeta - 1)^2 (2\zeta - 1),$$

$$\sigma(\zeta) = \zeta^3,$$

$$\tau(\zeta) = \frac{1}{6}(\zeta - 1)(\zeta^2 - 7\zeta + 2).$$

Avec nos notations, c'est donc une méthode de paramètres $\eta = 3/2$, $\varepsilon = 11/12$, $\varphi = 1/4$. C'est l'une des méthodes inconditionnellement stables, d'ordre le plus élevé (2, 3), ce qui explique son utilisation.

Méthode de Wilson généralisée : Le schéma de Wilson généralisé s'écrit pour une équation $y'' = g(t, y, y')$:

$$\begin{aligned} y''_{n+\theta} &= y''_n + \theta(y''_{n+1} - y''_n), \\ y'_{n+\theta} &= y'_n + \theta \Delta t y''_n + \gamma \theta^2 \Delta t (y''_{n+1} - y''_n), \\ y_{n+\theta} &= y_n + \theta \Delta t y'_n + \frac{1}{2} \theta^2 \Delta t^2 y''_n + \theta^3 \Delta t^2 \beta (y''_{n+1} - y''_n), \\ y''_{n+\theta} &= g(t_{n+\theta}, y_{n+\theta}, y'_{n+\theta}), \\ y'_{n+1} &= y'_n + \Delta t (\gamma y''_{n+1} + (1 - \gamma) y''_n), \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t y'_n + \Delta t^2 (\beta y''_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) y''_n). \end{aligned}$$

Donnons une interprétation de cette méthode en tant que méthode linéaire.

PROPOSITION 5.2 : *Appliqué à une équation $y'' + By' + Ay = 0$, un schéma de Wilson de paramètres β, γ, θ coïncide avec la méthode linéaire à 3 pas de polynômes*

$$\begin{aligned} \rho(\zeta) &= \theta \zeta^3 + (1 - 3\theta) \zeta^2 + (3\theta - 2) \zeta + (1 - \theta), \\ \sigma(\zeta) &= \beta \theta^3 \zeta^3 + \left(-3\theta^3 \beta + \frac{\theta^2}{2} + \beta + \theta \gamma\right) \zeta^2 \\ &+ \left(3\theta^3 \beta - \theta^2 - 2\theta \gamma + \theta + \gamma + \frac{1}{2} - 2\beta\right) \zeta + \left(-\theta^3 \beta + \frac{\theta^2}{2} + \theta \gamma - \theta + \beta - \gamma + \frac{1}{2}\right), \\ \tau(\zeta) &= \gamma \theta^2 \zeta^3 + (-3\gamma \theta^2 + \gamma + \theta) \zeta^2 + (3\gamma \theta^2 - 2\theta - 2\gamma + 1) \zeta + (-\gamma \theta^2 + \gamma + \theta - 1). \end{aligned}$$

Pour $\theta = 1$, on retrouve les polynômes de degré 2 du schéma de Newmark.

Pour $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$ c'est la θ -méthode. On a

$$\eta = \theta - \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{12}, \quad \varphi = \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta}{12}.$$

La méthode est donc d'ordre (2, 3) et inconditionnellement stable si $\theta \geq (1 + \sqrt{3})/2$, c'est un nouvel exemple de méthode d'ordre le plus élevé possible, inconditionnellement stable.

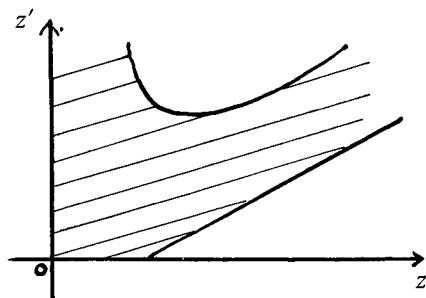


Figure VIII

BIBLIOGRAPHIE

1. M. CROUZEIX, Approximation des équations d'évolution linéaires par des méthodes multipas. *Étude Numérique des Grands Systèmes*. Rencontres I.R.I.A.-Novosibirsk, juin 1976, Dunod, Paris.
2. G. DAHLQUIST, *On Accuracy and Unconditional Stability of Linear Multistep Methods for Second Order Differential Equations*, B.I.T., vol. 18, 1978, p. 133-136.
3. C. W. GEAR, *The Stability of Numerical Methods for Second Order Ordinary Differential Equations*, S.I.A.M. J. Num. Anal., vol. 15, 1978, p. 188-197.
4. E. GEKELER, *Linear Multistep Methods and Galerkin Procedures for Initial Boundary Value Problems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., vol. 13, 1976, p. 536-548.
5. M. GERADIN, *A Classification and Discussion of Integration Operators for Transient Structural Response*, A.I.A.A. paper n° 74-105.
6. E. GODLEWSKI et A. PUECH-RAOULT, *Thèse de 3^e cycle* (à paraître).
7. P. HENRICI, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, London, 1962.
8. P. S. JENSEN, *Stability Analysis of Structures by Stiffly Stable Methods*, Computer and Structures, vol. 4, p. 615-626.
9. P. A. RAVIART, *Multistep Methods and Parabolic Equations*, Funct. Anal. and Num. Anal., Japan-France Seminar, Tokyo and Kyoto, 1976; H. FUJITA, éd., Japan Society for the Promotion of Science, 1978, p. 429-454.
10. W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
11. G. STRANG et G. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.